На правах рукописи
УДК 511.361

Иванков Павел Леонидович

ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЗНАЧЕНИЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Специальность: 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена в Московском государственном техническом университете имени Н.Э.Баумана

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Матвеев Евгений Михайлович, Московский государственный текстильный университет им. А.Н.Косыгина

доктор физико-математических наук, профессор
Салихов Владислав Хасанович,
Брянский государственный технический университет

доктор физико-математических наук, профессор
Сорокин Владимир Николаевич,
Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Ведущая организация
Московский педагогический государственный университет

Защита состоится 2009 г.
в час. мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В.Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 1408.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ им. М.В.Лолмоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.501.001.84
при МГУ, доктор физико-математических наук, профессор

А.О.Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Рассмотрим обобщенный гипергеометрический ряд

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \quad , \tag{1}$$

где $a(x) = (x+\alpha_1)\dots(x+\alpha_r), b(x) = (x+\beta_1)\dots(x+\beta_m), a(x)b(x) \neq 0$ при $x = 1, 2, 3, \dots$. Если $r < m$, то $F(z)$ — целая функция; при $r = m$ степенной ряд (1) имеет конечный радиус сходимости. Функции, определяемые равенством (1), будем называть (обобщенными) гипергеометрическими функциями, а числа $\alpha_1, \dots, \alpha_r$, $\beta_1, \dots, \beta_m$ — параметрами этих функций. В работах многих авторов изучаются вопросы линейной независимости значений функций вида (1) и их производных над различными полями алгебраических чисел (чаще всего над мнимым квадратичным полем), а также методы получения оценок снизу абсолютных величин однородных и неоднородных линейных форм от указанных значений. Рассмотрим постановку соответствующих задач в простейшей ситуации.

Пусть $\mathbb{I}$ – некоторое мнимое квадратичное поле или поле рациональных чисел; $a(x)$ и $b(x)$ – многочлены из кольца $\mathbb{I}[x]$; $\omega \neq 0$ — число из поля $\mathbb{I}$. Требуется доказать линейную независимость над $\mathbb{I}$ чисел

$$1, F(\omega), F'(\omega), \dots, F^{(m-1)}(\omega),$$

а также выяснить вопрос о возможной малости модуля линейной формы

$$h_0 + \sum_{j=1}^{m} h_j F^{(j-1)}(\omega)$$

с коэффициентами из кольца целых чисел $\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$ поля $\mathbb{I}$ в зависимости от величины $H = \max(|h_1|, \dots, |h_m|)$.

Первым шагом на пути к решению поставленных задач является построение линейной приближающей формы, имеющей высокий порядок нуля при $z = 0$. В рассматриваемом случае это означает, что требуется подобрать многочлены $P_0(z), P_1(z), \ldots, P_m(z)$ степеней не выше n так, чтобы функциональная форма

$$R(z) = P_0(z) + \sum_{j=1}^{m} P_j(z) F^{(j-1)}(z) \tag{2}$$

имела при $z = 0$ порядок нуля не меньше, чем

$$mn - \varepsilon(n), \tag{3}$$

и была бы отлична от тождественного нуля. Дополнительно требуется, чтобы коэффициенты многочленов удовлетворяли некоторым ограничениям. Выбор величины $\varepsilon(n)$ определяется возможностями метода, применяемого при построении функциональной формы $R(z)$. При рациональных параметрах $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_m$ такая форма может быть построена с помощью принципа Дирихле. Последующие рассуждения ведутся по схеме, предложенной К.Зигелем[1] . В дальнейшем метод Зигеля был существенно усилен в работах А.Б.Шидловского. Обычно с помощью метода Зигеля доказывают алгебраическую независимость значений функций вида (1) и их производных и получают оценки мер алгебраической независимости соответствующих чисел. Приведем здесь следствие одной из теорем А.Б.Шидловского[2].

Теорема I. *Пусть функции*

$$1, F(z), F'(z), \ldots, F^{(m-1)}(z)$$

линейно независимы над полем $\mathbb{I}(z)$, *параметры* $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, $\beta_1, \ldots, \beta_m$ *рациональны, и пусть* ω *— ненулевое число из поля* $\mathbb{I}$. *Тогда для любого нетривиального набора* $h_0, h_j, j = 1, \ldots, m,$ *— целых чисел из указанного поля — выполняется неравенство*

$$\left| h_0 + \sum_{j=1}^{m} h_j F^{(j-1)}(\omega) \right| > H^{-m-\frac{\gamma}{\sqrt{\ln\ln H}}} \quad , \tag{4}$$

[1] Siegel C.L. Über einige Anwendungen diophantischer Approximationen //Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phys.-Math. Kl.– 1929-1930. – № 1. – S. 1-70.

[2] Shidlowskii A.B. On the estimates of the algebraic independence measures of the values of E-functions //J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1979. – V. 27. – P. 385-407.

где

$$H = \max(3, |h_j|, j = 1, \ldots, m),$$

а положительная постоянная γ *зависит от* $\alpha_i, \beta_j, \omega$.

Заметим, что аналогичные следствия можно получить из результатов указанной работы и в более общей ситуации. При доказательстве теоремы I величина $\varepsilon(n)$ из (3) имеет порядок $O\left(\frac{n}{\sqrt{\ln n}}\right)$. Уточнить оценку (4) можно только за счет присутствующей в показателе степени величины $\frac{\gamma}{\sqrt{\ln\ln H}}$. Однако, осуществить такое уточнение в присущей методу Зигеля общности не удаётся. Не удаётся также применить метод Зигеля в его классической форме для исследования арифметической природы значений функций вида (1) в случае, когда параметры этих функций не являются рациональными; причины последнего обстоятельства вскрыты в работе А.И.Галочкина [3].

В некоторых случаях линейную приближающую форму (2) можно построить эффективно. Такое построение применялось в работах Ч.Осгуда[4], Н.И.Фельдмана[5], А.И.Галочкина[6,7], Е.М.Никишина[8] и других.

Приведём здесь теорему, характерную для получаемых этим методом результатов.

Теорема II (А.И.Галочкин[7]) **.** *Пусть* $F(z)$ *— функция вида* (1), $\beta_1, \ldots, \beta_m$ *— рациональные числа,* $a(x) \equiv 1$; $\omega_1, \ldots, \omega_t$ *— попарно различные ненулевые числа из поля* $\mathbb{I}$. *Тогда для любого нетривиального набора*

$$h_0, h_{kj}, k = 1, \ldots, t, j = 1, \ldots, m,$$

[3]Галочкин А.И. О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу Е-функций //Математические заметки. – 1981. – Т. 29, № 1. С. 3-14.

[4]Osgood Ch.F. Some theorems on diophantine approximation //Trans. Amer. Math. Soc. – 1966. – V. 123, № 1. – P. 64-87.

[5]Фельдман Н.И. Оценки снизу для некоторых линейных форм //Вестник МГУ. – Сер. 1. Математика, механика. 1967. – № 2. – С. 63-72.

[6]Галочкин А.И. Оценки снизу линейных форм от значений некоторых гипергеометрических функций //Математические заметки. – 1970. – Т. 8, № 1. – С. 19-28.

[7]Галочкин А.И. О диофантовых приближениях значений некоторых целых функций с алгебраическими коэффициентами. I //Вестник МГУ. – Сер. 1. Математика, механика. – 1978. – № 6. – С. 25-32.

[8]Nikišin E.M. Arithmetic properties of the Markov function for the Jacobi weight //Analysis Mathematica. – 1982. – V. 8. – P. 39-46.

— целых чисел из поля $\mathbb{I}$ — выполняется неравенство

$$\left|h_0 + \sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{m} h_{kj}F^{(j-1)}(\omega_k)\right| > H^{-mt-\frac{\gamma}{\ln\ln H}}, \qquad (5)$$

где $H = \max(3, |h_{kj}|, k = 1, \ldots, t, j = 1, \ldots, m)$, *а положительная постоянная* γ *зависит от* $\beta_1, \ldots, \beta_m$, $\omega_1, \ldots, \omega_t$.

Эта теорема также может быть доказана с помощью эффективного построения линейной приближающей формы для соответствующей совокупности функций. При эффективном построении приближающей формы $R(z)$ её порядок нуля обычно оказывается максимально возможным, и $\varepsilon(n)$ в (3) на деле от n не зависит. Это приводит к уточнению оценки линейной формы: остаточный член порядка $O(1/\sqrt{\ln\ln H})$, присутствующий в показателе степени в правой части неравенства (4), заменяется в неравенстве (5) на $O(1/\ln\ln H)$. Отметим, что в последней теореме рассматривается совокупность значений функции (1) и её производных в нескольких точках мнимого квадратичного поля.

Если $a(x) \equiv 1$, и $b(x) = \lambda + x$, то мы получим такую гипергеометрическую функцию:

$$\varphi_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda + x}. \qquad (6)$$

Приведём пример теоремы, вытекающей из результатов работы Н.И.Фельдмана[5], в которой варьируются параметры функции (6).

Теорема III. *Пусть* ω *— отличное от нуля рациональное число, а* $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ *суть различные по модулю 1 рациональные числа, не являющиеся целыми отрицательными. Тогда для любого нетривиального набора* $h_0, h_1, \ldots, h_t$ *— целых рациональных чисел — выполняется неравенство*

$$\left|h_0 + \sum_{k=1}^{t} h_k\varphi_{\lambda_k}(\omega)\right| > H^{-t-\frac{\gamma}{\ln\ln(H+2)}},$$

где

$$H = \max(|h_k|, k = 1, \ldots, t),$$

а γ *— положительная постоянная, зависящая от* $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ *и* ω.

В ряде работ[9, 10] были исследованы арифметические свойства значений производных по параметрам гипергеометрических функций. С помощью метода Зигеля была доказана алгебраическая независимость таких значений; эффективная конструкция линейных приближающих форм в этих работах не использовалась.

Рассмотрим ещё полилогарифмы, т.е. функции вида

$$L_j(\lambda, z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\nu+\lambda)^j}.$$

Арифметические свойства значений таких функций изучались в нескольких работах[11,12,13]; наиболее общие результаты содержатся в работе О.Н.Василенко[14], где с помощью эффективного построения линейной приближающей формы доказано, что числа

$$1, L_j\left(\lambda_l, \frac{\omega_k}{q}\right), k = 1, \ldots, t, l = 1, \ldots, u, j = 1, \ldots, m_l$$

линейно независимы, и получена оценка соответствующей линейной формы. При этом предполагается, что $\lambda_1, \ldots, \lambda_u$ рациональны и удовлетворяют некоторым естественным ограничениям, а число q достаточно велико.

Вместо линейной приближающей формы (2) часто используют совместные приближения

$$R_j(z) = P(z)F^{(j-1)}(z) + P_j(z), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{7}$$

где $P(z), P_j(z)$ — многочлены, степени которых не превосходят n, а отличные от тождественного нуля функции $R_j(z)$ имеют при $z = 0$ нуль порядка не меньше, чем

$$n + \frac{n}{m} - \varepsilon(n).$$

[9]Белогривов И.И. О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых E-функций // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. – 1967, № 2. – С. 55-62.

[10]Mahler K. Application of a theorem by A.B. Shidlovsky // Proc. Roy. Soc. Ser. A. – 1968. – V. 305. – P. 149-173.

[11]Maier W. Potenzreihen irrationalen Grenzwertes //J. reine ang. Math. – 1927. – H. 156. – S. 93 - 148.

[12]Фельдман Н.И. Об одной линейной форме //Acta Arithm. – 1972. – XXXI. – С. 347-355.

[13]Никишин Е.М. Об иррациональности значений функций $F(x, s)$ //Матем. сб. – 1979. – Т. 109(151), № 3. – С. 410-417.

[14]Василенко О.Н. О линейной независимости значений некоторых функций //Диофантовы приближения. – Ч. 1. – М.: Изд-во МГУ, 1985. — С. 10-16.

Замечание по поводу $\varepsilon(n)$, сделанное после (3) остаётся в силе и здесь. Во многих случаях использование совместных приближений даёт лучшие результаты. В работе Г.В.Чудновского [15] с помощью совместных приближений доказаны теоремы об арифметической природе значений функции $F(z)$ и её производных при $a(x) \not\equiv 1$.

Эффективные конструкции линейных приближающих форм (2) или совместных приближений (7) позволяют не только уточнить оценки соответствующих линейных форм, но также исследовать арифметические свойства значений функций вида (1) и их производных в случае иррациональных параметров. Первые результаты такого рода были получены в предположении $b(0) = 0$ (так называемый однородный случай).

Теорема IV (А.И.Галочкин[6]) **.** *Пусть $F(z)$ – функция вида (1), $a(x) \equiv 1, b(x) \in \mathbb{I}[x], b(0) = 0, \omega \neq 0$ – число из поля $\mathbb{I}$. Тогда для любого набора целых чисел $h_1, \dots, h_m$ из поля $\mathbb{I}$ выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{j=1}^{m} h_j F^{(j-1)}(\omega) \right| > H^{1-m-\frac{\gamma}{\ln\ln H}},$$

где $H = \max(3, |h_j|, j = 1, \dots, m)$, а γ — положительная постоянная, зависящая от ω и от параметров функции $F(z)$.

Привлечение теории делимости в полях алгебраических чисел позволило доказать аналогичные теоремы и для неоднородного случая; приведём здесь формулировку одного из таких результатов[16].

Теорема V **.** *Пусть $a(x) \equiv 1$, а $\beta_1, \dots, \beta_m$ — алгебраические числа степеней соответственно $\varkappa_1, \dots, \varkappa_m$, причем $b(x) \in \mathbb{I}[x]$,*

$$\tau = 1 - \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\varkappa_j},$$

[15] Chudnovsky G.W. Padé approximations to the generalized hypergeometric functions. I. //J. math. pures et appl. Ser. 9. – 58, № 4. – 1979. – P. 445-476.

[16] Галочкин А.И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций //Сиб. матем. журнал. – Т. 17, № 6. – С. 1220-1235.

и пусть ω — ненулевое число из поля $\mathbb{I}$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ при любом наборе $h_0, h_j, j = 1, \ldots, m,$ — целых чисел из поля $\mathbb{I}$, для которых

$$H = \max(|h_j|, j = 1, \ldots, m) > H_0(\beta_1, \ldots, \beta_m, \omega, \varepsilon),$$

выполняется неравенство

$$\left| h_0 + \sum_{j=1}^{m} h_j F^{(j-1)}(\omega) \right| > H^{-\frac{m+\tau}{1-\tau} - \varepsilon}.$$

В работе А.И.Галочкина[17] для построения линейной приближающей формы предложен новый подход, в котором используется как принцип Дирихле, так и эффективная конструкция. Это позволило получить наиболее общие результаты об арифметической природе значений функций вида (1) с иррациональными параметрами при $a(x) \equiv 1$.

При некоторых дополнительных ограничениях, наложенных на параметры функции $F(z)$, оценка (5) при $t = 1$ допускает дальнейшее уточнение. Относящиеся сюда результаты содержатся в работах А.Н.Коробова[18], А.И.Галочкина[19] и А.Ю.Попова[20]. Полученные в указанных работах оценки линейных форм являются точными по высоте. Пример вычисления постоянных, входящих в такие оценки, содержится в работе[20].

Приведенные результаты показывают, что актуальной является задача эффективного построения функциональной приближающей формы $R(z)$, определяемой равенством (2), для случая $a(x) \not\equiv 1$. Указанное построение позволяет обобщить на такой случай теорему II , а также другие аналогичные результаты. Эффективные конструкции, в которых варьируются параметры функций, дают возможность обобщить теорему III в различных направлениях . В некоторых случаях возможно эффективное построение

[17] Галочкин А.И. О некотором аналоге метода Зигеля //Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. – 1986, № 2. – С. 30-34.

[18] Коробов А.Н. Оценки некоторых линейных форм //Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. – 1981, № 6. – С. 36-40.

[19] Галочкин А.И. О неулучшаемых по высоте оценках некоторых линейных форм //Математический сборник. – 1984. – Т. 124, № 3. – С. 416-430.

[20] Попов А.Ю. Приближения некоторых степеней числа e //Диофантовы приближения. Ч. 1. – М.: Изд-во МГУ, 1985. – С. 77-85.

линейной приближающей формы и для функций, полученных из (1) дифференцированием по параметру. Это позволяет уточнить оценки линейных форм, вытекающие из результатов работ[9,10]. Актуальной является также задача обобщения теорем IV и V на случай $a(x) \not\equiv 1$. Здесь можно применить упомянутую выше эффективную конструкцию линейной приближающей формы $R(z)$, а также обобщение некоторого аналога метода Зигеля из работы [17]. В связи с работой[19] отметим также актуальность задачи о вычислении констант, входящих в точные по высоте оценки, по аналогии с тем, как это сделано в[20] для экспоненциальной функции.

Целью работы является изучение арифметических свойств значений обобщенных гипергеометрических функций. При этом в случае рациональных параметров основное внимание уделяется уточнению оценок соответствующих линейных форм; для точных по высоте оценок вычисляются константы, входящие в эти оценки. Для функций с иррациональными параметрами в первую очередь рассматриваются вопросы линейной независимости значений таких функций.

Методы исследования. Для доказательства большей части перечисленных ниже теорем применяется метод, основанный на эффективном построении функциональных приближающих форм. Этот метод, впервые использованный в классических работах Эрмита и Линдемана, позволяет получить наиболее точные оценки числовых линейных форм. Некоторые результаты о линейной независимости значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами получены с использованием одного из вариантов метода Зигеля. В этом случае функциональные приближающие формы строятся с помощью принципа Дирихле, что позволяет провести соответствующие исследования в большей общности.

Научная новизна. Новыми являются все основные результаты диссертации. Построены аппроксимации типа Паде для обобщенных гипергеометрических функций (1) и их производных в различных ситуациях (в нескольких точках, для варьируемых параметров, для функций, полученных дифференцированием по параметру). Указанные построения применены для уточнения оценок линейных форм от значений соответствующих функций; в ряде случаев получены новые результаты о линейной независимости значений рассматриваемых функций. С помощью одного из вариантов метода Зигеля доказаны теоремы о линейной независимости значений функций (1) и их производных в случае иррациональных параметров и получены соответствующие количественные результаты. В некоторых случаях вычислены постоянные, входящие в неулучшаемые по высоте оценки линейных форм. Уточнены оценки неоднородных линейных форм от значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами.

Практическая и теоретическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты представляют интерес для теории трансцендентных чисел и могут быть использованы в других разделах математики.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на заседаниях научно-исследовательского семинара по теории чисел МГУ и Всесоюзной школы "Конструктивные методы и алгоритмы теории чисел", проходившей в сентябре 1989 г. в Минске; на Международной конференции "Трансцендентные числа" в Москве в сентябре 2000 г., а также на Международной конференции "Diophantine and analytic problems in number theory", посвященной 100-летию со дня рождения А.О.Гельфонда (Москва, январь–февраль 2007).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[15]; совместных публикаций нет.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Работа изложена на 123 страницах. Библиография включает 50 наименований.

Работа выполнена при поддержке Международного научного фонда, грант № MHS000, и Программы "Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2007)", проект РНП 2.1.1.2381.

Содержание диссертации

Глава 1. Рациональные параметры

Перечислим теоремы, доказанные в первой главе диссертации. Рассмотрим вновь функцию

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)},$$

где $a(x) = (x+\alpha_1)\dots(x+\alpha_r)$, $b(x) = (x+\beta_1)\dots(x+\beta_m)$; $r \leqslant m$; $a(x)b(x) \neq 0$ при $x = 1, 2, \dots$; $\alpha_i - \beta_j \neq 0, 1, 2, \dots$, $i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, m$. Через $\mathbb{I}$, как и выше, обозначим некоторое мнимое квадратичное поле (или поле рациональных чисел). В § 1 с помощью эффективной конструкции аппроксимаций Паде первого рода для функции $F(z)$ и ее производных в различных точках получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть корни многочленов $a(x)$ и $b(x)$ рациональны, $r < m$, $\omega_1, \dots, \omega_t$ — попарно различные отличные от нуля числа из поля $\mathbb{I}$, и пусть $h_0, h_{kj}, k = 1, \dots, t, j = 1, \dots, m$, — нетривиальный набор целых чисел из этого поля. Тогда выполняется неравенство*

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{m} h_{kj} F^{(j-1)}(\omega_k) \right| > H^{-mt - \frac{\gamma}{\ln\ln H}}, \tag{8}$$

где

$$H = \max(3, |h_{kj}|, k = 1, \dots, t,\ j = 1, \dots, m);$$

константа γ зависит от чисел $\omega_1, \dots, \omega_t$ и от параметров функции $F(z)$.

Если $b(0) = 0$, то можно получить оценку соответствующей однородной формы (более точную чем та, которая вытекает из (8)).

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы, и пусть $b(0) = 0, mt \geqslant 2$. Тогда*

$$\left| \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{m} h_{kj} F^{(j-1)}(\omega_k) \right| > H^{1 - mt - \frac{\gamma}{\ln\ln H}},$$

где $h_{kj}, \omega_k, H, \gamma$ определяются так же, как и в теореме 1.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, кроме условия $r < m$, и пусть $r = m$. Пусть, далее, натуральное число $\Lambda \geqslant 3$ таково, что числа*

$$\Lambda\alpha_i, \Lambda\beta_j, \Lambda\omega_k, \Lambda/\omega_k, \Lambda/(\omega_{k_1} - \omega_{k_2})$$

являются целыми в поле $\mathbb{I}$,

$$\Omega \geqslant \max\left(|\alpha_i|, |\beta_j|, |\omega_k|, \frac{1}{|\omega_k|}, \frac{1}{|\omega_{k_1} - \omega_{k_2}|}, \Lambda\right),$$
$$i = 1, \ldots, r, j = 1, \ldots, m, k, k_1, k_2 = 1, \ldots, t, k_1 \neq k_2.$$

Тогда для любого q — целого числа из поля $\mathbb{I}$ при $|q| > B$, где

$$B = e^{Cm^2t(m+t)\Omega},$$

C — абсолютная положительная постоянная, при любом нетривиальном наборе h_0, h_{kj} — целых чисел из поля $\mathbb{I}$ — при $H \geqslant H_0(\alpha_i, \beta_j, \omega_k, q)$ выполняется неравенство

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{m} h_{kj} F^{(j-1)}\left(\frac{\omega_k}{q}\right) \right| > H^{-mt\frac{\ln|q| + (mt)^{-1}\ln B}{\ln|q| - \ln B}}, \tag{9}$$

где H определяется, как в теореме 1.

Поскольку при $|q| \to \infty$ показатель степени в правой части (9) стремится к $-mt$, то последней теореме можно придать следующий вид.

Теорема 4. *Пусть выполнены все условия теоремы 3, и пусть ε — произвольное положительное число. Тогда существует $q_0 = q_0(\alpha_i, \beta_j, \omega_k, \varepsilon)$ такое, что при любом целом q, $|q| > q_0$ из поля $\mathbb{I}$ для любого нетривиального набора h_0, h_{kj} — целых чисел из поля $\mathbb{I}$ — выполняется неравенство*

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{m} h_{kj} F^{(j-1)}\left(\frac{\omega_k}{q}\right) \right| > H^{-mt-\varepsilon},$$

где H определяется, как в теореме 1, $H \geqslant H_0(\alpha_i, \beta_j, \omega_k, \varepsilon, q)$

Теорема 5. *Заменим условие $r < m$ теоремы 2 на $r = m$; прочие условия оставим без изменения. Числа Ω и Λ определим, как в теореме 3. Тогда для целого числа q из поля $\mathbb{I}$ при $|q| > B$, где*

$$B = e^{Cm^2 t(m+t)\Omega},$$

C — абсолютная положительная постоянная, при любом наборе h_{kj} — целых чисел из поля $\mathbb{I}$ — выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{t}\sum_{j=1}^{m} h_{kj} F^{(j-1)}\left(\frac{\omega_k}{q}\right)\right| > H^{(1-mt)\frac{\ln|q|+(mt-1)^{-1}\ln B}{\ln|q|-\ln B}},$$

где H определяется, как в теореме 1, $H \geqslant H_0(\alpha_i, \beta_j, \omega_k, q)$.

Результаты § 2 получены с помощью эффективной конструкции аппроксимаций Паде для гипергеометрических функций и их производных с различными параметрами.

Предположим, что для $a(x)$ и $b(x)$ выполнены все условия, указанные перед формулировкой первой теоремы.

Теорема 6. *Пусть корни многочленов $a(x)$ и $b(x)$, а также δ, $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ — рациональные числа, причем $\delta \notin \mathbb{Z}$; $\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2} \notin \mathbb{Z}$, $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 = 1, \ldots, t$; $(x + \lambda_k + \delta)(x + \lambda_k) \neq 0$ при $x = 1, 2, 3, \ldots; k = 1, \ldots, t; \omega \in \mathbb{I}$, $\omega \neq 0$. Пусть, далее,*

$$F_{Ak}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{(x+\lambda_k)a(x)}{b(x)}, \tag{10}$$

$$\lambda_k - \beta_j \neq 0, 1, 2, \ldots, 1 + r < m;$$

$$F_{Bk}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{(x+\lambda_k)b(x)}, \tag{11}$$

$$\alpha_i - \lambda_k \neq 0, 1, 2, \ldots, r < m + 1;$$

$$F_{Ck}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{(x+\lambda_k+\delta)a(x)}{(x+\lambda_k)b(x)}, \tag{12}$$

$$\alpha_i - \lambda_k, \delta, \lambda_k + \delta - \beta_j \neq 0, 1, 2, \ldots,\ r < m;$$

$$F_{Dk}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{(x^2 - {\lambda_k}^2)a(x)}{b(x)}, \tag{13}$$

$$\pm\lambda_k - \beta_j \neq 0, 1, 2, \ldots, \lambda_{k_1} \pm \lambda_{k_2}, 2\lambda_k \notin \mathbb{Z}, r + 2 < m;$$

$$F_{Ek}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{(x^2 - {\lambda_k}^2) b(x)}, \tag{14}$$

$$\alpha_i \pm \lambda_k \neq 0, 1, 2, \ldots,\ \lambda_{k_1} \pm \lambda_{k_2}, 2\lambda_k \notin \mathbb{Z},\ r < m + 2.$$

Везде $i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, m,\ k, k_1, k_2 = 1, \ldots, t,\ k_1 \neq k_2$. *Тогда для соответствующей функции (обозначаемой ниже через* $F_k(z)$*) и для любого нетривиального набора* $h_0,\ h_{kj}$ *— целых чисел из поля* $\mathbb{I}$*, по модулю не превосходящих* $H, H \geqslant 3$*, выполняется неравенство*

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{u} h_{kj} F_k^{(j-1)}(\omega) \right| > H^{-ut - \frac{\gamma}{\ln \ln H}},$$

где число u *равно степени многочлена, стоящего в знаменателе под знаком произведения в правой части равенства, определяющего функцию* $F_k(z)$; γ *— положительная постоянная, зависящая от* $\alpha_i, \beta_j, \omega, \lambda_k$*, а для функции* (12) *также и от* δ.

Для всех функций (10) — (14) можно сформулировать и доказать аналог последней теоремы для однородного случая. Приведём в виде примера соответствующий результат для функций (10).

Теорема 7. *Пусть для функции* (10) *выполнены все условия теоремы 6. Дополнительно потребуем, чтобы выполнялось равенство* $b(0) = 0$ *и чтобы было* $mt \geqslant 2$. *Тогда для любого нетривиального набора* $h_{kj}, k = 1, \ldots, t,\ j = 1, \ldots, m,$ *— целых чисел из поля* $\mathbb{I}$ *— выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{m} h_{kj} F_{Ak}^{(j-1)}(\omega) \right| > H^{1 - mt - \frac{\gamma}{\ln \ln H}},$$

где положительная постоянная γ *зависит от параметров функции (10) и от числа* ω.

Отметим, что если в последней теореме $a(x) \equiv 1$, то в случае функций (11) и (14) нет необходимости требовать, чтобы корни многочлена $b(x)$ были рациональными числами; достаточно ограничиться условием $b(x) \in \mathbb{I}[x]$. Ввиду отсутствия в доказательстве принципиально новых моментов, это доказательство в диссертации не приводится. Если в правых частях (10) — (14) под знаком произведения степень числителя равна степени знаменателя, то для таких функций справедливы аналоги теорем 3 – 5 (в последнем случае при выполнении условия однородности). В диссертации приводится (без доказательства) лишь аналог теоремы 4:

Теорема 8. *Пусть для функции* (10) *вместо условия* $1 + r < m$ *выполняется равенство* $1 + r = m$, *и пусть* ε *— произвольное положительное число. Тогда существует* $q_0 = q_0(\alpha_i, \beta_j, \omega, \lambda_k, \varepsilon)$ *такое, что при любом целом* q, $|q| > q_0$ *из поля* $\mathbb{I}$ *для любого нетривиального набора* h_0, h_{kj} *— целых чисел из поля* $\mathbb{I}$, *по модулю не превосходящих* H *— при* $H \geqslant H_0(\alpha_i, \beta_j, \omega, \lambda_k, \varepsilon, q)$ *выполняется неравенство*

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{m} h_{kj} F_{Ak}^{(j-1)} \left(\frac{\omega}{q} \right) \right| > H^{-mt-\varepsilon}.$$

Поскольку две последние теоремы приводятся без доказательств, они не включаются в число основных результатов диссертации.

В § 3 эффективная конструкция аппроксимаций Паде второго рода строится для гипергеометрических функций с различными параметрами. Эта конструкция применяется затем для доказательства теоремы 9.

Теорема 9. 1.*Пусть* $r < m$; *корни многочленов* $a(x)$ *и* $b(x)$, *а также числа* $\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_t$ *рациональны,* $(x+\lambda)(x+\lambda_1)\cdots(x+\lambda_t) \neq 0$ *при* $x = 1, 2, 3, \ldots$; $\lambda_{k_1} - \lambda_{k_2} \notin \mathbb{Z}$, $k_1 \neq k_2$, $k_1, k_2 = 1, \ldots, t$, $\omega \neq 0$, $\omega \in \mathbb{I}$, *и пусть выполнены указанные перед формулировкой теоремы 1 ограничения на параметры функции* (1). *Если*

$$F_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)(x+\lambda_k)}{b(x)(x+\lambda)},$$

$\lambda_k - \beta_j, \lambda_k - \lambda, \alpha_i - \lambda \notin \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, r,\ j = 1, \ldots, m,\ k = 1, \ldots, t, \omega \in \mathbb{I},$

$\omega \neq 0$, то для любого нетривиального набора $h_j, h_{kl}, j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, t,\ l = 1, \ldots, m+1$ — целых чисел из поля $\mathbb{I}$ — выполняется неравенство

$$\left| h_0 + \sum_{j=1}^{m} h_j F^{(j-1)}(\omega) + \sum_{k=1}^{t} \sum_{l=1}^{m+1} h_{kl} F_k^{(l-1)}(\omega) \right| > H^{-u-\frac{\gamma}{\ln \ln H}},$$

где $u = m + t(m+1)$, а γ — положительная постоянная, зависящая от $\alpha_i, \beta_j, \lambda_k, \lambda, \omega$ и от поля $\mathbb{I}$;

$$H = \max(3, |h_j|, j = 1, \ldots, m,\ |h_{kl}|,\ k = 1, \ldots, t,\ l = 1, \ldots, m+1).$$

2. *Утверждение теоремы останется в силе, если*

$$F_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)(x+\lambda)}{b(x)(x+\lambda_k)},$$

где $\lambda, \lambda_k, \alpha_i - \lambda_k, \lambda - \beta_j \notin \mathbb{Z},\ k = 1, \ldots, t,\ i = 1, \ldots, r$.

Пусть $\varphi_\lambda(z)$ — гипергеометрическая функция (6), и пусть

$$\frac{\partial \varphi_\lambda(z)}{\partial \lambda} = -\sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} \left(\frac{1}{\lambda+1} + \ldots + \frac{1}{\lambda+\nu} \right) \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{\lambda+x}\ ,$$

где λ — дробное рациональное число.

Теорема 10. *Если ξ — ненулевое число из поля $\mathbb{I}$, h_0, h_1, h_2 — нетривиальный набор целых чисел из указанного поля, и*

$$H = \max(3, |h_1|, |h_2|),$$

то выполняется неравенство

$$\left| h_0 + h_1 \varphi_\lambda(\xi) + h_2 \frac{\partial \varphi_\lambda(\xi)}{\partial \lambda} \right| > H^{-2-\frac{\gamma}{\ln \ln H}}\ ,$$

где положительная постоянная γ зависит от λ и ξ.

Последняя теорема также доказывается с помощью эффективной конструкции аппроксимаций Паде – на этот раз для функций $\varphi_\lambda(z)$ и $\frac{\partial \varphi_\lambda(z)}{\partial \lambda}$.

Глава 2. Иррациональные параметры

В § 1 эффективное построение линейных приближающих форм, применяемое для доказательства теорем первой главы, используется для исследования арифметической природы значений гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами.

Пусть, как и выше, $\mathbb{I}$ — мнимое квадратичное поле λ_1 и λ_2 — иррациональные числа из этого поля, разность которых есть дробное рациональное число. Рассмотрим функции

$$F_{kj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \nu^{j-1} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{b_k(x)},$$

где $b_k(x) = (x + \lambda_k) b(x) \in \mathbb{I}[x]$ — многочлен степени m, старший коэффициент которого равен 1; $b(0) = 0$; $k = 1, 2;\ j = 1, \ldots, m$.

Теорема 11. *Пусть ξ — отличное от нуля число из поля $\mathbb{I}$; $h_{kj}, k = 1, 2;\ j = 1, \ldots, m,$ — целые числа из этого поля,*

$$H = \max(|h_{kj}|).$$

Тогда для любого положительного ε найдется H_0 такое, что при $H \geqslant H_0$ выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{2} \sum_{j=1}^{m} h_{kj} F_{kj}(\xi) \right| > H^{1-4m-\varepsilon}.$$

В §2 с помощью одного из вариантов метода Зигеля доказываются следующие теоремы.

Пусть $a_k(x), b_k(x), b(x)$ — многочлены, коэффициенты при старших степенях которых равны единице. Степени этих многочленов равны соответственно v_k, u_k и u, причём

$$b(x) = (x + \lambda_1) \ldots (x + \lambda_u),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_u$ — алгебраические числа степеней соответственно $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_u$, а число τ определено равенством

$$\tau = 1 - \frac{1}{u} \sum_{i=1}^{u} \frac{1}{\varkappa_i}. \qquad (15)$$

Пусть, далее, $a_k(x)b_k(x)b(x) \neq 0$ при $x = 1, 2, 3, \ldots;$

$$F_k(z) = F_{k1}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \omega_k^\nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a_k(x)}{b_k(x)b(x)};$$

$$F_{kj_k}(z) = z\frac{d}{dz}F_{k,j_k-1}(z), j_k = 2, \ldots, m_k, m_k = u + u_k, k = 1, \ldots, t.$$

Теорема 12. *Если функции* $1, F_{kj_k}(z), k = 1, \ldots, t; j_k = 1, \ldots, m_k,$ *линейно независимы над* $\mathbb{C}(z)$; $b(x) \in \mathbb{I}[x], \omega_k \in \mathbb{I}$, *корни многочленов* $a_k(x)$ *и* $b_k(x)$ *рациональны,* $v_k \leqslant u_k, v_k < m_k, u_k - v_k = d$ *не зависит от* $k, k = 1, \ldots, t$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *и для любого нетривиального набора* $h_0, h_{kj_k}, k = 1, \ldots, t, j_k = 1, \ldots, m_k,$ – *целых чисел из поля* $\mathbb{I}$ – *при* $H = \max(|h_{kj_k}|, k = 1, \ldots, t, j_k = 1, \ldots, m_k) >$ $> H_0(F_1(z), \ldots, F_t(z), \mathbb{I}, \varepsilon)$ *выполняется неравенство*

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^{t} \sum_{j_k=1}^{m_k} h_{kj_k} F_{kj_k}(1) \right| > H^{-\frac{m(u+d)+u\tau}{u+d-u\tau}-\varepsilon},$$

где $m = m_1 + \ldots + m_t$.

Теорема 13. *Пусть функции* $F_{kj_k}(z), k = 1, \ldots, t, j_k = 1, \ldots, m_k,$ *из предыдущей теоремы линейно независимы над* $\mathbb{C}(z)$, *прочие условия этой теоремы оставим без изменения; дополнительно потребуем, чтобы выполнялись соотношения* $u_k > 0,\ b_k(0) = 0,$ $m = m_1 + \ldots + m_t \geqslant 2$. *Тогда для любого нетривиального набора* h_{kj_k} — *целых чисел из поля* $\mathbb{I}$ — *и для любого* $\varepsilon > 0$ *при достаточно большом* H,

$$H = \max(|h_{kj_k}|, k = 1, \ldots, t,\ j_k = 1, \ldots, m_k),$$

выполняется неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^{t} \sum_{j_k=1}^{m_k} h_{kj_k} F_{kj_k}(1) \right| > H^{-((m-1)(u+d)+u\tau)/(u+d-u\tau)-\varepsilon}.$$

Теорема 14. *Пусть* $a_k(x), b_k(x)$ — *многочлены, все корни которых рациональны, а коэффициенты при старших степенях равны единице;* $\deg a_k(x) = v_k, \quad \deg b_k(x) = u_k, \quad u_k - v_k = r_k \geqslant 0,$

$k=1,\ldots,t$; $d_1,\ldots,d_t$ — такие делители соответственно чисел $r_1,\ldots,r_t$, что $\lambda = r_k/d_k$ не зависит от k (если $r_k \neq 0$, то можно, например, положить $d_k = r_k$). Пусть далее, $b(x) = (x+\beta_1)\ldots$ $\ldots(x+\beta_u)$ — многочлен с коэффициентами из некоторого мнимого квадратичного поля $\mathbb{I}$, $\beta_1,\ldots,\beta_u$ — алгебраические числа степеней соответственно $\varkappa_1,\ldots,\varkappa_u$, число τ определено равенством (15). Предположим, что $v_k < m_k = u_k + d_k u$, и рассмотрим при $k=1,\ldots,t$ функции

$$F_k(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{d_k\nu}\omega_k^{d_k\nu}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a_k(x)}{b_k(x)}\prod_{x=1}^{d_k\nu}\frac{1}{b(x)},$$

где ω_k — числа из поля $\mathbb{I}$. Если функции

$$1,\ F_k^{(j_k)}(z),\quad k=1,\ldots,t;\ j_k=0,1,\ldots,m_k-1,$$

линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, то для любого $\varepsilon>0$ и для любого нетривиального набора h_0, h_{kj_k} — целых чисел из поля $\mathbb{I}$ — при $H=\max|h_{kj_k}| > H_0(F_k(z),\mathbb{I},\varepsilon)$ выполняется неравенство

$$\left|h_0 + \sum_{k=1}^{t}\sum_{j_k=0}^{m_k-1} h_{kj_k}F_k^{(j_k)}(1)\right| > H^{-\frac{m(\lambda+u)+u\tau}{\lambda+u-u\tau}-\varepsilon},$$

где $m = m_1+\ldots+m_t$.

Если в этой теореме положить $v_1=\ldots= v_t, d_1=\ldots=d_t=1$, то получится теорема 12.

Теорема 15. *Пусть выполнены все условия предыдущей теоремы, $a_k(x)\equiv\ 1,\ b_k(0)=0,\ k=1,\ldots,t$. Относительно функций*

$$F_k^{(j_k)}(z),\ k=1,\ldots,t,\ j_k=0,1,\ldots,m_k-1,$$

предположим, что они линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$. Тогда для любого нетривиального набора h_{kj_k} — целых чисел из поля $\mathbb{I}$ — при $H=\max|h_{kj_k}|\geqslant 3$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{k=1}^{t}\sum_{j_k=0}^{m_k-1} h_{kj_k}F_k^{(j_k)}(1)\right| > H^{1-m-\frac{\gamma}{\sqrt{\ln\ln H}}},$$

где $\gamma>0$ — постоянная, зависящая от параметров функций $F_k(z)$ и от поля $\mathbb{I}$; $m=m_1+\ldots+m_t$.

Глава 3. Уточнение оценок

В § 1 рассматриваются две теоремы, в которых вычислены константы, входящие в неулучшаемые по высоте оценки линейных форм. Предположим, что λ — число из поля $\mathbb{I}$ отличное от $-1, -2, \ldots$; $\theta \neq 0$ — такое целое число из $\mathbb{I}$, что $\theta\lambda \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$;

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\theta^{2\nu}} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x(x+\lambda)};\ f_1(z) = f(z);\ f_2(z) = \theta z f'(z).$$

Теорема 16. *Пусть $\alpha = 1/c$, $c \in \mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$, $c \neq 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1.Неравенство

$$\left| \frac{f_2(\alpha)}{f_1(\alpha)} - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{|\theta c|} \cdot \frac{\ln\ln|q|}{|q|^2 \ln|q|}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах p и q из поля $\mathbb{I}$.

2.При любом положительном ε неравенство

$$\left| \frac{f_2(\alpha)}{f_1(\alpha)} - \frac{p}{q} \right| < \left(\frac{1}{|\theta c|} - \varepsilon \right) \cdot \frac{\ln\ln|q|}{|q|^2 \ln|q|}$$

может иметь лишь конечное число решений в целых числах p и q из поля $\mathbb{I}$.

Пусть

$$A(z) = A_{\beta,\alpha}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^\nu \prod_{x=1}^{\nu} \frac{x+\alpha}{x(x+\beta)},$$

где α — положительное рациональное число, причем числа α и 2α не являются целыми; $\beta = 2\alpha + 1$. Пусть, далее, $a \in \mathbb{N}, a\alpha \in \mathbb{N}, b$ — отличное от нуля целое число из некоторого мнимого квадратичного поля $\mathbb{I}$;

$$A_1(z) = A(z),\ A_2(z) = zA'(z),\ \xi_1 = A_1\left(\frac{1}{a^3 b}\right),\ \xi_2 = A_2\left(\frac{1}{a^3 b}\right);$$

$$C_1=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)}2^{-\beta-\frac12}\left|\exp\frac{1}{2a^3b}\right|;$$

$$C_2=\Gamma(\alpha+1)2^{\beta-\frac12}\left|\exp\frac{1}{2a^3b}\right|\max_{j=1,2}\left(\left(\frac{\alpha+1}{a^3|b|}\right)^{2-j}\frac{\left|A_{\beta-2+j,\alpha}\left(-\frac{1}{a^3b}\right)\right|}{\Gamma(\beta+3-j)}\right);$$

$$C=C_1C_2.$$

Теорема 17. *Неравенство*

$$|h_1\xi_1+h_2\xi_2|<C(H\ln H)^{-1}\ln\ln H, \tag{16}$$

$$H=\max(|h_1|,|h_2|),$$

имеет бесконечно много решений в целых числах h_1,h_2 из поля $\mathbb{I}$, а неравенство, получающееся из (16) заменой C на $C-\varepsilon$, при любом положительном ε может иметь лишь конечное число таких решений.

В § 2 доказывается теорема, в которой уточняется оценка неоднородной линейной формы из работы А.И.Галочкина[21].

Пусть, как обычно, $\mathbb{I}$ – мнимое квадратичное поле или поле рациональных чисел; $\psi_k(x), k=1,\dots,t$, и $\psi(x)$ – многочлены из кольца $\mathbb{I}[x]$, коэффициенты при старших степенях которых равны единице; $g_k(x)=\psi_k(x)\psi(x)\neq 0$ при $x=1,2,3,\dots;\omega_1,\dots,\omega_t$ – ненулевые числа из поля $\mathbb{I}$. Рассмотрим при $k=1,\dots,t$ функции

$$\Phi_k(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}z^\nu\omega_k^\nu\prod_{x=1}^{\nu}\frac{1}{g_k(x)}.$$

Предположим, что степени многочленов $\psi_k(x)$ равны:

$$\deg\psi_1(x)=\ldots=\deg\psi_t(x)=u_1;$$

степень многочлена $\psi(x)$ обозначим через u, и пусть $m=u+u_1$.

Теорема 18. *Если все корни многочленов $\psi_k(x)$ рациональны, $u_1>0$, и функции*

$$1,\ F_k^{(j-1)}(z),\ k=1,\dots,t,\ j=1,\dots,m,$$

[21]Галочкин А.И. О диофантовых приближениях значений некоторых целых функций с алгебраическими коэффициентами. II // Вестник МГУ. Серия 1. Математика, механика. – 1979, № 1. – С. 26-30.

линейно независимы над $\mathbb{C}(z)$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *при любом нетривиальном наборе целых чисел из поля* $\mathbb{I}$

$$h_0,\ h_{kj},\ k = 1, \ldots, t,\ j = 1, \ldots, m,$$

при всех достаточно больших значениях H,

$$H = \max(|h_{kj}|,\, k = 1, \ldots, t,\, j = 1, \ldots, m),$$

выполняется неравенство

$$\left| h_0 + \sum_{k=1}^{t} \sum_{j=1}^{m} h_{kj} F_k^{(j-1)}(1) \right| > H^{-\theta-\varepsilon},$$

где $\theta = mt + u/u_1$.

Основные публикации по теме диссертации (из официального Перечня ВАК)

1. Иванков П.Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций //Математический сборник. – 1991. – Т. 182. – № 2. – С. 283-302.

2. Иванков П.Л. Оценки снизу линейных форм от значений функции Куммера с иррациональным параметром //Математические заметки. – 1991. – Т. 49, Вып. 2.– С. 55-63.

3. Иванков П.Л. Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с различными параметрами //Математические заметки. – 1992. – Т. 52, Вып. 6. – С. 25-31.

4. Иванков П.Л. О линейной независимости значений целых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами //Сибирский математический журнал. – 1993. – Т. 34, № 5. – С. 53-62.

5. Иванков П.Л. Об оценках мер линейной независимости некоторых чисел //Математические заметки. – 1994. Т. 55, Вып. 3. – С. 59–67.

6. Иванков П.Л. О приближении значений некоторых функций. // Вестник МГУ. Серия 1. – Математика, механика. – 1994. – № 4. – С. 12-15.

7. Иванков П.Л. О линейной независимости некоторых чисел // Математические заметки. – Т. 62, Вып. 3. – 1997. – С. 383-390.

8. Иванков П.Л. О совместных приближениях, учитывающих специфику однородного случая //Математические заметки.– 2002. – Т. 71, Вып. 3. – С. 390-397.

9. Иванков П.Л. Уточнение оценок некоторых неоднородных линейных форм //Математические заметки. – 2005. – Т. 77, Вып. 4. – С. 515-521.

(прочие публикации)

10. Иванков П.Л. Об оценках некоторых линейных форм // Известия вузов. Математика. – 1993. – № 2. – С. 38-45.

11. Иванков П.Л. О линейной независимости значений некоторых функций //Фундаментальная и прикладная математика. – 1995. – Т. 1, Вып. 1. – С. 191-206.

12. Иванков П.Л. О вычислении постоянных, входящих в оценки линейных форм //Известия вузов. Математика. – № 1. – 2000. – С. 31-36.

13. Иванков П.Л. О значениях гипергеометрических функций с различными иррациональными параметрами //Фундаментальная и прикладная математика. – 2005. – Т. 11, вып. 6. – С. 65-72.

14. Иванков П.Л. О значениях некоторых гипергеометрических функций с иррациональными параметрами //Известия вузов. Математика. – 2007. – № 7. – С. 48 - 52.

15. Иванков П.Л. О дифференцировании гипергеометрической функции по параметру //International Scientific Conference "Diophantine and analytic problems in number theory" dedicated to the 100th birthday of A.O.Gelfond (1906–1968). Abstracts. – Moscow, 2007. – P. 18.