Московский Государственный Университет им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.21

Куликов Александр Владимирович

МНОГОМЕРНЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ МЕРЫ РИСКА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2009

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей Механико-математического факультета Московского Государственного Университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: член-корреспондент РАН, профессор,
доктор физико-математических наук
Ширяев Альберт Николаевич

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Богачев Владимир Игоревич,
МГУ имени М. В. Ломоносова,

доктор физико-математических наук,
профессор Павлов Игорь Викторович,
Ростовский государственный строительный университет

Ведущая организация: Ульяновский государственный университет

Защита диссертации состоится 13 марта 2009 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском Государственном Университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание МГУ, 14 этаж).

Автореферат разослан 12 февраля 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И.Н. Сергеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Одной из наиболее важных задач финансовой математики является задача измерения риска. В работе[1] Ф. Артцнера, Ф. Делбаена, Ж.-М. Эбера и М. Хиса было введено понятие когерентной меры риска.

Отметим, что необходимость рассмотрения нового класса мер риска была вызвана, в частности, наличием недостатков у меры V@R (Value at Risk, "стоимость под риском"), очень широко используемой на практике.

В настоящее время теория когерентных мер риска активно развивается. Достаточно упомянуть работы[2,3,4,5,6,7], а также обзоры[8,9]. Наряду с когерентными мерами риска был рассмотрен более общий случай выпуклых мер риска[5,10,11]. Во всех перечисленных работах рассматриваются одномерные меры риска, т. е. измеряется риск одномерных случайных величин, имеющих смысл стоимости портфелей, выраженной в единицах некоторой базовой валюты. Такой подход оправдан в том случае, когда имеется базовая валюта, или в том случае, когда в конечный момент времени все финансовые позиции ликвидируются, т. е.

---

[1] *Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D.* Thinking coherently. Risk, **10** (1997), No. 11, p. 68–71.

[2] *Черный А. С.* Нахождение справедливой цены на основе когерентных мер риска. Теория вероятностей и ее применения, **52** (2007), в. 3, с. 506–540.

[3] *Acerbi C.* Spectral measures of risk: a coherent representation of subjective risk aversion. Journal of Banking and Finance, **26** (2002), No. 7, p. 1505–1518.

[4] *Acerbi C., Tasche D.* On the coherence of expected shortfall. Journal of Banking and Finance, **26** (2002), No. 7, p. 1487–1503.

[5] *Burgert C., Rüschendorf L.* Consistent risk measures for portfolio vectors. Insurance: Mathematics and Economics, **38** (2006), No. 2, p. 289–297.

[6] *Delbaen F.* Coherent risk measures on general probability spaces. In: K. Sandmann, P. Schönbucher (Eds.). Advances in finance and stochastics. Essays in honor of Dieter Sondermann. Springer, 2002, p. 1–37.

[7] *Föllmer H., Schied A.* Robust preferences and convex measures of risk. In: K. Sandmann, P. Schönbucher (Eds.). Advances in finance and stochastics. Essays in honor of Dieter Sondermann. Springer, 2002, p. 39–56.

[8] *Föllmer H., Schied A.* Stochastic finance. An introduction in discrete time. 2nd Ed., Walter de Gruyter, 2004. Chapter 4

[9] *Schied A.* Risk measures and robust optimization problems. Stochastic Models, **22** (2006), No. 4, p. 753–831.

[10] *Föllmer H., Schied A.* Convex measures of risk and trading constraints. Finance and Stochastics, **6** (2002), No. 4, p. 429–447.

[11] *Frittelli M., Rosazza Gianin E.* Putting order in risk measures. Journal of Banking and Finance, **26** (2002), No. 7, p. 1473–1486.

превращаются в некоторое количество единиц базового актива.

Однако подход с использованием одномерных когерентных и выпуклых мер риска неудобен, например, при описании портфеля, состоящего из нескольких валют, когда нет единой "канонической" валюты, к которой должен приводиться портфель. В этом случае гораздо естественнее пользоваться подходом, предложенным Ю. М. Кабановым [12] (см. также работу [13]), при котором портфель описывается не как число, а как вектор, i-я компонента которого имеет смысл количества в портфеле активов i-го типа.

Если описывать портфели как векторы, то возникает необходимость рассмотрения многомерных мер риска. Понятие многомерной когерентной меры риска было введено в работе Э. Жуини, М. Меддеба, Н. Тузи [14] (см. также работы [15,16]). Их подход нацелен на то, чтобы учесть операционные издержки при обмене одной валюты на другую. Однако в их модели операционные издержки являются неслучайными. Таким образом, не учитывается риск, связанный с изменением обменных курсов, являющийся на сегодняшний день одним из важнейших финансовых рисков. Многомерные когерентные и выпуклые меры риска, учитывающие этот вид риска, вводятся в настоящей диссертации.

В работе [17] Ф. Артцнер, Ф. Делбаен, Ж.-М. Эбер и М. Хис доказали базовую теорему о представлении когерентных мер риска (теорема о представлении выпуклых мер риска была доказана в работах [10,11]). В диссертации рассмотрены аналогичные представления в многомерном случае. Отметим, что эти теоремы доказаны для случая ограниченных случайных величин.

Поскольку во многих моделях, рассматриваемых в финансовой мате-

[12] *Kabanov Yu. M.* Hedging and liquidation under transaction costs in currency markets. Finance and Stochastics, **3** (1999), No. 2, p. 237–248.

[13] *Kabanov Yu. M, Stricker C.* The Harrison-Pliska arbitrage pricing theorem under transaction costs. Journal of Mathematical Economics, **35** (2001), No. 2, p. 185–196.

[14] *Jouini E., Meddeb M., Touzi N.* Vector-valued coherent risk measures. Finance and Stochastics, **8** (2004), No. 4, p. 531–552.

[15] *Cascos I., Molchanov I.* Multivariate Risks and Depth-Trimmed Regions. Finance and Stochastics, **11** (2007), No. 3 p. 373–397.

[16] *Hamel A. H., Heyde F., Hohne M.* Set-valued Measures of Risk. Preprint No. 15-2007, Halle: Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Institut für Matematik, 2007. To appear in Finance and Stochastics

[17] *Artzner P., Delbaen F., Eber J.-M., Heath D.* Coherent measures of risk. Mathematical Finance, **9** (1999), No. 3, p. 203–228.

матике, активы не являются ограниченными случайными величинами, то следует расширить класс случайных величин, для которых применима теория когерентных и выпуклых мер риска. А именно, используя полученные представления, можно продолжить когерентные (выпуклые) меры риска на пространство L^0 всех случайных величин.

Теперь рассмотрим применение мер риска к задачам финансовой математики. При этом когерентные меры риска, определенные на L^0, оказываются более удобными, чем выпуклые.

Одной из таких задач является задача распределения капитала между несколькими частями портфеля (например, распределение риска портфеля большой фирмы между различными отделами этой фирмы). В одномерном случае эта задача была введена в работе [18]. Вопросы, связанные с распределением капитала, также рассматривались в работах [19,20,21].

В работе [2] доказана теорема, которая дает геометрическое и вероятностное решения задачи распределения риска, используя понятие экстремальной меры.

Задача распределения риска тесно связана с проблемой определения риск-вклада, рассмотренной в работах [2,18]. Два первых применения многомерных когерентных мер риска — решение задачи распределения капитала и задача определения риск-вклада в многомерном случае — завершают первую главу диссертации.

Глава 2 посвящена задаче нахождения справедливых цен платежных поручений. Основным результатом в этой области является фундаментальная теорема теории арбитража. В одномерном случае было введено условие отсутствия арбитража (NA) и доказана соответству-

[18] *Delbaen F.* Coherent monetary utility functions. Препринт, доступен на сайте `http://www.math.ethz.ch/~delbaen` под названием “Pisa lecture notes”, 38 p.

[19] *Denault M.* Coherent allocation of risk capital. Journal of Risk, **4** (2001), No. 1, p. 1–34.

[20] *Fischer T.* Risk capital allocation by coherent risk measures based on one-sided moments. Insurance: Mathematics and Economics, **32** (2003), No. 1, p. 135–146.

[21] *Kalkbrenner M.* An axiomatic approach to capital allocation. Mathematical Finance, **15** (2005), No. 3, p. 425–437.

ющая теорема (см. работы [22,23,24]). В случае рынка валют с операционными издержками Ю. М. Кабановым был предложен многомерный NA-подход [12] (см. также работы [13,25,26,27]).

В то же время, интервал NA-справедливых цен является обычно слишком широким в неполных моделях, поэтому появились новые подходы к ценообразованию, ставящие своей целью добиться сужения границ. Новый подход к ценообразованию (NGD (No Good Deals, отсутствие "хороших сделок")) был рассмотрен в работах [28,29]. Поясним идею этого подхода. Рассмотрим платежное поручение, которое с вероятностью $1/2$ ничего не приносит своему владельцу, а с вероятностью $1/2$ приносит 1000 рублей. Тогда интервал NA-справедливых цен для данного платежного поручения будет $(0, 1000)$. Но если, например, цена такого платежного поручения будет 15 рублей, то каждый будет стремиться купить такое платежное поручение, и никто не будет стремиться его продать. Таким образом, 15 рублей будет нереалистичной ценой для данного платежного поручения, и покупка этого платежного поручения будет являться "хорошей сделкой" для всех участников рынка. Техника NGD основана на том факте, что "хороших сделок" нет. В работах [2,18] было рассмотрено условие NGD, основанное на одномерных когерентных мерах риска.

Целью главы 2 является введение условия NGD и вычисление NGD-справедливых цен в многомерном случае. В качестве примера применения этой техники рассмотрена динамическая модель обменных курсов и проведено сравнение полученных результатов с результатами, полу-

[22] *Dalang R. C., Morton A., Wilinger W.* Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market models. Stochastics and Stochastic Reports, **29** (1990), No. 2, p. 185–201.

[23] *Harrison J. M., Pliska S. R.* Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. Stochastic Processes and Their Applications, **11** (1981), No. 3, p. 215–260.

[24] *Kabanov Yu. M., Stricker Ch.* A teachers' note on no-arbitrage criteria. Lectures Notes in Mathematics, **1755** (2001), p. 149–152.

[25] *Kabanov Yu. M., Rasonyi M., Stricker Ch.* No-arbitrage criteria for financial markets with efficient friction. Finance and Stochastics, **6** (2002), No. 3, p. 403–411.

[26] *Kabanov Yu. M, Rasonyi M., Stricker Ch.* On the closedness of sums of cones in L^0 and the robust no-arbitrage property. Finance and Stochastics, **6** (2003), No. 3, p. 371–382.

[27] *Schachermayer W.* The fundamental theorem of asset pricing under proportional transaction costs in finite discrete time. Mathematical Finance, **14** (2004), No. 1, p. 19–48.

[28] *Bernardo A., Ledoit O.* Gain, loss, and asset pricing. Journal of Political Economy, **108** (2000), No. 1, p.144–172.

[29] *Cochrane J. H., Saá-Requejo J.* Beyond arbitrage: good-deal asset price bounds in incomplete markets. Journal of Political Economy, **108** (2000), No. 1, p. 79–119.

ченными при использовании многомерного NA-подхода.

Помимо самого ценообразования другими важными вопросами являются вопросы определения верхних и нижних справедливых цен, суб- и суперхеджирующих стратегий и доказательства теорем об их нахождении, многомерные аналоги которых рассматриваются в главе 2.

Глава 3 посвящена многомерным аналогам широко распространенных мер риска. В работе [1] был введен первый пример одномерной когерентной меры риска (худшее условное математическое ожидание (WCE)). Эта мера риска является первым когерентным аналогом V@R. В работе [17] был введен хвостовой V@R (называемый еще средним V@R или ожидаемым убытком). Эта когерентная мера риска совпадает с WCE при выполнении некоторых простых условий. Важность хвостового V@R видна из результата С. Кусуоки [30], который доказал, что хвостовой V@R является наименьшей инвариантной по распределению когерентной мерой риска, доминирующей V@R.

Описывая портфель как вектор и используя многомерные меры риска, в диссертации рассматриваются различные многомерные аналоги V@R, хвостового V@R и более общей меры — взвешенного V@R.

Два многомерных аналога V@R (сильный и слабый V@R) были введены в работе [31], а также рассматривалась в работе [16]. Сильный V@R (соответственно, слабый V@R) считает безрисковыми портфели, которые не могут быть переведены с вероятностью меньше чем λ в нулевой портфель (соответственно, не могут быть получены из нулевого портфеля). Заметим, что приведенные выше многомерные аналоги совпадают с V@R в одномерном случае (на рынке только одна валюта). Следовательно, они не удовлетворяют свойству диверсификации, т. е. не являются многомерными когерентными мерами риска.

Многомерный аналог WCE был введен в работе [14]. Один из многомерных аналогов хвостового V@R был введен в работе [16] посредством множественно-значного математического ожидания и назван средним V@R.

[30] *Kusuoka S.* On law invariant coherent risk measures. Advances in Mathematical Economics, **3** (2001), p. 83–95.

[31] *Embrechts P., Puccetti G.* Bounds for functions of multivariate risk. Journal of Multivariate Analysis, **97** (2006), No. 2, p. 526–547.

Однако даже в одномерном случае хвостовой V@R имеет ряд недостатков[32]. Например, он зависит только от "хвоста" распределения. Чтобы устранить этот недостаток, С. Кусуокой в работе[30] был введен взвешенный V@R.

Одним из наиболее важных классов когерентных мер риска в одномерном случае является класс мер ρ, инвариантных по распределению, т. е. если $X \overset{\text{Law}}{=} Y$, то $\rho(X) = \rho(Y)$. В одномерном случае базовыми элементами этого класса являются хвостовой V@R и взвешенный V@R. Точное представление инвариантных по распределению когерентных мер риска было установлено С. Кусуокой[30] и обобщено на случай выпуклых мер риска в работе[33] и независимо в работе[34].

Глава 3 посвящена изучению свойств уже упомянутых мер, а также мер, вводимых в диссертации. Также мы рассматриваем свойства инвариантности по распределению и согласованности с пространством, определение которых для многомерного случая вводятся в настоящей диссертации.

Цель работы.

Целью настоящей работы является определение когерентных и выпуклых мер риска в многомерном случае, нахождение представления этих мер риска, а также их применение к решению задач распределения капитала и определения риск-вклада. Целью работы также является рассмотрение многомерного аналога условия NGD (No Good Deals, отсутствие "хороших сделок"), введение хвостового и взвешенного V@R, а также условий инвариантности по распределению и согласованности с пространством в многомерном случае.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Введена аксиоматизация многомерных когерентных (выпуклых) мер риска и показана их связь с одномерными когерентными (вы-

[32] *Cherny A. S.* Weighted V@R and its properties. Finance and Stochastics, **10** (2006), No. 2, p. 367–393.

[33] *Kunze M.* Verteiligungsinvariante konvexe Risikomaβe. Diplomarbeit. Humbolt Universität. Berlin, 2003.

[34] *Frittelli M., Rosazza Gianin E.* Dynamic convex risk measures. In G. Szegö (Ed.). Risk measures for the 21-st century. Wiley, 2001.

пуклыми) мерами риска. Доказана теорема о представлении многомерных когерентных (выпуклых) мер риска и введены понятия определяющего множества и штрафной функции в многомерном случае. Введено понятие экстремального элемента и рассмотрены его применения к решению некоторых задач финансовой математики: распределению капитала и определению риск-вклада в многомерном случае.

2. Дано определение условия NGD в многомерном случае, а также доказана теорема о нахождении NGD-справедливых цен. Применена техника NGD в случае динамической модели обменных курсов. Введены понятия верхних и нижних цен вдоль направления, доказана теорема об их нахождении и приведен пример нахождения справедливых обменных курсов в модели с двумя валютами.

3. Введено понятие многомерного хвостового и взвешенного V@R. Введены и рассмотрены свойства инвариантности по распределению и согласованности с пространством в многомерном случае. Проведена проверка выполнения этих свойств для различных многомерных обобщений хвостового V@R.

Методы исследования.

В доказательстве утверждений диссертации применены методы стохастического анализа: теория мартингалов, теория измеримого выбора и др., а также элементы функционального анализа: теоремы об отделимости, теория слабой топологии.

Теоретическая и практическая значимость.

Задачи диссертации относятся к финансовой математике. В то же время, полученные утверждения относятся и к области стохастического анализа.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны при изучении вопросов, связанных с определением риска портфеля на валютном рынке, сужением интервалов справедливых цен для платежных поручений на рынке валют в моделях непрерывного времени, а также в моделях с операционными издержками. Кроме того, результаты могут быть применены при решении вопросов оптимального распределения портфеля компании и определения риск-вклада отдела компании в случае мультивалютного рынка.

Апробация диссертации.

Результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах.

1. Научно-исследовательский семинар “Случайные процессы и стохастический анализ” кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ под руководством А. Н. Ширяева. МГУ, 2006–2008 гг. (неоднократно).

2. Большой Семинар кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ под руководством А. Н. Ширяева. МГУ, октябрь 2008 г.

3. Семинар ”Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании” ЦЭМИ РАН под руководством В. А. Аркина и Э. Л. Пресмана. г. Москва, ЦЭМИ РАН, декабрь 2008 г.

Также результаты докладывались на следующих конференциях.

1. XIV *Международная научная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых ”Ломоносов”.* Название доклада: ”Определение и теоремы представления многомерных когерентных и выпуклых мер риска.” МГУ, апрель 2007 г.

2. *Workshop and Mid-Term Conference on Advanced Mathematical Methods for Finance.* Название доклада: ”Multidimensional Coherent and Convex Risk Measures.” Австрия, г. Вена, сентябрь 2007 г.

3. *XV Всероссийская школа-коллоквиум по стохастическим методам.* Название доклада: ”Согласованность с пространством, инвариантность по распределению многомерных мер риска и многомерные аналоги хвостового V@R.” г. Волжский, октябрь 2008 г.

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в 2 работах, список которых приводится в конце автореферата. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы.

Диссертация состоит из введения и трех глав. Общий объем работы составляет 139 страниц. Список литературы включает 69 наименований. Собственные результаты автора и в тексте диссертации, и в автореферате называются "теоремами". Цитируемые утверждения называются "предложениями".

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Глава 1 посвящена введению многомерных когерентных и выпуклых мер риска.

Наш подход аналогичен подходу[14], однако, в отличие от этой работы, матрица обменных курсов считается случайной. Также рассматриваются и многомерные выпуклые меры риска. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — вероятностное пространство, $K : \Omega \to \mathcal{K}$ — измеримое отображение, где $\mathcal{K}$ — множество непустых замкнутых конусов C таких, что $C \neq \mathbb{R}^d, C + \mathbb{R}^d_- = C$. С финансовой точки зрения, K — конус обменных курсов в момент времени 1 для d различных валют (т. е. $K(\omega)$ — множество портфелей, которые мы можем получить в момент времени 1 из нулевого при элементарном исходе ω). Пусть $\mathcal{C}$ — множество непустых выпуклых замкнутых множеств на $\mathbb{R}^d$, векторы $X = (X^1, \dots, X^d) \in (L^\infty)^d$ имеют смысл портфелей в момент времени 1, т. е. X^i — количество единиц i-й валюты в портфеле в момент времени 1. Зададим частичное отношение порядка на множестве портфелей по формуле: $X \preceq Y$, если $X(\omega) - Y(\omega) \in K(\omega)$ для п.в. ω. Введем следующее определение.

Определение 1 (i) *Многомерная когерентная функция полезности* — функция $u : (L^\infty)^d \to \mathcal{C} \setminus \{\mathbb{R}^d\}$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

(a) (диверсификация) $u(X+Y) \supseteq u(X) + u(Y)$;

(b) (отношение частичного порядка) если $X \preceq Y$, то $u(X) \subseteq u(Y)$;

(c) (положительная однородность) $u(\lambda X) = \lambda u(X) \, \forall \lambda > 0$;

(d) (инвариантность относительно сдвига) $u(X+m) = u(X) + m$ для любого $m \in \mathbb{R}^d$;

(e) (свойство Фату) если $\|X_n\| \leq c$ и $X_n \xrightarrow{\mathsf{P}} X$, то $u(X) \supseteq \overline{\lim}_n u(X_n)$, т. е. если x принадлежит бесконечно многим $u(X_n)$, то x принадлежит $u(X)$.

(ii) *Многомерная вогнутая функция полезности* — функция $u : (L^\infty)^d \to \mathcal{C} \setminus \{\mathbb{R}^d\}$, удовлетворяющая аксиомам (b), (d), (e) и аксиоме

(a$'$) (вогнутость) $u(\alpha X + (1-\alpha)Y) \supseteq \alpha u(X) + (1-\alpha)u(Y)$ для любого $\alpha \in [0,1]$.

С финансовой точки зрения, $u(X)$ — множество неслучайных портфелей, которые "не лучше" портфеля X. Соответствующая *многомерная когерентная* (соответственно, *выпуклая*) *мера риска* определяется как $\rho(X) = -u(X)$. С финансовой точки зрения, $\rho(X)$ — множество неслучайных портфелей $x \in \mathbb{R}^d$, которые делают позицию $X + x$ безрисковой.

Очевидно, что если u — одномерная когерентная (соответственно, вогнутая) функция полезности, то отображение $v(X) = (-\infty, u(X)]$ будет многомерной когерентной (соответственно, вогнутой) функцией полезности в смысле определения 1 с $d = 1$ и $K(\omega) = \mathbb{R}_-$. Обратно, если $d = 1$, $K(\omega) = \mathbb{R}_-$ и u — когерентная (соответственно, вогнутая) функция полезности в смысле определения 1, то функция $v(X) = \sup\{x \in \mathbb{R} : x \in u(X)\}$ является одномерной когерентной (соответственно, вогнутой) функцией полезности. Таким образом, данное выше определение является многомерным обобщением одномерного.

В главе 1 доказаны теоремы о представлении для многомерных когерентных и вогнутых функций полезности.

Теорема 2 ***(i)*** *Функция $u : (L^\infty)^d \to \mathcal{C}$ является многомерной когерентной функцией полезности тогда и только тогда, когда существует непустое множество $\mathcal{D} \subseteq (L^1)^d$ такое, что для любого*

$Z \in \mathcal{D}$ выполнено свойство $Z(\omega) \in K^*(\omega)$ P-п.н. и

$$u(X) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \forall Z \in \mathcal{D} \ \sum_{i=1}^d \mathsf{E} x^i Z^i \le \sum_{i=1}^d \mathsf{E} X^i Z^i \right\}, \qquad (1)$$

где $K^*(\omega)$ — отрицательная поляра к конусу $K(\omega)$, т. е. $K^*(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^d : \forall z \in K(\omega) \ \langle x, z \rangle \le 0\}$.

***(ii)** Функция $u : (L^\infty)^d \to \mathcal{C}$ является многомерной вогнутой функцией полезности тогда и только тогда, когда существуют непустое множество $\mathcal{D} \subseteq (L^1)^d$ такое, что для любого $Z \in \mathcal{D}$ выполнено свойство $Z(\omega) \in K^*(\omega)$ P-п.н., и функция $\alpha : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ такие, что*

$$u(X) = \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \forall Z \in \mathcal{D} \ \sum_{i=1}^d \mathsf{E} x^i Z^i \le \sum_{i=1}^d \mathsf{E} X^i Z^i + \alpha(Z) \right\}. \qquad (2)$$

Поскольку во многих моделях, рассматриваемых в финансовой математике, активы не являются ограниченными случайными векторами, то следует расширить класс случайных векторов, для которых применима теория когерентных и выпуклых мер риска. А именно, используя представления (1) и (2), аналогично работе [2] можно продолжить многомерные когерентные и вогнутые функции полезности на $(L^0)^d$.

Видно, что множество $\mathcal{D}$ из представления (1) не единственно. Однако существует наибольшее множество

$$\left\{ Z \in (L^1)^d : \sum_{i=1}^d \mathsf{E} x^i Z^i \le \sum_{i=1}^d \mathsf{E} X^i Z^i \text{ для любых } X \in (L^0)^d, x \in u(X) \right\}.$$

Также видно, что штрафная функция α из представления (2) не единственна. Однако существует наименьшая из них

$$\alpha(Z) = \sup_{X \in A_u} \sum_{i=1}^d \mathsf{E}(-X^i Z^i),$$

где $A_u = \{X \in (L^\infty)^d : u(X) \ni 0\}$.

Определение 3 (i) Назовем наибольшее множество, для которого выполнено (1), *определяющим множеством* для когерентной функции полезности u.

(ii) Назовем минимальную функцию, для которой выполнено (2), *минимальной штрафной функцией* для вогнутой функции полезности u.

`Важное замечание.` Пусть $\mathcal{D}$ – $(L^1)^d$-замкнутый выпуклый конус. Определим многомерную когерентную функцию полезности по формуле (1). Тогда $\mathcal{D}$ будет определяющим множеством для u. Таким образом, если мы вводим многомерную когерентную функцию полезности посредством множества $\mathcal{D}$, являющегося $(L^1)^d$-замкнутым выпуклым конусом, то мы знаем определяющее множество этой многомерной когерентной функции полезности.

Далее рассматривается применение мер риска к задачам финансовой математики. При этом когерентные меры риска оказываются более удобными, чем выпуклые, поэтому будем иметь дело с многомерными когерентными функциями полезности, определенными на $(L^0)^d$.

Для решения некоторых задач с помощью многомерных когерентных функций полезности введем понятие экстремального элемента, которое в одномерном случае было рассмотрено в работе [2].

Определение 4 Пусть u — многомерная когерентная функция полезности с определяющим множеством $\mathcal{D}$. Пусть $X \in (L^0)^d, x \in \partial u(X)$, где $\partial u(X)$ — граница множества $u(X)$. Назовем ненулевой случайный вектор $Z \in \mathcal{D}$ *экстремальным элементом* для X в точке x для когерентной функции полезности u, если

$$\sum_{i=1}^{d} \mathsf{E} Z^i x^i = \sum_{i=1}^{d} \mathsf{E} Z^i X^i.$$

Множество всех экстремальных элементов для X в точке x обозначим через $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}(X, x)$.

Для следующей теоремы нам понадобится еще одно определение.

Определение 5 Пусть u — многомерная когерентная функция полезности на $(L^0)^d$, $\mathcal{D}$ — ее определяющее множество. Положим

$$\mathcal{L} = \left\{ Z \in (L^1)^d : \mathsf{E} \sum_{i=1}^{d} Z^i = 1 \right\}.$$

Тогда *сильное* L^1*-пространство*, ассоциированное с u, задается следующим образом:

$$L^1_s(\mathcal{D}) = \left\{ X \in (L^0)^d : \lim_{n\to\infty} \sup_{Z\in\mathcal{D}\cap\mathcal{L}} \sum_{i=1}^{d} \mathsf{E}|Z^i X^i| I\left\{ \sum_{j=1}^{d} |X^j| > n \right\} = 0 \right\}.$$

В диссертации доказана следующая теорема.

Теорема 6 *Если* $\mathcal{D}\cap\mathcal{L}$ *слабо компактно,* $X \in L^1_s(\mathcal{D})$ *и* $x \in \partial u(X)$, *то* $\mathcal{X}_{\mathcal{D}}(X, x) \neq \varnothing$.

Рассмотрим задачу распределения капитала в многомерном случае. Пусть $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ является слабо компактным, $X_1, \dots, X_n \in L^1_s(\mathcal{D})$, соответствующая многомерная когерентная функция полезности $u = -\rho$. С финансовой точки зрения, X_i — прибыль i-го отдела фирмы за единичный период времени, выраженная портфелем валют. Обозначим через A° внутренность множества A. Приводимое ниже определение является многомерным обобщением определения из работы[18].

Определение 7 Назовем $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^d$ *распределением полезности между* $X_1, \dots, X_n$, *если*

(i) $\sum_{i=1}^n x_i \in u(\sum_{i=1}^n X_i)$;

(ii) для любых $h_1, \dots h_n \geq 0$ верно, что $\sum_{i=1}^n h_i x_i \notin u^\circ(\sum_{i=1}^n h_i X_i)$.

С финансовой точки зрения, x_i — вклад i-го отдела фирмы в полезность суммарного капитала фирмы. С точки зрения риска, $-x_i$ — вклад i-го отдела фирмы в общий риск фирмы, или, другими словами, капитал, который должен быть выделен i-й компоненте фирмы. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 8 ***(i)*** *Пусть* $x_0 \in \partial u(\sum_{i=1}^n X_i)$. *Пусть* z_0 *— внешняя нормаль к множеству* $u(\sum_{i=1}^n X_i)$ *в точке* x_0. *Тогда существует набор* $(x_1, \dots, x_n)$ *такой, что выполнены следующие два условия:*

(a) $\sum_{i=1}^n x_i = x_0$;

(b) существует $Z \in \mathcal{X}_{\mathcal{D}}(\sum_{i=1}^n X_i, x_0)$ *такой, что*

$$\begin{gathered} \mathsf{E}\sum_{i=1}^{d} x_k^i Z^i = \mathsf{E}\sum_{i=1}^{d} X_k^i Z^i, k = 1, \dots, n, \\ \mathsf{E}Z = z_0. \end{gathered} \tag{3}$$

Любой набор такого вида является распределением полезности между $X_1, \dots, X_n$ *.*

(ii) *Все решения задачи о распределении полезности между* $X_1, \dots,$ X_n *представляются в вышеуказанном виде (с некоторыми* x_0, z_0 *).*

Помимо вероятностного решения в диссертации также дано геометрическое решение задачи распределения полезности (см. теорему 1.19).

Также в диссертации рассмотрена проблема определения риск-вклада в многомерном случае с помощью когерентных мер риска. Полученные результаты являются многомерными аналогами одномерных результатов из работы [2]. В виду громоздкости формулировок мы не цитируем этот результат в автореферате — см. определение 1.23 и теорему 1.24 диссертации.

Глава 2 посвящена рассмотрению условия NGD и введению множества справедливых цен для платежных поручений в многомерном случае.

Пусть $\mathcal{D}$ — определяющее множество многомерной когерентной функции полезности u такое, что $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ — слабо компактно. Пусть A — выпуклое замкнутое подмножество в $(L^0)^d$. С финансовой точки зрения, A — множество дисконтированных прибылей, которые могут быть получены в данной модели с помощью различных стратегий, выраженных случайным портфелем валют. Это множество будет называться *множеством достижимых прибылей.* Введем понятие риск-нейтрального вектора.

Определение 9 Назовем *риск-нейтральным вектором* ненулевой вектор $Z \in (L^1_+)^d$ такой, что $\mathsf{E}\sum_{i=1}^d Z^i X^i \leqslant 0$ для любого $X \in A$.

Множество риск-нейтральных векторов будем обозначать через R или $\mathrm{R}(A)$, если это важно подчеркнуть.

Теперь введем понятие $\mathcal{D}$-согласованности.

Определение 10 Будем говорить, что A *является* $\mathcal{D}$*-согласованным,* если существует множество $A' \subseteq A \cap L^1_s(\mathcal{D})$ такое, что $\mathcal{D} \cap \mathrm{R} = \mathcal{D} \cap \mathrm{R}(A')$.

Предположим, что множество достижимых прибылей A является $\mathcal{D}$-согласованным. Как показано в диссертации, это предположение автоматически выполняется для естественных моделей.

Теперь введем условие *отсутствия "хороших сделок" (NGD, No Good Deals (NGD)).*

Определение 11 Модель удовлетворяет *условию NGD (No Good Deals)*, если не существует $X \in A$ такого, что $u(X) \cap (\mathbb{R}^d_+ \setminus \{0\}) \neq \varnothing$.

Тогда выполнена следующая теорема.

Теорема 12 *Модель удовлетворяет условию NGD тогда и только тогда, когда* $\mathcal{D} \cap \mathrm{R} \neq \varnothing$.

Данные выше определение и теорема являются многомерными аналогами результатов, полученных А. С. Черным [2]. В случае $d = 1$ они совпадают.

Перейдем к понятию справедливой цены для платежных поручений. Пусть $F \in (L^0)^d$ — дисконтированная прибыль платежного поручения, выраженная d-мерным портфелем валют.

Определение 13 *NGD-справедливой ценой* для платежного поручения F назовем вектор $x \in \mathbb{R}^d$ такой, что расширенная модель $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P}, \mathcal{D}, A + \{h(F - x) : h \in \mathbb{R}\})$ удовлетворяет условию NGD.

Множество NGD-справедливых цен для платежного поручения F обозначим через $I_{NGD}(F)$.

Из теоремы 12 получается следующий результат.

Следствие 14 *Для* $F \in L^1_s(\mathcal{D})$

$$I_{NGD}(F) = \{x : \mathsf{E}\langle Z, x\rangle = \mathsf{E}\langle Z, F\rangle \text{ для некоторого } Z \in \mathcal{D} \cap \mathrm{R}\}.$$

В диссертации приведен пример применения техники NGD к динамической модели обменных курсов. Рассмотренный подход во многом аналогичен работам [12,13,25,26,27], однако полученные нами результаты применимы не только в случае дискретного, но и в случае непрерывного времени. Множества справедливых цен оказываются меньше, при этом не требуется накладывать никакие технические условия на множество стратегий A, как это было в указанных работах.

Также в диссертации введены понятия верхних и нижних цен, суб- и суперхеджирующих стратегий вдоль направления (определение 2.19 диссертации), доказаны теоремы об их нахождении (теоремы 2.20, 2.21, 2.27, 2.29), а также приведены примеры для их нахождения в некоторых моделях.

Глава 3 посвящена различным примерам многомерных когерентных мер риска: аналогов V@R, хвостового V@R, взвешенного V@R.

Ранее в работах, где предлагались разные примеры многомерных мер риска, конус был неслучайным. Поэтому мы сначала рассматриваем обобщения на этот случай, а затем исследуем возможности определения меры и для случайного конуса. Оказывается, что естественные обобщения на случайный конус в некоторых случаях не всегда возможны, а в некоторых — можно предложить несколько обобщений.

В диссертации вводится весьма естественный многомерный аналог V@R — гиперполуплоскостной V@R ($V@R^{HD}$). Отметим, что это понятие можно ввести, основываясь на областях скопления меры (в частности, на монотонных гиперполуплоскостях скопления меры), рассмотренных в работе[15]. Также $V@R^{HD}$ может быть построен двумя путями (сильный и слабый $V@R^{HD}$), когда конус обменных курсов случаен.

Класс многомерных когерентных мер риска является весьма широким. Чтобы его сузить, введем важное свойство *"согласованности с пространством"* (определение 3.23). Оно означает, что результат многомерной когерентной меры риска не меняется при изменении базовой единицы вдоль каждой из осей координат (к примеру, если мы берем копейки вместо рублей в качестве базовой единицы). Оказывается, что не все рассматриваемые меры риска удовлетворяют этому свойству. В диссертации приводятся необходимые и достаточные условия согласованности с пространством для многомерных когерентных мер риска (лемма 3.24 и теорема 3.28).

Другим важным свойством многомерных мер риска является свойство инвариантности по распределению.

Определение 15 Многомерная когерентная функция полезности u

на $(L^0)^d$ является *инвариантной по распределению*, если для всех X, Y таких, что $(X, K) \overset{\text{Law}}{=} (Y, K)$, верно, что

$$u(X) = u(Y).$$

Отметим, что если конус обменных курсов K является случайным, то важно, что не только $X \overset{\text{Law}}{=} Y$, но и $(X, K) \overset{\text{Law}}{=} (Y, K)$.

Приводятся некоторые необходимые и достаточные условия инвариантности по распределению для многомерных когерентных мер риска.

Опишем полученные результаты для некоторых многомерных мер риска: WCE, хвостовой V@R, средний V@R.

В главе 3 показано, что WCE не является инвариантной по распределению мерой даже в одномерном случае, но она согласована с пространством. Рассмотрены условия, при которых она становится инвариантной по распределению, а также введен ее инвариантный по распределению аналог (инвариантное по распределению худшее условное математическое ожидание (LIWCE)). В диссертации показано, что LIWCE совпадает с многомерной когерентной мерой риска, основанной на областях скопления меры (в частности, на зонных областях скопления меры), введенной в работе [15] (см. также работу [35]). Приведены примеры, когда в естественных ситуациях WCE и LIWCE дают неудовлетворительный результат с финансовой точки зрения. Для случайного конуса обменных курсов эти меры могут быть построены двумя путями (сильное и слабое WCE и LIWCE).

Также показано, что средний V@R является инвариантным по распределению, но не является согласованным с пространством. Очень часто эта мера может быть обобщена на случай недетерминированного конуса.

Другой многомерный аналог хвостового V@R введен в главе 1 для случайного конуса обменных курсов и также назван хвостовым V@R. Эта мера риска инвариантна по распределению и согласована с пространством.

Свойства многомерных аналогов V@R и хвостового V@R приведены в таблице 1.

[35] *Koshevoy G. A., Mosler K.* Zonoid trimming for multivariate distributions. Annals of Statistics, **25** (1997), p. 1998–2017.

Меры / Свойства	Слабый V@R	Сильный V@R	$V@R^{HD}$	WCE	LIWCE	Средний V@R	Хвостовой V@R
Когерентность	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
"Финансовый смысл"	$\pm$	$+$	$\pm$	$\mp$	$\mp$	$+$	$+$
Случайный конус	$+$	$+$	$\mp$	$\mp$	$\mp$	$\pm$	$+$
Инвариантность по распределению	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$	$+$
Согласованность с пространством	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$+$

Таблица 1. Многомерные аналоги V@R и хвостового V@R и свойства, которыми они обладают.

Суммируя все выше перечисленное, можно сделать вывод, что лучшим кандидатом для многомерного аналога хвостового V@R является хвостовой V@R, введенный в диссертации.

В диссертации также вводятся многомерные аналоги другой важной одномерной когерентной меры риска — взвешенного V@R. Эти аналоги можно построить, основываясь на хвостовом V@R, на среднем V@R или на LIWCE.

Работа выполнена под руководством член-корреспондента РАН, профессора А. Н. Ширяева и д.ф.-м.н. А. С. Черного, помощь в организации изложения была оказана к.ф.-м.н. А. В. Селивановым, которым автор выражает глубокую благодарность.

Список работ автора по теме диссертации

[1] *Куликов А. В.* Многомерные когерентные и выпуклые меры риска. Теория вероятностей и ее применения, **52** (2007), в. 4, с. 685–710.

[2] *Куликов А. В.* Ценообразование с использованием многомерных когерентных мер риска. Обозрение прикладной и промышленной математики, **15** (2008), в. 2, с. 211–228.