

Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.98

Дорофеев Максим Александрович

О СВОЙСТВАХ ПРЕДЕЛЬНЫХ МНОЖЕСТВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

специальность 01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа
Механико-математического факультета Московского государственного
университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Валериан Иванович Гаврилов

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Владимир Николаевич Сорокин
(МГУ имени М. В. Ломоносова)
кандидат физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Алексей Владимирович Субботин
(ОАО РКК "Энергия")

Ведущая организация: Московский технический
университет связи и информатики

Защита диссертации состоится 27 марта 2009 г. в 16 час. 40 мин.
на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском
государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу:
Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1,
МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16 - 24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-
математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное
здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 27 февраля 2009 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор

И. Н. Сергеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Теория предельных множеств, к которой принадлежит настоящая диссертация, оформилась как самостоятельная область комплексного анализа на рубеже 19-го и 20-го веков и плодотворно и активно развивается по настоящее время. Определяющий вклад в теорию был внесен отечественными математиками и математиками Московского университета. Итоги достижений в теории и ее приложениях в определенные этапы ее развития подведены в широко известных в нашей стране и за рубежом монографиях И.И. Привалова¹, К. Носиро², Э. Коллингвуда и А. Ловатера³, А. Ловатера⁴.

С самого момента своего создания теория предельных множеств впитывает в себя идеи и методы из многих параллельно развивающихся областей комплексного анализа (например, теории распределения значений аналитических функций) и других математических дисциплин (теории функций действительного переменного, функционального анализа, геометрии и топологии), принося, со своей стороны, в них плодотворные приложения и получая дальнейшее развитие (см., например, С.М. Никольский⁵).

На первых этапах развития теории (до середины 20-го века), когда были получены теперь уже классические ее основополагающие результаты, основной интерес был сосредоточен на изучении граничного поведения функций вдоль путей и ограниченных ими областей, подходящих к границе некасательным образом; это же требовалось для приложений теории.

При этом одним из вопросов, представляющим интерес было изучение множества особых точек функции, т.е. таких точек, для которых найдутся хотя бы два несовпадающих предельных множества по различным областям подхода. В частности, было установлено, что множества особых точек не только имеют лебегову меру нуль, но

¹Привалов И. И. *Граничные свойства аналитических функций*. М.-Л., 1950.

²Носиро К. *Предельные множества*. М.: ИЛ, 1963, 252 с.

³Коллингвуд Е. Ф., Ловатер А. Дж. *Введение в теорию предельных множеств*: М. Мир, 1970.

⁴Ловатер А. *Граничное поведение аналитических функций*. Итоги науки и техники. Математический анализ.- ВИНТИ, 1973, т.10, с. 90-259.

⁵Никольский С.М. *Граничные свойства функций, определенных на области с угловыми точками*: Мат. сб., 1956, т. 40 (82), с. 303-318.

и являются собственными подмножествами множества меры нуль. Для характеристики множества особых точек Е.П. Долженко⁶ были введены понятия пористого и σ —пористого множества, а еще более тонкой характеристикой этого множества явилось понятие совершенного σ —пористого множества, введенное С.В. Колесниковым⁷. Им было дано полное дескриптивное описание угловых особых множеств на плоскости. Для случая пространственных отображений этот результат был обобщен Ю.А. Шевченко⁸.

Начиная с третьей четверти 20-го века, отчасти в связи с открывающимися возможностями приложений теории к алгебраическим проблемам (анализ структур предельных множеств дискретных групп и другим), значительно возрос интерес к изучению граничного поведения функций при касательном подходе к границе.

Строение предельных множеств функций по криволинейным углам и путям изучалось в работах В.И. Гаврилова и др.⁹, М.М. Мирзояна¹⁰, Д.К. Ранга¹¹, в этом же направлении получены результаты в работе А. Хассана¹².

Дальнейшему развитию данного направления в теории предельных множеств посвящена настоящая диссертация.

Автором также рассматриваются приложения полученных результатов для предельных множеств дискретных групп, а именно, фуксовых групп.

При изучении эргодических свойств действия фуксовой группы на границе оказалось, что описание таких свойств удобно производить в терминах различного рода подмножеств предельного множества

⁶Долженко Е. П. *Граничные свойства произвольных функций*: Известия АН СССР, сер. матем., 1967, т. 31, № 1, с. 3-14.

⁷Колесников С.В. *Об особых граничных точках аналитических функций*: Математические заметки, 1980, т. 28, № 6, с. 809-819.

⁸Шевченко Ю.А. *О граничном поведении произвольных функций, определенных в полупространстве*: Математические заметки, 1989, т. 46, вып. 5, с. 80-88.

⁹Гаврилов В. И., Канатников А. Н., Кравцев С. В., Симусев А. А. *Теоремы о максимальной для пространственных отображений и некоторые приложения*: ДАН СССР, 1986, т. 289, № 4, с. 780-784.

¹⁰Мирзоян М. М. *О теоремах максимальной для произвольных и мероморфных функций по касательным направлениям*: ДАН Арм. ССР, 1978, т. 66, № 4, с. 200-204.

¹¹Rung D. C. *Meier type theorems for general boundary approach and σ -porous exceptional sets*: Pacif. J. Math., 1978, v. 76, № 1, pp. 201-213.

¹²Хассан Абду Аль-Рахман *О предельных множествах вдоль произвольных граничных путей*: ДАН СССР, 1981, т. 260, № 4, с. 777-780.

рассматриваемой группы. В этом направлении автором уточнен результат С.В. Кравцева¹³, характеризующий множество точек Гарнетт фуксовой группы и получена характеристика множества точек Гарнетт фуксовых групп в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Цель работы

Целью работы является изучение видов особых точек на границе плоских и пространственных областей, порождаемых предельными множествами функций и отображений в топологические пространства при различных типах касательных подходов к границе, и в приложении новых результатов к теории дискретных групп.

Методы исследования

В работе используются методы математического анализа и теории функций комплексного переменного.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Доказана характеристика множества особых точек на границе плоских и пространственных областей, порождаемых предельными множествами отображений в топологические пространства вдоль обобщенных углов и обобщенных круговых областей, определяемых стандартным видом касательного подхода к границе. Установлена ее неулучшаемость в классе ограниченных непрерывных функций нескольких действительных переменных.

2. Даются некоторые характеристики множества всех особых точек в случае других функций подхода.

3. Рассмотрены приложения полученных результатов для предельных множеств дискретных групп; в частности, уточнена структура широко известного множества точек Гарнетт фуксовых групп на плоскости.

¹³Кравцев С. В. *Метрические и категорные свойства подмножеств предельного множества фуксовой группы*: Успехи матем. наук, 1984, т.39, вып. 6, с. 197-198.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы специалистами в области математического анализа и теории функций комплексного переменного.

Апробация диссертации

Результаты диссертации докладывались

1. на научно-исследовательском семинаре "Предельные множества" под руководством д.ф.-м.н., профессора В.И. Гаврилова в МГУ, неоднократно, 1994-2009 гг.;
2. на межкафедральном семинаре МГИЭМ под руководством д.ф.-м.н., профессора В.Л. Попова, Москва, неоднократно, 1999-2009 гг.;
3. на международной конференции "Вопросы функционального анализа и математической физики", Баку, 1999 г.;
4. на международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения", Ростов-на-Дону, 1999 г.;
5. на 16-ой международной конференции "Математика. Компьютер. Образование", г. Пущино, январь, 2009 г.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в четырех работах, список которых приведен в конце автореферата ([1] - [4]).

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы. Текст диссертации изложен на 78 страницах. Список литературы содержит 56 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Введение. Во введении дана краткая историческая справка и сформулированы ключевые результаты, полученные автором.

Глава 1. В первой главе "Характеристика множества особых граничных точек произвольной функции" автором рассматривается произвольный, в том числе и касательный, подход к граничным точкам по различным семействам криволинейных углов. Изучаются также

произвольные отображения $\mathbb{R}_+^n$ в регулярное локально компактное пространство со счетной базой. Рассматриваются также свойства совершенных σ -пористых множеств, связанные со свойствами множества особых точек пространственных отображений.

В параграфе 1 приведены некоторые необходимые определения и вспомогательные результаты.

В параграфе 2 рассматривается случай комплекснозначной функции f , определенной в $\mathbb{C}_+$. Изучается касательный подход по криволинейным углам, определяемым окружностями. Доказано, что в этом случае множество особых точек функции f является σ -пористым и является подмножеством совершенного σ -пористого множества. Тот же результат справедлив и в случае аналитической функции.

В параграфе 3 рассматриваются произвольные отображения $\mathbb{R}_+^3$ в локально компактное хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой. Предельные множества рассматриваются по областям U , являющимися внутренностью эллипсоида и областям V , являющимися криволинейными углами, образованными двумя эллипсоидами. Показано, что множество всех UV -особых точек является совершенным σ -пористым, т.е. доказана следующая

Теорема 1.3.6. Для произвольной функции $f: \mathbb{R}_+^3 \rightarrow \mathbb{P}$ множество $E(f)$, является совершенным σ -пористым.

Также верна обратная

Теорема 1.3.11. Пусть множество $E \subset \partial\mathbb{R}_+^3$ является совершенным σ -пористым. Тогда существует неотрицательная, ограниченная и непрерывная в $\mathbb{R}_+^3$ функция g , для которой $E_{UV}(g) = E$.

Данную теорему можно обобщить на произвольное локально компактное метрическое пространство со счетной базой, содержащее хотя бы одно множество, гомеоморфное отрезку.

Теорема 1.3.12. Для того, чтобы множество $E \subset \partial\mathbb{R}_+^3$ было UV -особым множеством некоторого отображения (а также UV -особым множеством некоторого непрерывного, ограниченного отображения) F положительного полупространства $\mathbb{R}_+^3$ в произвольное локально компактное метрическое пространство со счетной базой, содержащее хотя бы одно множество, гомеоморфное отрезку, необходимо и достаточно, чтобы это множество E являлось совершенным σ -пористым.

Полученные в этом параграфе результаты обобщают результаты теорем Ю.А. Шевченко в пространстве $\mathbb{R}_+^3$ на случай, когда области подхода функции касаются границы.

В четвертом параграфе диссертации изучаются произвольные функции подхода и предельные множества по различным задаваемым ими семействам.

Опишем эти семейства функций подхода. Пусть $s = h(t)$ определена, непрерывна и строго возрастает на отрезке $[0, 1]$, причем $s = h(t) < t$ при $0 < t < 1$, а также $h(0) = 0$, $h(1) = 1$. Такая функция называется функцией подхода. Для построения областей рассматривается обратная функция $t = \mu(s)$. Используемые в работе семейства функций получают преобразованиями сжатия функции $\mu(s)$ относительно координатных осей. Полученные три семейства получают с помощью трех типов сжатия. А именно, сжатие относительно оси t с параметром a , т.е. $\mu_1(a, s) = a\mu(s)$, сжатие относительно оси s с параметром a , т.е. $\mu_2(a, s) = \mu(as)$ и сжатие относительно обеих осей с взаимнообратными параметрами, $\mu_3(a, s) = a\mu(s/a)$. Параметры предполагаются рациональными и положительными.

В пространстве $\mathbb{R}_+^n$ рассматриваются круговые и угловые области, т.е. такие, проекции которых на $\partial\mathbb{R}_+^n$ лежат в соответствующем $(n - 1)$ -мерном шаре. А именно, для заданной функции подхода рассматриваются следующие области:

$$\begin{aligned} A_i &= A_i(\xi, \zeta, \mu_i, a, b) = \{(x^0; x^n) \in \mathbb{R}^n \mid \\ &\mid x^0 \in B^{n-1}\left(\bar{x}^0; \mu_i\left(\frac{b-a}{2}, x^n\right)\right); (\bar{x}^0; x^n) \in L_i\left(\xi, \zeta, \frac{a+b}{2}\right)\}, \\ V_i &= V_i(\xi, \mu_i, a, b) = \{(x^0; x^n) \in \mathbb{R}^n \mid \mu_i(a, x^n) < |x^0 - \xi| < \mu_i(b, x^n)\}, \\ Q_i &= Q_i(\xi, \mu_i, a) = \{(x^0; x^n) \in \mathbb{R}^n \mid |x^0 - \xi| < \mu_i(a, x^n)\}, \end{aligned}$$

где $i = 1, 2, 3$ и $0 < a < b$.

Для каждой из этих областей и произвольной точки $\xi \in \partial\mathbb{R}_+^n$, предельной, для данного множества, можно рассмотреть предельные множества $C(f, \xi, S)$, и множества особых точек $E_{ST} = E_{ST}(f)$, где S, T — области вида A_i, V_i, Q_i .

Доказана следующая

Теорема 1.4.6. Для любой функции подхода h и любого отображения $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow P$, где P — регулярное локально компактное топологическое пространство со счетной базой, множества $E_{A_1A_1}$, $E_{A_1Q_1}$, $E_{A_1V_1}$, $E_{Q_1V_1}$, $E_{Q_1Q_1}$, $E_{V_1V_1}$ являются совершенными σ —пористыми.

В качестве следствия теоремы 1.4.6 получен следующий результат

Следствие 1.4.13. Если функция подхода $h(t)$ имеет в точке 0 первый порядок касания с осью t , то множество особых точек отображения $f: \mathbb{R}_+^n \rightarrow Y$, где Y — регулярное локально компактное топологическое пространство со счетной базой, относительно семейств Q_iQ_i , Q_iV_i , V_iV_i , A_iA_i , A_iQ_i , A_iV_i при $i = 1, 2, 3$ является совершенным σ —пористым.

Еще одним следствием теоремы 1.4.6 является следующая теорема, которая обобщает результат С.В. Колесникова и дополняет, тем самым, результат параграфа 2.

Теорема 1.4.14. Для функции $f: \mathbb{C}_+ \rightarrow \mathbb{C}$ множество особых точек в случае подхода по криволинейным углам, образованным окружностями является совершенным σ —пористым.

Далее автором показано, что в случае ограниченных и непрерывных функций в $\mathbb{R}_+^n$ данная характеристика является неулучшаемой.

Теорема 1.4.15. Пусть множество $E \subset \partial\mathbb{R}_+^n$ является совершенным σ —пористым. Тогда существует неотрицательная, ограниченная и непрерывная в $\mathbb{R}_+^n$ функция g , для которой $E_{Q_1Q_1} = E_{Q_1V_1} = E_{Q_1A_1} = E_{A_1V_1} = E_{V_1V_1} = E_{A_1A_1} = E$.

Глава 2. Во второй главе "Характеристика множества точек Гарнетт" рассматриваются приложения результатов к изучению предельных множеств дискретных групп, в частности, предельных множеств фуксовых групп. Уточняется структура широко известного множества точек Гарнетт фуксовых групп на плоскости, а именно, доказано, что множество точек Гарнетт произвольной фуксовой группы на плоскости является совершенным σ —пористым. Этот результат обобщается на случай фуксовых групп в $\mathbb{R}_+^n$, т.е. когда фуксова группа является подгруппой мебиусовых преобразований.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя профессора Валериана Ивановича Гаврилова за постановку задачи, постоянное внимание к работе и поддержку, а также сотрудников кафедры математического анализа.

Список литературы

- [1] Дорофеев М. А. *Характеристика множества особых граничных точек произвольной функции для случая касательного подхода*. Доклады РАН, 2009, т. 424, № 6, с. 732-733 (журнал входит в перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени доктора и кандидата наук).
- [2] Дорофеев М. А. *Об особых граничных точках функций*. Материалы международной конференции "Вопросы функционального анализа и математической физики", Баку, изд. "Чашыоглы", 1999, с. 260-268.
- [3] Дорофеев М. А. *Характеристика множества точек Гарнет фуксовой группы, действующей на полуплоскости*. Международный симпозиум "Ряды Фурье и их приложения", тезисы докладов, Ростов-на-Дону, 1999, с. 58-59.
- [4] Дорофеев М. А. *О некоторых множествах особых граничных точек функции в пространстве*. Тезисы международной конференции "Математика. Компьютер. Образование", Пущино, вып. 16, изд-во "Регулярная и хаотическая динамика", Москва-Ижевск, 2009, с. 22.