

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
Кафедра теории пластичности

На правах рукописи
УДК 539.3

Саламатова Виктория Юрьевна

КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НАКЛАДОК С УПРУГИМИ
ТЕЛАМИ, НАГРУЖЕННЫМИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Специальность 01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена на кафедре теории пластичности механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор
Александров Виктор Михайлович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Георгиевский Дмитрий Владимирович

доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Солдатенков Иван Алексеевич

Ведущая организация: Московский авиационный институт
(государственный технический университет)

Защита состоится «10» апреля 2009 г. в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.91 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 1610.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан «__» марта 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.91,
профессор

С.В. Шешенин

I. Общая характеристика работы

АКТУАЛЬНОСТЬ ТЕМЫ

В механике деформируемого твердого тела центральное место занимают задачи контактных взаимодействий. Это обусловлено тем, что контакт является одним из основных способов приложения нагрузки к деформируемому телу. Величина контактных давлений очень важна для определения напряжений и перемещений. Развиваемые в теории контактных задач методы позволяют найти распределение давлений в местах контакта, и, таким образом, ответить на многие важные вопросы об участках концентрации напряжений, износостойкости и других факторах контактной прочности и жесткости.

В современной технике самое широкое применение нашли композиционные материалы, а также различные конструкции, усиленные или армированные тонкостенными элементами. Это привело к постановке контактных задач и поиску их решений для тел с тонкими покрытиями и прослойками. Данный класс задач является большой областью исследования теории контактных и смешанных задач механики деформируемого твердого тела и непосредственно связан с важными вопросами инженерной практики. К контактным задачам для тел с тонкими покрытиями и прослойками относят как задачи о контакте тел, армированных тонкими покрытиями или прослойками, так и задачи о взаимодействии стрингеров (тонкостенные элементы типа накладок) и включений различных геометрических форм с массивными деформируемыми телами. Стрингеры и включения, также как разрезы и штампы, являются концентраторами напряжений, поэтому нахождение распределения напряжений в таких задачах имеет большое теоретическое и практическое значение.

Важно отметить, что немалую роль при исследовании контактных задач с тонкими покрытиями и прослойками играет учет тонкостенности элементов. Первые исследования о передаче нагрузки от тонкостенных элементов, лишенных изгибной жесткости, к массивным телам были представлены в работах Э. Мелана (1890–1963), Э. Рейсснера (1913–1996) и В. Т. Койтера (1914–1997). На протяжении последних лет изучению задач о равновесии упругих тел, содержащих абсолютно гибкие накладки, посвящено немало работ (основные результаты исследований в этой области представлены в книге В. М. Александрова, С. М. Мхитаряна), причем в ряде случаев предложены новые методы решения, которые представляют интерес и для исследования других задач математической физики при смешанных граничных условиях. Применение асимптотических и других аналитических методов делают возможным представить решение смешанной задачи и его локальные и интегральные характеристики явными формулами, удобными для качественного и количественного исследования.

Проблемы, возникающие в различных областях машиностроения и строительства – помимо упомянутых выше, – такие как проектирование различных тонкостенных конструкций, расчет фундаментов зданий, практика сварных

соединений, вопросы предотвращения роста трещин в конструкциях, вопросы тензометрирования подводят к решению неклассических контактных задач. Поэтому актуальность темы диссертации обуславливается важностью изучения вопросов контактного взаимодействия тонкостенных элементов в виде накладок различных геометрических форм и покрытий с массивными деформируемыми телами в теоретическом и прикладном плане.

ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИССЕРТАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Целью диссертации является исследование вопросов о контактном взаимодействии тонких накладок с упругими телами, нагруженными на бесконечности, а именно, нахождение распределения касательных напряжений на поверхности упругих тел в области контакта. Определение закона изменения контактного касательного напряжения позволяет затем исследовать напряженно-деформированное состояние в упругих телах. В ходе работы были поставлены и решены следующие задачи:

1. контактные задачи о взаимодействии тонких жестких на растяжение, но абсолютно гибких накладок различных геометрических форм в плане (круглая, эллиптическая, кольцевая, прямоугольная) с упругим полупространством, нагруженным на бесконечности равномерным растягивающим усилием;
2. плоская задача о контактном взаимодействии тонкой упругой абсолютно гибкой накладки с упругой полосой, нагруженной на бесконечности равномерным растягивающим усилием. Задача рассматривается в рамках плоской деформации. Полученные результаты используются для нахождения коэффициента искажения деформации низко модульных материалов при их тензометрировании;
3. осесимметричная задача о растяжении упругого слоя, приложенными на бесконечности усилиями, при наличии на одной из его граней тонкой упругой накладки. Применение полученных результатов к вопросам тензометрирования.

Подобные задачи ранее изучались в работах Н. Х. Арутюняна, В. М. Александрова, С. М. Мхитаряна, Г. А. Мораря, Г. Я. Попова, Б. И. Сметанина, Б. В. Соболя, А. С. Соловьева, В. М. Толкачева, S. W. Chewing, M. F. Beatty, P. Stehlin и др.

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В работе использовались:

- интегральное преобразование Фурье и интегральное преобразования Ханкеля, чтобы свести поставленные задачи к интегральным уравнениям относительно неизвестных контактных усилий;

- асимптотический метод «больших λ » (построение асимптотических рядов при больших значениях характерных параметров задачи);
- метод специальных ортонормированных полиномов (основан на построении множества специальных многочленов, ортонормированных по отношению к дифференциальному оператору, который описывает деформацию упругой накладки);
- метод коллокаций Мультиппа–Каландия (позволяет после определенной дискретизации свести интегральное уравнение к системе линейных алгебраических уравнений).

НАУЧНАЯ НОВИЗНА

1. Получены формулы для контактного касательного напряжения в случае пространственной задачи о контактном взаимодействии тонкой узкой прямоугольной накладки конечной длины с упругим полупространством, нагруженным на бесконечности равномерным растягивающим усилием, при различных значениях относительной толщины накладки. Считается, что между пластинкой и упругой средой осуществляется полное сцепление. Здесь были использованы предположение о распределении контактных напряжений, аналогичное предположению Л. А. Галина о распределении давления под накладкой в поперечном направлении при вдавливании узкой балки в упругое полупространство, и допущение, что накладка является жесткой на растяжение и не сопротивляется изгибу.
2. С помощью метода Мультиппа–Каландия удалось найти приближенное решение задачи о равновесии упругого полупространства, усиленного на границе тонкой кольцевой накладкой, которая является жесткой на растяжение, но не сопротивляется изгибным деформациям, а затем сравнить этот результат с полученным ранее асимптотическим решением.
3. С помощью асимптотического метода «больших λ » и метода специальных ортонормированных полиномов в плоской и осесимметричной постановках были получены результаты для задачи о контактном взаимодействии тонкой упругой накладки, лишенной изгибной жесткости, с упругим слоем, нагруженным на бесконечности равномерным растягивающим усилием. Между накладкой и верхней границей упругого слоя осуществляется полное сцепление. Определены контактные касательные напряжения, перемещения точек накладки и коэффициент искажения деформации границы слоя. Было показано, что при тензометрировании материалов с малым модулем упругости (например, менее 7ГПа) жесткость тензодатчика может оказывать значительное усиливающее воздействие.

ПРАКТИЧЕСКАЯ ЗНАЧИМОСТЬ

В теоретическом плане практическая значимость работы заключается в изучении задач о контактном взаимодействии тонкостенных элементов с деформируемыми массивными телам, что вносит некоторый вклад во внутреннюю завершенность соответствующего раздела механики деформируемого твердого тела – контактные задачи для тел с тонкими покрытиями и прослойками. В случае задач с упругими накладками были исследованы вопросы о применении полученных результатов для учета погрешностей при тензометрировании низко модульных материалов.

ДОСТОВЕРНОСТЬ

Достоверность результатов, полученных в диссертационной работе, обеспечивается строгостью математических постановок задач, корректным использованием аппарата теории интегральных уравнений, апробированностью применяемых численных методов, сопоставлением авторских решений с решениями, опубликованными в литературных источниках.

АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ И ПУБЛИКАЦИИ

Вошедшие в диссертацию результаты докладывались и обсуждались на следующих конференциях и научных семинарах: научная конференция «Ломоносовские чтения» (апрель 2004 г. и 16–25 апреля, 2007 г., Москва, Россия), на международной конференции «XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды» (27 августа – 1 сентября 2007 г., Саратов, Россия), на научном семинаре по механике сплошных сред им. Л. А. Галина (под рук. профессоров В. М. Александрова, В. Н. Кукуджанова, А. В. Манжирова, ИПМех РАН), на научно-исследовательском семинаре кафедры теории пластичности МГУ им. М. В. Ломоносова (под рук. профессоров В. М. Александрова, Е. В. Ломакина), на научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов МГУ им. М. В. Ломоносова (под рук. профессора Б. Е. Победря), на научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости МГУ им. М. В. Ломоносова (под рук. профессора И. А. Кийко).

Основные результаты диссертационной работы опубликованы в 5 публикациях, список которых приведен в конце автореферата. Во всех работах постановка задачи принадлежит научному руководителю; автору во всех работах, опубликованных в соавторстве, в равной степени принадлежат результаты выполненных исследований.

СТРУКТУРА И ОБЪЕМ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения и списка цитированной литературы. Работа изложена на 125 страницах машинописного текста без приложений и содержит 19 рисунков и 5 таблиц. Список литературы содержит 98 наименований.

II. Содержание диссертации

Во *введении* представлен обзор литературы по контактными задачам и основным методам их решения, приводится обзор публикаций по тематике дан-

ной диссертационной работы, дано краткое содержание всех глав диссертации.

Первая глава посвящена изучению задач о контактном взаимодействии тонких накладок различных геометрических в плане форм с упругим полупространством, нагруженным на бесконечности равномерным растягивающим усилием, направленным параллельно границе полупространства. Предполагается, что накладки являются жесткими на растяжение и не сопротивляются изгибным деформациям. Во всех случаях считается, что между граничной плоскостью полупространства и накладкой осуществляется полное сцепление.

Исследование задачи о контактном взаимодействии тонкой накладки эллиптической формы с упругим полупространством ($z \leq 0$), нагруженным на бесконечности равномерным растягивающим усилием p , которое направлено одновременно параллельно двум координатным осям x и y , с помощью интегрального преобразования Фурье сводится к решению системы двумерных интегральных уравнений относительно неизвестных контактных касательных напряжений. В случае, когда упругое полупространство сцеплено с тонкой круглой накладкой и растягивается на бесконечности осесимметричным равномерным усилием, используя интегральное преобразование Ханкеля, проблема сводится к решению парного интегрального уравнения относительно неизвестного контактного касательного напряжения. Данная система интегральных уравнений и парное интегральное уравнение, как показано в работах [1], [2], имеют решения в замкнутом виде:

для эллиптической накладки безразмерные контактные касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} имеют форму

$$\tau_{xz} = \frac{Ax}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \tau_{yz} = \frac{By}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

$$A = \frac{[3\nu e^2 - 4\nu + e^2]\{\mathbf{E}(e) - \mathbf{K}(e)\} + [\nu e^4 - 2\nu e^2 + e^4]\mathbf{K}(e)}{2\sqrt{1-e^2}(\nu+1)((\nu+1)\mathbf{E}^2(e) + (e^2-2)\mathbf{K}(e)\mathbf{E}(e) + (\nu-1)(e^2-1)\mathbf{K}^2(e))},$$

$$B = \frac{\nu e^2[\mathbf{E}(e) - 3\mathbf{K}(e)] + (4\nu + e^2)[\mathbf{K}(e) - \mathbf{E}(e)]}{2(\nu+1)((\nu+1)\mathbf{E}^2(e) + (e^2-2)\mathbf{K}(e)\mathbf{E}(e) + (\nu-1)(e^2-1)\mathbf{K}^2(e))},$$

где ν — коэффициент Пуассона полупространства, $\mathbf{K}(e)$, $\mathbf{E}(e)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго родов соответственно, e — эксцентриситет эллипса, который является в плане формой накладки;

для круглой накладки безразмерное контактное касательное напряжение имеет вид

$$\tau(r) = -\frac{2r}{(1+\nu)\pi\sqrt{1-r^2}},$$

где ν — коэффициент Пуассона полупространства. Здесь (r, φ, z) — цилиндрическая система координат.

Исследование контактных задач о взаимодействии тонкой накладки эллиптической и круглой форм с упругим полупространством, нагруженным на бесконечности, проводилось автором самостоятельно, и полученные решения были сравнены с известными ранее. Здесь результаты для данных задач приводятся для полноты картины.

В случае осесимметричной задачи о контактном взаимодействии упругого полупространства, нагруженного растягивающими усилиями на бесконечности, с тонкой жесткой на растяжение, абсолютно гибкой кольцевой накладкой при помощи метода «больших λ » ранее в работе [3] было получено асимптотическое решение в виде ряда по геометрическому параметру, характеризующему отношение внешнего и внутреннего радиусов кольца. В данной работе задача также сводится к решению интегрального уравнения первого рода относительно неизвестного контактного касательного напряжения с ядром, имеющим логарифмическую особенность. Приближенное решение интегрального уравнения находится с помощью метода Мультиппа–Каландия и сравнивается с асимптотическим решением.

В табл. 1 приведены значения безразмерного контактного касательного напряжения $\psi(x)$, вычисленные по формулам при использовании асимптотического метода «больших λ » (м.б. λ) и с помощью метода Мультиппа–Каландия (метод М–К) при различных значениях геометрического параметра λ , характеризующего отношение внешнего и внутреннего радиусов кольца (коэффициент Пуассона полупространства считается равным 0.3). Как видно из полученных результатов, разница при увеличении параметра λ уменьшается, и результаты, полученные двумя способами, все более и более совпадают.

Задача о контактном взаимодействии тонкой жесткой на растяжение накладке, не сопротивляющейся изгибным деформациям, с основанием в виде узкого прямоугольника ($\Omega = \{(x, y) : |x| \leq a, |y| \leq \varepsilon\}, a/\varepsilon \gg 1$) с упругим полупространством, нагруженным на бесконечности равномерным растягивающим усилием p (направленным параллельно оси x), сведена к исследованию интегрального уравнения относительно неизвестного касательного напряжения $\tau(x, y)$ в области контакта

$$\int_{-a}^a d\xi \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left(\frac{(1-\nu)}{R} + \frac{\nu(\xi-x)^2}{R^3} \right) \tau(\xi, \eta) d\eta = -\frac{2\pi p x}{(1+\nu)}, \quad |x| \leq a, \quad (1)$$

где $R = \sqrt{(\xi-x)^2 + \eta^2}$ и ν — коэффициент Пуассона полупространства.

Используем предположение, аналогичное предположению Л. А. Галина о распределении давления под накладкой в поперечном направлении при вдавлении узкой балки в упругое полупространство, а именно, что контактное

касательное напряжение имеет вид

$$\tau(x, y) = \frac{\tau(x)}{\sqrt{\varepsilon^2 - y^2}} \quad (|x| \leq a, |y| \leq \varepsilon).$$

Принимая во внимание последнее предположение, интегральное уравнение (1) сведется к решению интегрального уравнения первого рода относительно $\tau(x)$ с ядром, имеющим логарифмическую особенность. Приближенное решение уравнения ищется с помощью модифицированного метода Мультиппа–Каландия. На рис. 1 приведены графики безразмерного контактного касательного напряжения на единицу длины накладки $\varphi = \tau(x)/pa$, учитывая нечетность функции, при различных значениях относительной ширины накладки. Можно видеть, что величина касательного контактного напряжения уменьшается при уменьшении относительной ширины накладки $\varepsilon_1 = \varepsilon/a$.

$\psi(x)$						
	$\lambda = 2$		$\lambda = 4$		$\lambda = 8$	
x	метод М–К	м.б.λ	метод М–К	м.б.λ	метод М–К	м.б.λ
-0.8	0.392350	0.389509	1.181165	1.181065	2.731319	2.731314
-0.6	0.445916	0.444325	1.127275	1.127221	2.349919	2.349920
-0.4	0.561395	0.560493	1.223651	1.223625	2.331585	2.331586
-0.2	0.733224	0.732868	1.399219	1.399216	2.460418	2.460423
0	0.980324	0.980472	1.653763	1.653782	2.702234	2.702241
0.2	1.342134	1.342786	2.014612	2.014654	3.074658	3.074666
0.4	1.899185	1.900375	2.548552	2.548614	3.647182	3.647194
0.6	2.849270	2.851091	3.430336	3.430417	4.617313	4.617330
0.8	4.930910	4.933749	5.341247	5.341351	6.778649	6.778651
x	$\psi(x)\sqrt{1-x^2}$					
-1	0.142915	0.140684	0.539230	0.539155	1.412622	1.412617
1	3.811071	3.812948	3.723182	3.723219	4.463972	4.463967

Таблица 1. Значения безразмерного контактного касательного напряжения $\psi(x)$ для задачи о взаимодействии кольцевой накладки с упругим полупространством, вычисленные с помощью метода Мультиппа–Каландия и асимптотического метода

Во *второй главе* были рассмотрены контактные задачи для упругого слоя, усиленного тонкой жесткой на растяжение, абсолютно гибкой накладкой.

В двух частях данной главы в плоской и осесимметричной постановках исследуется задача о контактом взаимодействии тонкой накладки с упругим слоем, нагруженным на бесконечности равномерным растягивающим усилием, направленным параллельно границам слоя. Предполагается, что накладка жесткая на растяжение, но не сопротивляется изгибным деформациям, и между накладкой и верхней границей слоя осуществляется полное сцепление.

Нижняя граница слоя свободна от напряжений. С помощью интегрального преобразования Фурье в плоском случае и интегрального преобразования Ханкеля в осесимметричном, задача сводится к решению соответствующего интегрального уравнения первого рода с нерегулярным ядром относительно неизвестной функции контактного касательного напряжения. После выделения регулярной части ядра асимптотическое решение уравнений при больших значениях геометрического параметра задачи (относительная толщина слоя) находится с помощью метода «больших λ ».

В плоском случае безразмерное контактное касательное напряжение $\tau(x)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\tau(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \left(g_0(x) + \frac{g_1(x)}{\lambda^2} + \frac{g_2(x)}{\lambda^4} + \frac{g_3(x)}{\lambda^6} \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right), \\ g_0(x) &= -x, \quad g_1(x) = 1.4507x, \\ g_2(x) &= -x(1.6650 + 1.7580x^2), \\ g_3(x) &= x(2.6644 + 3.9186x^2 + 1.3682x^4),\end{aligned}$$

в осесимметричном – $\tau(r)$

$$\begin{aligned}\tau(r) &= \frac{1}{\pi\sqrt{1-r^2}} \left(f_0(r) + \frac{f_1(r)}{\lambda^3} + \frac{f_2(r)}{\lambda^5} + \frac{f_3(r)}{\lambda^6} + \frac{f_4(r)}{\lambda^7} \right) + O\left(\frac{1}{\lambda^8}\right), \\ f_0(r) &= -4r, \quad f_1(r) = 2.9135r, \\ f_2(r) &= -2r(-0.5494 + 2.7470r^2), \quad f_3(r) = -2.1221r, \\ f_4(r) &= 2r(-1.7569 + 2.4598r^2 + 2.4598r^4).\end{aligned}$$

И в плоском случае, и в осесимметричном абсолютная величина контактного касательного напряжения уменьшается при уменьшении относительной толщины полосы, слоя соответственно.

В *третьей главе* рассматривались плоская и осесимметричная задачи о контактном взаимодействии тонкой упругой абсолютно гибкой накладкой с упругим слоем и возможность приложения полученных результатов к вопросам тензометрирования.

В первой части исследовалась в условиях плоской деформации контактная задача для тонкой упругой накладки длины $2a$ с упругой полосой, нагруженной на бесконечности равномерным растягивающим усилием p , направленным параллельно границам полосы. Предполагается, что накладка сопротивляется растяжению и является абсолютно гибкой, и между накладкой и верхней границей полосы осуществляется полное сцепление. Нижняя граница полосы свободна от напряжений. Задача приведена к интегральному уравнению первого рода с нерегулярным ядром относительно неизвестного контактного касательного напряжения, которое решается вместе с дифференциальным уравнением, описывающим деформацию накладки. Система уравнений в безразмерном виде имеет форму

$$u_2''(x) = k_1 \tau(x), \quad k_1 = \frac{a\theta_1}{2h_2\theta_2}, \quad (2)$$

$$u_2'(\pm 1) = 0, \quad u_2(0) = 0, \quad (3)$$

$$\int_{-1}^1 \tau(\xi) d\xi \int_0^\infty L(y) \sin\left(\frac{y(\xi-x)}{\lambda}\right) dy = -\pi\lambda(1-u_2'(x)), \quad (|x| \leq 1),$$

$$L(u) = \frac{\operatorname{sh} 2u - 2u}{2(\operatorname{sh}^2 u - u^2)}, \quad \lambda = \frac{h_1}{a}, \quad \theta_1 = \frac{G_1}{(1-\nu_1)}, \quad \theta_2 = \frac{G_2}{(1-\nu_2)}$$

где $u_2(x)$ — горизонтальное перемещение точек накладки, $\tau(x)$ — контактное касательное напряжение между нижней поверхностью накладки и верхней границей полосы, h_1 и h_2 — толщина полосы и накладки соответственно, a — полудлина области контакта, G_1, ν_1 и G_2, ν_2 — модуль сдвига и коэффициент Пуассона полосы и накладки соответственно.

Заметим, что для ядра уравнения $L(u)$ верно следующее

$$L(u) \sim 1 + O(e^{-2u}) \text{ при } u \rightarrow \infty, \quad L(u) \sim \frac{2}{u} + O(u) \text{ при } u \rightarrow 0. \quad (4)$$

Для нахождения решения задачи построена специальная система многочленов $\{Q_m^{(1)}(x)\}$, нечетных по x и ортонормированных по отношению к дифференциальному оператору, описывающему деформацию накладки, с противоположным знаком, т.е.

$$-\int_{-1}^1 \frac{d^2}{dx^2} [Q_m^{(1)}(x)] Q_n^{(1)}(x) dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}, \quad (Q_m^{(1)})'(\pm 1) = 0.$$

Продольное перемещение точек накладки ищется в виде линейной комбинации этих полиномов $u_2(x) = \sum_{k=1}^\infty b_k Q_k^{(1)}(x)$. Учитывая линейность задачи, контактное касательное напряжение ищется в виде ряда с теми же коэффициентами $\tau(x) = \tau_0(x) + \sum_{k=1}^\infty b_k \tau_k(x)$. Решение соответствующего интегрального уравнения второго рода относительно $\tau_k(x)$ ищется в виде ряда по отрицательным степеням геометрического параметра λ , характеризующего относительную толщину полосы. В результате связывания решений интегрального и дифференциального уравнений относительно коэффициентов разложения продольного перемещения точек накладки получается бесконечная алгебраическая система уравнений для нахождения b_m , приближенное решение которой находится с помощью метода редукции.

При тензометрировании низко модульных материалов жесткость тензорезистора может оказывать значительное усиливающее воздействие, поэтому к величине деформации на поверхности детали, найденной из эксперимента, необходимо сделать поправку, учитывающую упрочняющее влияние датчика. Смоделируем деталь, к которой приклеен датчик, полосой с упругими характеристиками E_1, ν_1 и толщины h_1 , а тензодатчик — тонкой упругой накладкой с усредненными упругими характеристиками E_2, ν_2 , толщины h_2 ,

длины $2a$ и измерительной базой $2a_e$. Здесь E_1, E_2 – модуль упругости полосы и наклейки соответственно. Тогда, используя описанный выше подход, после нахождения продольного перемещения точек наклейки, можем найти коэффициент \varkappa , показывающий во сколько раз наличие наклейки искажает деформацию границы полосы

$$\varkappa = \varepsilon_0/\varepsilon_* = \left(\int_{-1/2}^{1/2} u'_2(x) dx \right)^{-1} = (2u_2(1/2))^{-1}, \quad \text{если } a_e/a = 1/2, \quad (5)$$

где ε_0 – неискаженная деформация границы полосы (в условиях плоской деформации), ε_* – средняя по длине тензочувствительного элемента деформация наклейки. В табл. 2 приведены значения \varkappa при различных значениях k_1 и λ , значения для полуплоскости даны в последнем столбце.

	$\lambda = 2$	$\lambda = 4$	$\lambda = 8$	$\lambda = \infty$
$k_1 = 4.0625 (E_1 = 1.2 \text{ ГПа}, \nu_1 = 0.4)$	1.3264	1.2431	1.2248	1.2185
$k_1 = 6.25 (E_1 = 2 \text{ ГПа}, \nu_1 = 0.3)$	1.2080	1.1528	1.1407	1.1365
$k_1 = 12.5 (E_1 = 4 \text{ ГПа}, \nu_1 = 0.3)$	1.1016	1.0731	1.0668	1.0647
$k_1 = 35 (E_1 = 7 \text{ ГПа}, \nu_1 = 0.3)$	1.0366	1.0260	1.0236	1.0229
$k_1 = 62.5 (E_1 = 20 \text{ ГПа}, \nu_1 = 0.3)$	1.0214	1.0152	1.0139	1.0137

Таблица 2. Значения коэффициента искажения деформации границы полосы \varkappa , вычисленные по формуле (5), когда $E_2 = 8 \text{ ГПа}$, $\nu_2 = 0.3$, $2a = 6 \text{ мм}$, $h_2 = 0.06 \text{ мм}$

В работах [4, 5] в условиях плоского напряженного состояния находился коэффициент $\bar{\eta} = \varepsilon_*/\varepsilon_0$ – коэффициент искажения деформации границы упругого полупространства, сцепленного с тонкой упругой наклейкой и нагруженного на бесконечности равномерным растягивающим усилием. Результаты данных исследований были сравнены с соответствующими результатами, полученными при помощи подхода, описанного выше при соответствующей замене упругих постоянных; абсолютная разница не превосходит 0.2% (см. табл. 2а).

$E_1 = 1.2 \text{ ГПа}$	$h_2 = 0.06 \text{ мм}$	$2a = 6 \text{ мм}, a_e/a = 1/2$	$\bar{\eta} = 0.807 (0.806 [4])$
		$2a = 12 \text{ мм}, a_e/a = 1/2$	$\bar{\eta} = 0.899 (0.899 [4])$
		$2a = 12 \text{ мм}, a_e/a = 1/4$	$\bar{\eta} = 0.908 (0.907 [4])$
	$h_2 = 0.05 \text{ мм}$		$\bar{\eta} = 0.836 (0.836 [4])$
	$h_2 = 0.04 \text{ мм}$	$2a = 6 \text{ мм}, a_e/a = 1/2$	$\bar{\eta} = 0.867 (0.867 [4])$
	$h_2 = 0.03 \text{ мм}$		$\bar{\eta} = 0.899 (0.899 [4])$
$h_2 = 0.02 \text{ мм}$	$\bar{\eta} = 0.932 (0.933 [4])$		
$E_1 = 4 \text{ ГПа}$	$h_2 = 0.06 \text{ мм}$	$2a = 6 \text{ мм}, a_e/a = 1/2$	$\bar{\eta} = 0.939 (0.939 [5])$
$E_1 = 20 \text{ ГПа}$	$h_2 = 0.06 \text{ мм}$	$2a = 6 \text{ мм}, a_e/a = 1/2$	$\bar{\eta} = 0.986 (0.988 [5])$

Таблица 2а. Значения коэффициента искажения деформации $\bar{\eta}$ (в скобках указаны значения, полученные ранее в соответствующих работах), когда модуль упругости наклейки $E_2 = 8 \text{ ГПа}$

Рис. 2–3 показывают (графики приведены, учитывая нечетность функций $u_2(x)$ и $\tau(x)$), что при уменьшении параметра k_1 и постоянном значении λ (относительная толщина полосы) абсолютная величина контактного касательного напряжения увеличивается, а величина продольного перемещения точек накладки уменьшается. При сравнении значений касательного напряжения в области контакта и продольного перемещения точек накладки при одинаковом значении k_1 , но при различных λ можно получить, что чем тоньше полоса (меньше λ), тем меньше и абсолютная величина контактного касательного напряжения, и величина горизонтального перемещения точек накладки.

Во второй части данной главы рассматривалась осесимметричная задача о контактом взаимодействии круглой тонкой упругой накладки радиуса a с упругим слоем, нагруженным на бесконечности равномерным растягивающим усилием, направленным параллельно границам слоя. Считается, что накладка сопротивляется растяжению и не сопротивляется изгибу, и между накладкой и верхней границей слоя осуществляется полное сцепление. Нижняя граница слоя свободна от напряжений. Также задача сведена к совместному решению интегрального уравнения первого рода с нерегулярным ядром и дифференциального уравнения, описывающего деформацию накладки. В обезразмеренном виде они имеют форму

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [ru_2(r)] \right) &= k_2 \tau(r), \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu_2}{r} \right) u_2(r) \Big|_{r=1} &= 0, \quad u_2(0) = 0, \\ \int_0^1 \tau(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L(\gamma\lambda) J_1(\gamma\rho) J_1(\gamma r) d\gamma &= -r + u_2(r), \quad (0 \leq r \leq 1), \\ L(u) &= \frac{\operatorname{sh} 2u - 2u}{2(\operatorname{sh}^2 u - u^2)}, \quad k_2 = \frac{\theta_1 a}{2\theta_2 h_2}, \quad \lambda = \frac{h_1}{a}, \quad \theta_1 = \frac{G_1}{(1 - \nu_1)}, \quad \theta_2 = \frac{G_2}{(1 - \nu_2)}, \end{aligned}$$

где $u_2(r)$ — радиальное перемещение точек накладки, $\tau(r)$ — контактное касательное напряжение между нижней поверхностью накладки и верхней границей слоя, h_1 и h_2 — толщина слоя и накладки соответственно, a — радиус области контакта, G_1, ν_1 и G_2, ν_2 — модуль сдвига и коэффициент Пуассона слоя и накладки соответственно.

Аналогично плоскому случаю, для решения задачи строится система нечетных по r специальных ортонормированных полиномов $\{Q_m^{(2)}(r)\}$, таких что

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} [rQ_m^{(2)}(r)] \right) Q_n^{(2)}(r) r dr &= \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n; \end{cases} \\ \left(\frac{d}{dr} + \frac{\nu_2}{r} \right) Q_m^{(2)}(r) \Big|_{r=1} &= 0. \end{aligned}$$

Радиальное перемещение точек накладки ищется в виде линейной комбинации указанных полиномов, после чего находим решение интегрального

уравнения с помощью метода «больших λ ». И также, в результате связывания решений интегрального и дифференциального уравнений относительно коэффициентов разложения радиального перемещения точек накладки, получается бесконечная алгебраическая система уравнений, приближенное решение которой находится с помощью метода редукции. Зная коэффициенты разложения, можем найти радиальное перемещение точек накладки и контактное касательное напряжение.

Как и в плоском случае, из рис. 4–5 видно, что при уменьшении k_2 и постоянном значении λ абсолютная величина контактного касательного напряжения увеличивается, а величина радиального перемещения точек накладки уменьшается. При уменьшении относительной толщины слоя λ и постоянном значении k_2 абсолютные величины контактного касательного напряжения и радиального перемещения точек накладки уменьшаются.

Аналогично плоской задаче найдем коэффициент, показывающий во сколько раз наличие накладки искажает деформацию границы слоя, по формуле

$$\varkappa = \varepsilon_0/\varepsilon_* = \left(8 \int_0^{1/2} u'_2(r)rdr \right)^{-1}, \text{ при } a_e/a = 1/2, \quad (6)$$

где ε_0 – неискаженная деформация границы слоя, ε_* – средняя по площади элемента, радиус которого a_e , деформация накладки.

В табл. 3 даны значения величины \varkappa , подсчитанные по формуле (6) при различных значениях параметров k_2 и λ (E_1, ν_1 – модуль упругости и коэффициент Пуассона упругого слоя, E_2, ν_2 – модуль упругости и коэффициент Пуассона накладки).

	$\lambda = 2$	$\lambda = 4$	$\lambda = 8$	$\lambda = \infty$
$k_2 = 4.0625(E_1 = 1.2\text{ГПа}, \nu_1 = 0.4)$	1.2812	1.2613	1.2581	1.2579
$k_2 = 6.25(E_1 = 2\text{ГПа}, \nu_1 = 0.3)$	1.1749	1.1616	1.1598	1.1596
$k_2 = 12.5(E_1 = 4\text{ГПа}, \nu_1 = 0.3)$	1.0814	1.0742	1.0727	1.0725
$k_2 = 35(E_1 = 7\text{ГПа}, \nu_1 = 0.3)$	1.0285	1.0238	1.0228	1.0223
$k_2 = 62.5(E_1 = 20\text{ГПа}, \nu_1 = 0.3)$	1.0170	1.0126	1.0111	1.0110

Таблица 3. Значения коэффициента искажения деформации границы слоя \varkappa , вычисленные по формуле (6), когда $E_2 = 8\text{ГПа}$, $\nu_2 = 0.3$, $2a = 6\text{мм}$, $h_2 = 0.06\text{мм}$

Для случая полупространства значения приведены в последнем столбце табл. 3.

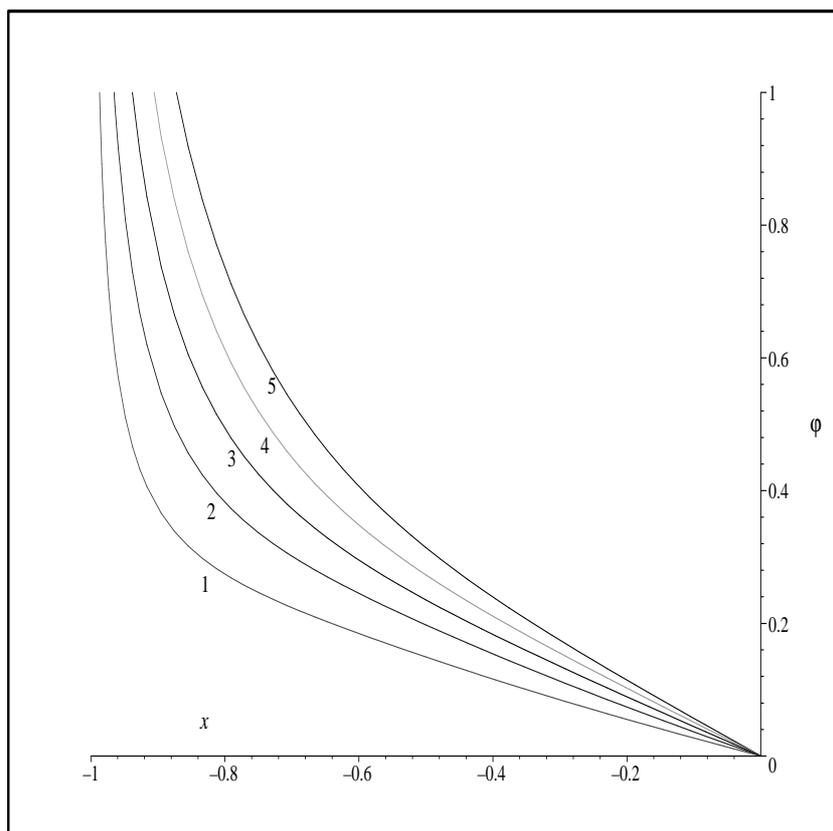


Рис. 1. Графики безразмерного контактного касательного напряжения на единицу длины накладки $\varphi(x)$ для задачи об упругом полупространстве, усиленном узкой прямоугольной накладкой, при различных значениях относительной ширины накладки ε_1 : 1 — $\varepsilon_1 = 0.1$; 2 — $\varepsilon_1 = 0.2$; 3 — $\varepsilon_1 = 0.3$; 4 — $\varepsilon_1 = 0.4$; 5 — $\varepsilon_1 = 0.5$

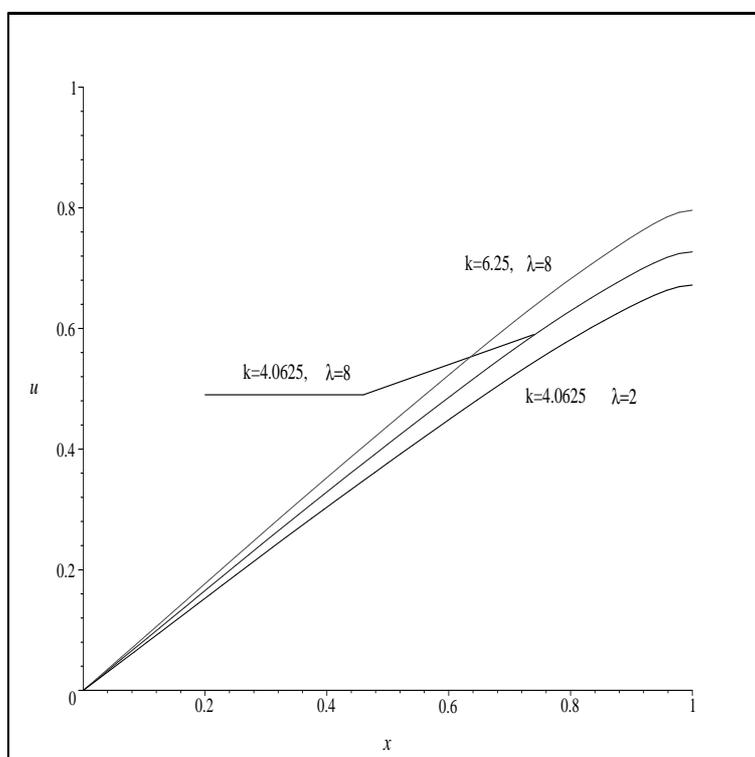


Рис. 2. Графики безразмерного продольного перемещения точек накладки $u \equiv u_2(x)$ для задачи об упругой полосе, усиленной упругой накладкой, при различных $k \equiv k_1$ и λ

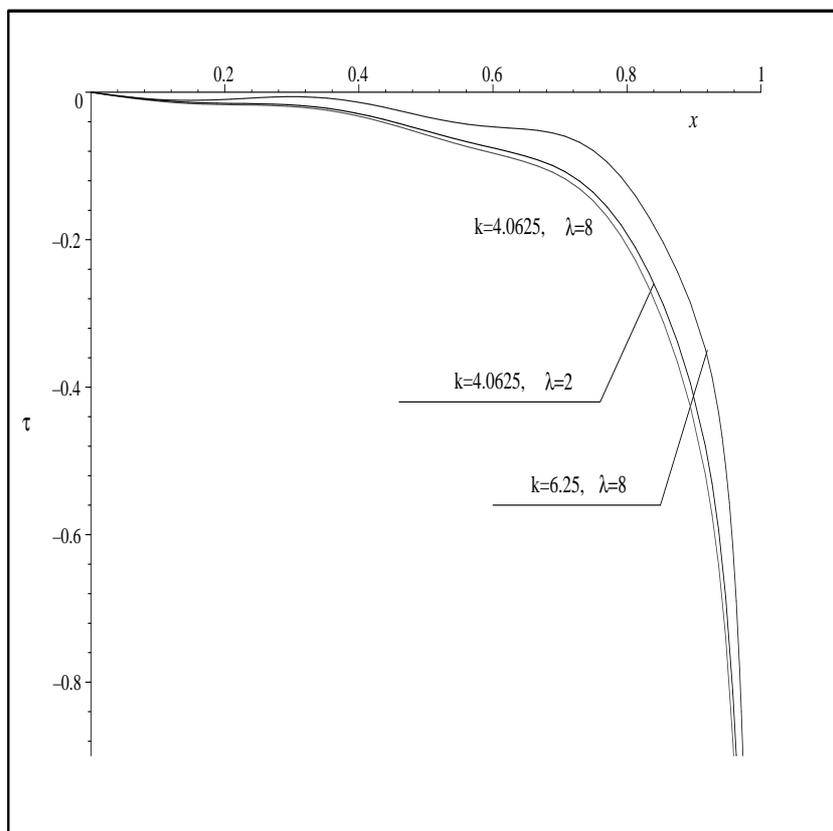


Рис. 3. Графики безразмерного контактного касательного напряжения $\tau(x)$ для задачи об упругой полосе, усиленной упругой накладкой, при различных значениях $k \equiv k_1$ и λ

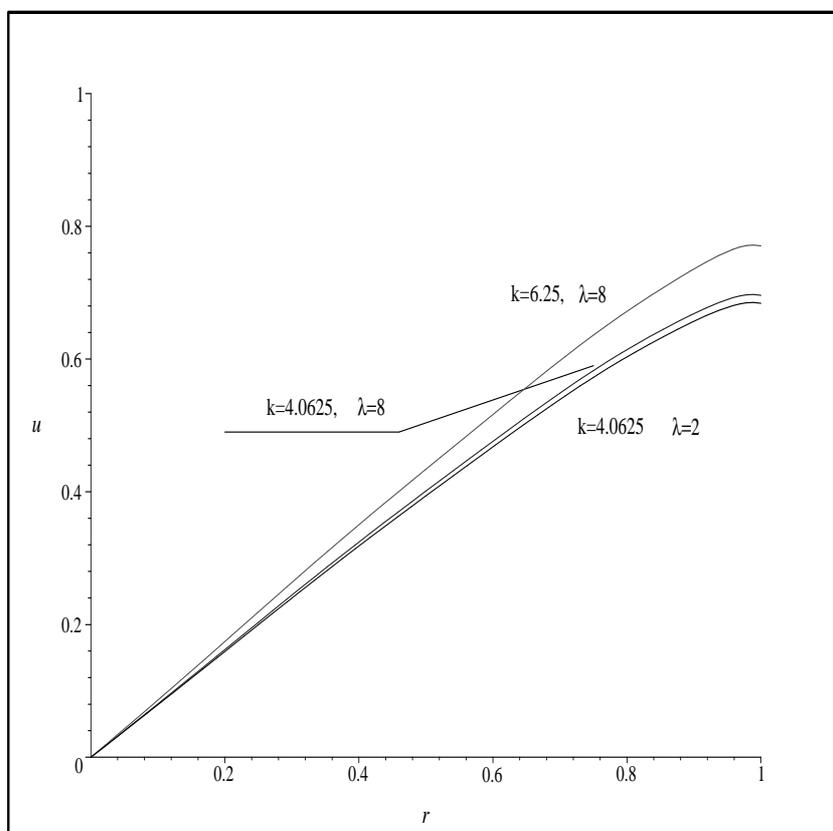


Рис. 4. Графики безразмерного радиального перемещения точек накладки $u \equiv u_2(r)$ для задачи об упругом слое, усиленном упругой накладкой, при различных $k \equiv k_2$ и λ

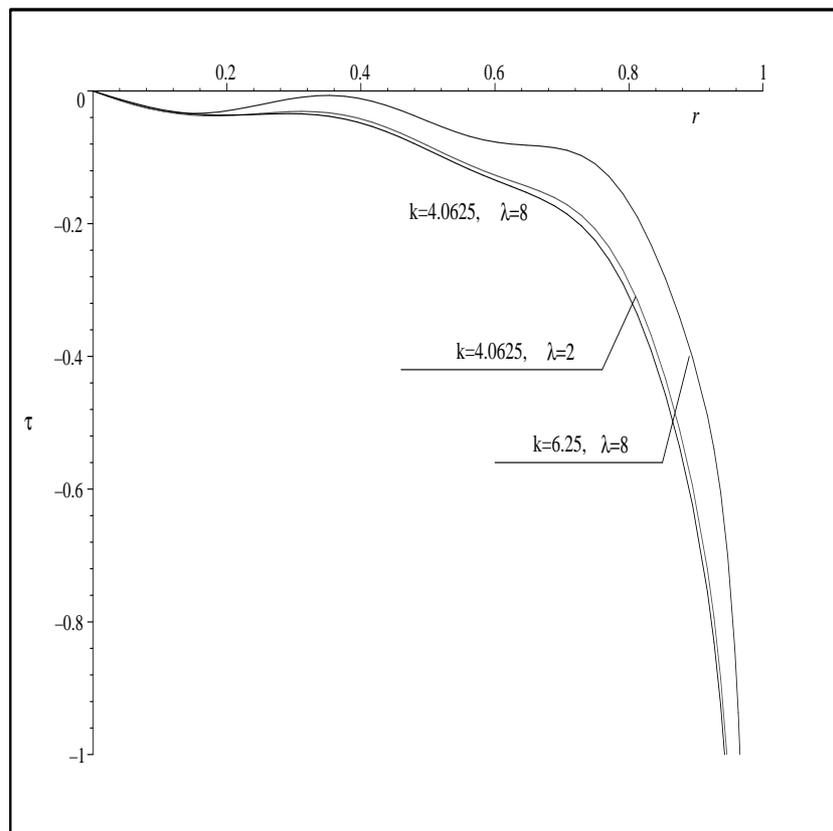


Рис. 5. Графики безразмерного контактного касательного напряжения $\tau(r)$ для задачи об упругом слое, усиленном упругой накладкой, при различных значениях $k \equiv k_2$ и λ

В *заключении* сформулированы основные выводы и результаты, полученные в диссертационной работе и выносимые на защиту:

1. Решение задачи о контактном взаимодействии упругого полупространства, нагруженного на бесконечности равномерным растягивающим усилием и сцепленного с тонкой жесткой на растяжение, абсолютно гибкой накладкой, имеющей в плане форму узкого прямоугольника сводится к исследованию интегрального уравнения первого рода, ядро которого имеет логарифмическую особенность. Приближенное решение уравнения ищется с помощью метода Мультиппа-Каландия.
2. Решение задачи о контактном взаимодействии упругого полупространства, нагруженного на бесконечности равномерным растягивающим усилием, с тонкой кольцевой накладкой с помощью метода Мультиппа-Каландия. Относительно накладки также предполагается, что она является жесткой на растяжение и абсолютно гибкой. Считается, что между упругим полупространством и накладкой осуществляется полное сцепление.
3. Для исследования плоской и осесимметричной задач об упругом слое, усиленном на одной из своих граней тонкой упругой накладкой, был предложен подход, основанный на методе «больших λ » и методе специальных ортонормированных полиномов. Полученные результаты ис-

пользуются при изучении вопроса расчета погрешности при тензометрировании.

4. Проведен численный анализ коэффициента искажения деформации ε в плоском и осесимметричном случаях. Было показано, что отклонение ε от единицы может изменяться в пределах от 10% до 35% при тензометрировании материалов с малым модулем упругости (менее 7ГПа). Таким образом, при измерениях необходимо учитывать, что жесткость тензодатчика может оказывать значительное усиливающее воздействие.

Список цитируемой литературы

1. И. И. Ворович, В. М. Александров, В. А. Бабешко Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1974. с. 456
2. В. М. Александров, Е. В. Коваленко Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М.: Наука, 1986. с. 336
3. В. М. Александров, Б. И. Сметанин, Б. В. Соболев Тонкие концентраторы напряжений в упругих телах. М.: Физматлит, 1993. с. 224
4. M. F. Beatty, S. W. Chewing Numerical Analysis of the Reinforcement Effect of a Strain Gage Applied to a Soft Material. Inter.J.Eng.Science, 1979, V. 17, p. 907–915
5. P. Stehlin Strain Distribution In and Around Strain Gauges. J. Strain Analysis, 1972, V. 7, № 3, p. 228–235

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах

1. В. М. Александров, В. К. Антонов, В. Ю. Саламатова Взаимодействие деформируемой наклейки с напряженным полупространством // Изв.РАН. МТТ, 2007 г., №5, с. 91–98
2. В. М. Александров, В. Ю. Саламатова Плоская контактная задача для упругой полосы с упругой наклейкой // Сб. материалов международной конференции «XVIII сессия Международной школы по моделям механики сплошной среды» (27 августа – 1 сентября 2007 г., Саратов), с. 26–28
3. В. М. Александров, В. К. Антонов, В. Ю. Саламатова Осесимметричная контактная задача для упругого слоя с деформируемой наклейкой // ПММ, 2008 г., т. 72, вып. 2, с. 322–327
4. В. М. Александров, В. Ю. Саламатова Контактная задача для полосовой наклейки, взаимодействующей с упругим полупространством // ПММ, 2008 г., т. 72, вып. 4, с. 678–680
5. В. Ю. Саламатова Взаимодействие деформируемой наклейки с напряженной полосой // Изв. РАН. МТТ, 2009г., № 1, с. 67-72