Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 515.142.22

Артамонов Дмитрий Вячеславович

Гомологические подходы в задачах о неподвижных точках, точках совпадения, в теории обобщенных полиэдров.

01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-Математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Скляренко Евгений Григорьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, Ахметьев Петр Михайлович
	кандидат физико-математических наук, доцент Фоменко Татьяна Николаевна
Ведущая организация:	Московский государственный педагогический университет.

Защита диссертации состоится 15 мая 2009 г. в $16^{\underline{45}}$ на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-Математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-Математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан ________ 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Актуальность темы.

Теорема о точках совпадения, дающая достаточное условие для наличия точки совпадения у двух отображений многообразий одной размерности, впервые была доказана Лефшецом, в 1926-ом году [1]. Теорема была доказана для случая двух кусочно-линейных отображений компактных связных триангулированных ориентируемых многообразий одной размерности без края. Формулировка теоремы состоит в том, что отличие от нуля некоторого числа (называемого числом Лефшеца совпадений), вычисляемого по тому, как данные отображения действуют на гомологиях и когомологиях, влечет наличие точки совпадения.

В 70-е годы, в связи с открытием топологических нетриангулируемых многообразий были доказаны теоремы, обобщающие теорему Лефшеца на случай двух непрерывных отображений замкнутых топологических ориентируемых многообразий одинаковой размерности [2],[3].

Обобщения данного результата на случай отображений многообразий с краем было получено в 1980-м году [4]. При этом требуется, чтобы одно из отображений сохраняло край.

В случае, когда оба отображения сохраняют края, имеется два подхода к построению числа Лефшеца, и они приводят к разным числам. При этом оба числа Лефшеца могут быть выражены через число Лефшеца для отображений краев и число Лефшеца для отображения удвоенных многообразий (т.е. многообразий без края, получаемых в результате склейки по краям пар экземпляров многообразий с краем) [5]

Были найдены обобщения и на случай отображений многообразий компактных, но, вообще говоря, неориентируемых и имеющих края [6]. При этом налагаются два дополнительных требования. Первое состоит в том, что одно из отображения ориентируемо (т.е. обратный образ ориентирующего пучка образа есть ориентирующий пучок прообраза), второе требование состоит в том, что одно из отображений сохраняет границу.

[1]Lefshetz S. Intersections and transformations of complexes and manifolds. - Trans. Amer. Math. Soc., 28, (1926), p. 1-49.

[2]Щелокова Т.Н. К теории совпадений пары непрерывных отображений. - Сборник рабок аспирантов ВГУ, 1972, вып. 2, с. 70-71.

[3]Mukherjea K. A survey of coincidence theory. - Global Anal. and appl. Lact. Int. Semin. Trieste, 1972, vol. 3, Vienna, 1974, p. 55-64.

[4]Nakaoka M. Coincidence Lefshetz numbers for fibre preserving maps. - J. Math. Soc. Japan 1980, 32, p. 751-779.

[5]Mukherjea K. Coincidence theory for manifolds with boundary. - Top. and appl., 1992, 46, p. 23-39.

[6]Goncalves D.L., Jezierski J. Lefshetz coincidence formula on non-orientable manifolds. - Fund. math., 1997, 53, №1, p. 1-23.

В каждой из этих двух ситуаций определено число Лефщеца совпадений двух отображений и доказано, что неравенство этого числа нулю влечет наличие совпадений.

В случае, когда оба отображения сохраняют края, также получается два способа определения числа Лефшеца. Было доказано, что их разность есть число совпадения для ограничений отображений на края.

Если обобщения на случай неориентируемых компактных многообразий с краем шли по пути обощения схемы доказательства в простейшем случае замкнутых ориентируемых многообразий, то случай некомпактных многообразий потребовал привлечения новых идей. В случае ориетируемых многообразий без края возникшие проблемы были преодолены в 1980-ом году [7]. Предполагается, что одно из отображений компактное, а другое собственное.

Частично был разобран и случай, когда некомпактные (вообще говоря) многообразия ориентируемы и имеют края [8]. При этом требовалось, что одно из отображений компактно и сохраняет край, а второе собственно.

Имеются также обобщения в другом направлении. Была доказана близкая теорема для случая отображений произвольного пространства, содержащего в качестве пожмножества замкнутое ориентируемое многообразие в ориентируемое компактное многообразие, той же размерности с краем , одно из которых отображает дополнение к выделенному подмножеству, являющемуся замкнутом многообразием, в край [9].

Известно, что для эйлеровой характеристики верно следующее. В случае, если имеется расслоение с постоянным пучком Лере, когомологии тотального пространства, базы и слоя конечномерны и равны нулю во всех размерностях, начиная с некоторой, эйлерова характеристика тотального пространства есть произведение эйлеровых характеристик базы и слоя[10].

Аналогичное равенство имеет место для расслоений с локально постоянным пучком Лере, но при условии, что база - конечный CW-комплекс [11]. Без этого условия данная формула, вообще говоря, может

[7] Давидян В.Р. О точках совпадений двух отображений. - Мат. сборинк, 1980, 112(154), №2(6), С. 220-225.

[8] Давидян В.Р. О точках совпадения двух отображений для многообразий с краями. - УМН., 1983, 38, №1(229), С. 149-150.

[9] Saveliev P. A Lefshetz-type coincidence theorem. - Fund. math., 1990, 162, p. 65-89.

[10] Leray J. L'homologie d'un espace fibre dont la fibre est connexe. - J. Math. Pures Appl., 1950, 29, p. 169-213.

[11] Серр Ж.П. Сингулярные гомологии расслоенных пространств. - Ann. Math., 1957, 54, p. 425-505.

нарушаться [12].

Были получены обобщения данного равенства на случай, когда имеется послойное отображение в себя расслоения над тождественным отображение базы[13]. При условии, что пучок Лере этого расслоения постоянен, установлено, что все числа Лефшеца отображений в себя слоев одинаковы а число Лефшеца отображения в себя расслоения есть произведение числа Лефшеца отображений слоев и эйлеровой характеристики базы.

Похожая формула имеет место для чисел Лефшеца совпадений [14]. Пусть имеются отображение расслоения, в которых базы, слои и тотальные пространства - многообразия, а соответсвующие размерности в образе и в прообразе совпадают. Пучки Лере предполагаются постоянными, но слои и тотальные пространства могут иметь края. Доказано, что может быть определено число, которое может быть интерпретировано как число Лефшеца совпадений отображений слоев. При этом число Лефшеца совпадения для отображения тотальных просранств есть произведения чисел Лефшеца для отображений баз и слоев.

Различными авторами ставились проблемы исследования классов hlc-пространств [15]и ANR[16] пространств на размерную полноценность. Однако обе эти гипотезы были опровергнуты[17]. В то же время было доказано, что обощенные многообразия [18] и даже $(\mathbb{Z}-n)$-пространства [19] размерно полноценны.

Цель работы - получение обобщения теоремы Лефшеца на случай отображений в общем случае некомпактных неориентируемых многообразий с краем, получение обощений формул для эйлеровой характеристики на случай отображений в себя расслоений, в том числе и с непостоянным, вообще говоря, пучком Лере, выделение класса размерно полноценных пространтсв, называемых обобщенными полиэдрами.

[12] Douady A, Application de la suite spectrale des espace fibres. - Sem. Cartan(1958/59)Exp.3.

[13] Snyder D. F. Lefshetz number for sheaf-trivial proper surjections. - Top. and. its appl., 2003, 128, p. 239-246.

[14] Nakaoka M. Coincidence Lefshetz numbers for fibre preserving maps. - J. Math. Soc. Japan, 1980, 32, p. 751-779.

[15] Dyer E. On the dimention of products. - Fund. math., 1959, 47, №2, P.141-160.

[16] Borsuk K. Opening of the Conference on Geometric Topology: in proceedings of the International Conference on Geometric Topology. Warszawa : PWN. 1980. P.12-14.

[17] Дранишников А.Н. О размерности произведения ANR-компактов.- ДАН СССР, 1988, 300, №5, С.1045-1049.

[18] Харлап А.Э. Локальные гомологии и когомологии, гомологическая размерность и обощенные многообразия. - Мат. сб., 1975 96(138), №3, С.347-373.

[19] Скляренко Е.Г. О гомологических умножениях. - Изв. РАН, Сер. мат., 1997, 61, №1, С.157-176.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Теорема Лефшеца о числе совпадений доказана для случая отображений вообще говоря некомпактных, неориентируемых многообразий одной и той же размерности, имеющих края. Предполагается, что одно из отображений компактно, другое собственно и ориентируемо, причем одно из отображений сохраняет края.

2. Для послойных отображений в себя расслоений с постоянным пучком Лере или с локально постоянным пучком Лере, при условии, что отображение базы тождественно, доказано равенство числа Лефшеца неподвижных точек отображения тотального пространства и произведения числа Лефшеца отображения базы и числа, которое можно интерпретировать как число Лефшеца отображений слоев. В случае локально постоянного пучка Лере и нетождественного отображения в базе приведена формула для числа Лефшеца отображения тотального пространства, обобщающая упоминавшуюся выше мультипликативную формулу.

3. Выделен с помощью локальных гомологических условий класс размерно полноценных пространств. Показана нетривиальность этих условий. Сравнивается класс обобщенных многообразий и обобщенных полиэдров.

Методы исследования.

В работе используются методы алгебраической топологии. При доказательстве теоремы Лефшеца важную роль играют методы, развитые Давидяном для случая некомпактных многообразий. В связи с неориентируемостью многообразий широко используются гомологии и когомологии с коэффициентами в ориентирующих пучках многообразий. При исследование числа Лефшеца отображения расслоений основным методом является использование спектральной последовательности Лере. При исследовании пространств на размерную полноценность используются локальные группы гомологий и когомологий.

Теоретическая и практическая научная ценность.

Работа носит теоретический характер. Ее результаы многут быть использованы в гомологической теории неподвижных точек и точек совпадения.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались:

1. На семинаре "Теория гомологий"под руководством проф. Е.Г. Скляренко на механико-математическом факультете МГУ неоднократно в 2004-2006 годах.

2. На кафедральном семинаре "Алгебраическая топология и ее приложения" под руководством чл.-корр. РАН В.М.Бухштабера, проф. А.В.Чернавского, проф. И.А.Дынникова, доц. Л.А.Алания, доц. В.М.Миллионщикова, доц. Т.Е.Панова на механико-математичском факультете МГУ в 2007 году.

3. На семинаре "Некоммутативная геометрия" под руководством проф. А.С.Мищенко, проф. И.К.Бабенко, проф. Е.В.Троицкого, проф. В.М.Мануйлова, доц. А.А.Ирматова на механико-математическом факультете МГУ в 2008 году.

4. На конференции "Александровские чтения" в июне 2006 года.

5. На конференции "Ломоносовские чтения" в апреле 2008 года.

6. На семинаре "K-theory and related topics" университета г. Билефельда (Германия) в 2007 году.

Публикации.

Результаты опубликованы 2-х работах автора, список которых приводится в конце автореферета [1-2].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, десяти глав, списка литературы. Список включает 44 наименования. Объем диссертации - 79 страницы.

Краткое содержание работы.

Во **введении** делается обзор различных вариантов теоремы Лефшеца о числе совпадений двух отображений, а также соотношений, обобщающих формулу для эйлеровой характеристики расслоений.

В **главе 1** формулируются основные результаты работы, касающиеся теоремы Лефшеца о числе совпадений. Предполагается, что имеются два

n-мерных многообразия M, N, возможно неориентируемые, некомпактные, имеющие края. Предполагается, что имеются два отображения f, g из M в N, f - компактно (т.е. замыкание образа компактно), g - собственно (т.е. прообраз компактного множества компактен), ориентируемо (т.е. обратный образ оринетирующего пучка N - ориентирующий пучок M). Предполагается, что либо f, либо g сохраняет края.

В обоих случаях определяется число Лефшеца совпадений. Фиксируется поле коэффициентов R.

Пусть сперва $g(\partial M) \subset \partial N$. Определим отображение θ_q пространства $H^q(N;R)$ в себя как следующую композицию: $H^q(N;R) \to_{f^*} H^q(M;R) =_D H_{n-q}(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M)) \to_{g_*} H_{n-q}(N, \partial N; \mathcal{H}_n(N)) =_D H^q(N;R)$. Здесь D - двойственность Пуанкаре. Доказывается, что, так как f компактно, образ θ_q конечномерен. Поэтому определен след $Sp\theta_q$ этого отображения. Определим число Лефшеца равенством $\Lambda'_{f,g} = \sum_q (-1)^q Sp\theta_q$.

Если же $f(\partial M) \subset \partial N$, то действуем так. Определим отображение θ_q группы $H^q(N, \partial N; R)$ в себя как следующую композицию: $H^q(N, \partial N; R) \to_{f^*} H^q(M, \partial M; R) =_D H_{n-q}(M; \mathcal{H}_n(M)) \to_{g_*} H_{n-q}(N; \mathcal{H}_n(N)) =_D H^q(N, \partial N; R)$. Опять доказывается, что, так как f компактно, образ данного отображения конечномерен. Положим $\Lambda''_{f,g} = \sum_q (-1)^q Sp\theta_q$.

Теорема 1. *Если $g(\partial M) \subset \partial N$ и $\Lambda'_{f,g} \neq 0$, то отображения f, g имеют точку совпадения.*

Теорема 2. *Если $f(\partial M) \subset \partial N$ и $\Lambda''_{f,g} \neq 0$, то f, g имеют точку сопадения.*

Пусть теперь одновременно $f(\partial M) \subset \partial N$, $g(\partial M) \subset \partial N$. Обозначим как $\partial f, \partial g$ отображения $\partial M \to \partial N$, являющиеся ограничениями на ∂M отображений f, g. Так как многообразия $\partial M, \partial N$ не имеют края, то для них оба определения числа Лефшеца отображений $\partial f, \partial g$ совпадают. Соответствующее число Лефшеца обозначим как $\Lambda_{\partial f, \partial g}$.

Теорема 3. *Если $f(\partial M) \subset \partial N$, $g(\partial M) \subset \partial N$, то $\Lambda'_{f,g} - \Lambda''_{f,g} = \Lambda_{\partial f, \partial g}$.*

Во **второй главе** делается редукция теоремы 1 к теореме 2, доказывается теорема 3.

В **третьей главе** определяется индекс совпадения. Делается это следующим образом.

Прежде всего строится класс $\tau \in H^n(N \times intN, (\partial N \times intN) \cup ((N \times intN) \setminus \Delta); R\widehat{\otimes}\mathcal{H}_n(N))$. Через Δ обозначена диагональ в $N \times N$.

Пусть τ_{int} - образующий в группе $H^n(intN \times intN, (intN \times intN) \setminus \Delta; R\widehat{\otimes}\mathcal{H}_n(N)) = H^n(intN \times intN, (intN \times intN) \setminus \Delta; \mathcal{H}_n(N)\widehat{\otimes}R)$, отвечающий единице в $R = H_n(intN; \mathcal{H}_n(N))$.

Рассмотрим вложения пар: $(intN \times intN, (intN \times intN) \setminus \Delta) \subset (N \times intN, (\partial N \times intN) \cup ((N \times intN) \setminus \Delta)) \subset (N \times N, (N \times N) \setminus \Delta)$. Композиция этих вложений индуцирует изоморфизм $H^n(intN \times intN, (intN \times intN) \setminus \Delta; R\widehat{\otimes}\mathcal{H}_n(M)) = H^n(N \times N, (N \times N) \setminus \Delta; R\widehat{\otimes}\mathcal{H}_n(M))$.

Пусть τ - элемент группы $H^n(N \times intN, (\partial N \times intN) \cup ((N \times intN) \setminus \Delta); R\widehat{\otimes}\mathcal{H}_n(M))$, соответсвующий τ_{int} при индуцированных включениями гомоморфизмах когомологий.

Проверяется, что без ограничения общности при доказательстве теоремы 2, мы можем предполагать, что $g(M) \subset intM$.

Пусть $C = \{x \in M : f(x) = g(x)\}$ - множество точек совпадения. Оно компактно. Для компактного $K \subset M$ рассмотрим $d : (M, (M \setminus K) \cup \partial M) \to (M \times M, (\partial M \times M) \cup ((M \times M) \setminus d(K)))$. Соответсвующее отображение гомологий будет обозначаться как d_*: $H^c_*(M, (M \setminus K) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M)) \to H^c_*(M \times M, (\partial M \times M) \cup ((M \times M) \setminus d(K)); R\widehat{\otimes}\mathcal{H}_n(M))$. Если $C \subset K$, то определено отображение $(f \times g)_* : H^c_*(M \times M, (\partial M \times M) \cup ((M \times M) \setminus d(K)); R\widehat{\otimes}\mathcal{H}_n(M)) \to H^c_n(N \times intN, (\partial N \times intN) \cup ((N \times intN) \setminus \Delta); R\widehat{\otimes}\mathcal{H}_n(N))$. Пусть $\mu \in H_n(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M))$ - фундаментальный класс, а $\mu_C \in H^c_n(M, (M \setminus C) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M))$ - образ μ при ограничении в эту группу. Тогда имеется класс $(f \times g)_* d_* \mu_C \in H^c_n(N \times intN, (\partial N \times intN) \cup ((N \times intN) \setminus \Delta); R\widehat{\otimes}\mathcal{H}_n(N))$

Далее определяются умножения для сингулярных гомологий и когомологий с локально постоянными коэффициентами.

Для пар $(X, A), (Y, B)$ с локально постоянными коэффициентами $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ на них, для которых пара $\{X \times B, A \times Y\}$ подпространств в $X \times Y$ вырезаема для сингулярных гомологий с коэффициентами $\mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B}$, определяются декартовы произведения классов гомологий и когомлогий $\times : H^c_p(X, A; \mathcal{A}) \otimes H^c_q(Y, B; \mathcal{B}) \to H^c_{p+q}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y); \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})$ и $\times : H^p(X, A; \mathcal{A}) \otimes H^q(Y, B; \mathcal{B}) \to H^{p+q}(X \times Y, (X \times B) \cup (A \times Y); \mathcal{A}\widehat{\otimes}\mathcal{B})$.

Наконец в случае, если пара $\{A_1, A_2\}$ вырезаема для сингулярных гомологий с коэффициентами в $\mathcal{B}$, то мы так же, как и в случае постоянных коэффициентов, получаем отображение $\frown$: $H^q(X, A_1; \mathcal{A}) \otimes H^c_n(X, A_1 \cup$

$A_2;\mathcal{B}) \to H^c_{n-q}(X, A_2; \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$.

Определется индекс Кронекера: $H^p(X, A_1; \mathcal{A}) \frown H^c_p(X, A_1; \mathcal{A}) \to H^c_0(X) = R$ (т.к. пара $\{A_1, \emptyset\}$ вырезаема).

Индекс совпадения определяется так: $I_{f,g} =< \tau, (f \times g)_* d_*(\mu_C) >$.

Теорема 2 вытекает из следующего утверждения:

Теорема 4. *Если* $f(\partial M) \subset \partial N$, $g(N) \subset intM$, *то* $\Lambda_{f,g} = I_{f,g}$.

Действительно, если $C = \emptyset$, то группа $H^c_n(M, (M \backslash C) \cup \partial M; \mathcal{H}_n(M))$ нулевая, поэтому и элемент μ_C в этом случае нулевой. Следовательно, $I_{f,g} = 0$. Кроме того замечается, что вместо C может быть использовано любое компактное подмножество $K \subset M$, содержащее C.

В **четвертой главе** доказывается теорема 4. Схема доказательства заключается в следующем.

Подготовительный этап включает следующее. Если пара $\{X \times B, A \times Y\}$ вырезаема с коэффициентами $\mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}$, то определяется произведение $/$: $H^n((X, A) \times (Y, B); \mathcal{A} \widehat{\otimes} \mathcal{B}) \otimes H^c_{n-q}(Y, B; \mathcal{B}) \to H^q(X, A; \mathcal{A})$. Оно применяется в случае, когда $(X, A) = (L, BL)$, $\mathcal{A} = R$, $(Y, B) = (N, N \setminus L_1)$, $\mathcal{B} = \mathcal{H}_n(N)$. Здесь L и BL - следующие множества.

Пусть V есть замкнутая окрестность ∂N, гомеоморфная $\partial N \times [0, 1]$. Пусть L - компактное подмножество N, такое что $[f(M)] \subset intL$ и $V \cap L$ имеет вид $BL \times [0, 1]$ для некоторого компактного подмножества $BL \subset \partial N$. Пусть L_1 - также компактное подмножество N, такое что $V \cap L$ имеет вид $BL_1 \times [0, 1]$ для некоторого замкнутого подмножества $BL_1 \subset \partial N$, и при этом $L \subset intL_1$.

Определяется класс $\tau_L \in H^n((L, BL) \times (N, N \backslash L_1); R \widehat{\otimes} \mathcal{H}_n(N)) \simeq H^n((L, BL) \times (intN, intN \setminus L_1); R \widehat{\otimes} \mathcal{H}_n(N))$ как образ определенного выше класса τ при гомоморфизме, определяемом вложением $(L, BL) \times (intN, intN \setminus L_1) = (L \times intN, (BL \times intN) \cup (L \times (intN \setminus L_1)) \subset (N \times intN, (\partial N \times intN) \cup (N \times intN \setminus \Delta))$. Доказывается равенство $\tau_L = \sum_q a^q \times b^{n-q}$, где $a^q \in H^q(L, BL; R), b^{n-q} \in H^{n-q}(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$ (т.к. для произведения некомпактных пар формула Кюннета, вообще говоря, места не имеет, то этот факт нуждается в отдельном доказательстве).

Непосредственно доказательство происходит так. Доказывается, что число Лефшеца, определенное как $\sum_q (-1)^q Sp\theta^q$, где θ^q есть отображение в себя пространства $H^q(N, \partial N; R)$, совпадает с числом $\sum_q (-1)^q Sp\theta'^q$,где θ'^q : $H^q(L, BL; R) \to_{f^*} H^q(M, \partial M; R) =_D H_{n-q}(M; \mathcal{H}_n(M)) \to_{g_*} H_{n-q}(N; \mathcal{H}_n(N)) =_{D'}$

$H^q(N, \partial N; R) \to H^q(L, BL; R)$. После этого доказывается, что отображение $(-1)^{nq}\theta'_q$ совпадает с композицией:

$H^q(L, BL; R) \to_{f^*} H^q(M, \partial M; R) \to_{\frown\mu_K} H^c_{n-q}(M, M \setminus K; \mathcal{H}_n(M)) \to_{g_*} H^c_{n-q}(N, N \setminus L_1; \mathcal{H}_n(N)) \to_{\tau_L/} H^q(L, BL; R)$.

Здесь K - следующее множество. Пусть U есть окрестность ∂M, гомеоморфная $\partial M \times [0, 1]$. Пусть K - компактное подмножество M, такое что $U \cap K$ имеет вид $BK \times [0, 1]$ для некоторого компактного подмножества $BK \subset \partial M$, и при этом $g^{-1}(L_1) \subset intK$.

После этого специальным образом выбираются базисы в группах $H^q(L, BL; R), H^q(M, \partial M; R), H^c_{n-q}(M, M\setminus K; \mathcal{H}_n(M)), H^c_{n-q}(N, N\setminus L_1; \mathcal{H}_n(N))$. Все отображения задаются матрицам в этих базисах. При этом для описания матрицы отображения $\tau_L/$ используется полученное выше представление класса τ_L. После этого $(-1)^{nq} Sp\theta'_q$ выражается через элементы этих матриц, соответвенно мы получаем выражение для числа Лефшеца через элементы этих матриц.

После этого находится аналогичное выражение для индекса совпадений.

Отображение пар $(f \times g)d : (M, (M \setminus K) \cup \partial M) \to (N \times intN, (\partial N \times intN) \cup (N \times intN \setminus \Delta))$ представляется как композиция: $(M, (M \setminus K) \cup \partial M) \to_{d^1} ((M, \partial M) \times (M, M \setminus K)) \to_{f \times g} ((L, BL) \times (intN, intN \setminus L_1)) \to_l (N \times intN, (\partial N \times intN) \cup (N \times intN \setminus \Delta))$, где d^1 индуцировано диагональным вложением $M \subset M \times M$. Тогда после элементарных выкладок получаем равенство $I_{f,g} =< \tau, (f \times g)_* d_* \mu_K >=< d^*(f \times g)^*(\tau_L), \mu_K >$. Выясняется, что такое представление $I_{f,g}$ может быть выражено через элементы введенных ранее матриц и выражения для класса τ_L. Таким образом, мы получим выражение для $I_{f,g}$ через элементы тех же матриц, которые участвовали в выражении для $\Lambda_{f,g}$. Сравнив эти два выражения, мы видим, что они равны. Этим доказывается теорема.

В **пятой** главе рассматриваются другие способы определения числа Лефшеца.

Если $g(\partial M) \subset \partial N$, рассмотрим отображения (при этом $p = n - q$):

1. θ^2_p - отображение $H^p(M, \partial M, \mathcal{H}_n(N))$ в себя, равное $D_M f^* D_N g_*$
2. θ^3_q - композиция $H^c_q(M; R) \to_{f^c_*} H^c_q(N; R) =_{D_N} H^p_c(N, \partial N; \mathcal{H}_n(N)) \to_{g^*_c} H^p_c(M, \partial M; \mathcal{H}_n(M)) =_{D_M} H^c_q(M; R)$. То есть θ^3_q - отображение $H^c_q(M; R)$ в себя, равное $D_M g^*_c D_N f^c_*$
3. θ^4_p - отображение $H^p_c(N, \partial N; \mathcal{H}_n(N))$ в себя, равное $D_N f^c_* D_M g^*_c$

Доказывается, что следых этих отображений существуют и равны следу $Sp\theta^q$. Из этого следует, что с помощью этих отображений также может быть определено число Лефшеца, совпадающее с изначальным с точностью до знака.

Если $f(\partial M) \subset \partial N$, то новые гомоморфизмы определяются так:

1. θ_p^2 - отображение $H_p(M, \mathcal{H}_n(M))$ в себя, равное $D_M f^* D_N g_*$

2. θ_q^3 - композиция $H_q^c(M, \partial M; R) \to_{f_*^c} H_q^c(N, \partial N; R) =_{D_N} H_c^p(N; \mathcal{H}_n(N)) \to_{g_c^*} H_c^p(M; \mathcal{H}_n(M)) =_{D_M} H_q^c(M, \partial M; R)$. То есть θ_q^3 - отображение $H_q^c(M, \partial M; R)$ в себя, равное $D_M g_c^* D_N f_*^c$

3. θ_p^4 - отображение $H_c^p(N; \mathcal{H}_n(N))$ в себя, равное $D_N f_*^c D_M g_c^*$

В **шестой** главе рассматривается следующая задача.

Пусть $f : E \to X$ - отображение компактных конечномерных связных clc-пространств, для которого пучок Лере локально постоянен. Пусть имеются также отображения $g : E \to E$ и $g_1 : X \to X$, для которых коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow f & & f \downarrow \\ X & \xrightarrow[g_1]{} & X \end{array}$$

Возьмем произвольную точку $x \in X$. Как известно, в рассматриваемых условиях слой $\mathcal{H}^*(f)_x$ изоморфен $H^*(f^{-1}(x))$. Под действием g слой $f^{-1}(x)$ отображается в слой $f^{-1}(g_1(x))$, значит, имеется отображение когомологий: $g_1^* : H^*(f^{-1}(g_1(x))) \to H^*(f^{-1}(x))$. В силу постоянства пучка $\mathcal{H}^*(f)$ имеется канонический изоморфизм когомологий $H^*(f^{-1}(x)) \simeq H^*(f^{-1}(g_1(x)))$, поэтому определено отображение $H^*(f^{-1}(x)) \to H^*(f^{-1}(x))$. Число Лефшеца этого отображения обозначим как λ_x. Данное число естественно интерпретировать как число Лефшеца для отображений слоев. Доказывается, что данное число не зависит от x и для чисел Лефшеца отображений g и g_1 имеет место равенство $\lambda(g) = \lambda \cdot \lambda(g_1)$, где λ - число λ_x, не зависящее от x.

В случае, когда пучок Лере локально постоянен, а база X - конечный клеточный комплекс, также доказывается, что число Лефшеца отображений слоев (на этот раз оно существует в непосредственном смысле) не зависит от слоя и верна формула $\lambda(g) = \lambda \cdot \chi(X)$. Здесь λ - число Лефшеца отображений слоев.

В **седьмой** главе рассматривается случай, когда пучок Лере локально постоянен. Приводится пример, когда в случае непостоянного пучка Лере числа Лефшеца отображений в себя слоев над неподвижными точками могут быть неравными.

Предположим, что $g_1 : X \to X$ - клеточное отображение конечного CW-комплекса X. Пусть, кроме того, клетки X настолько малы, что ограничения пучков $\mathcal{H}^*(f) \mid_{g_1(\Delta)}$, $\mathcal{H}^*(f) \mid_{\Delta}$ постоянны для всех клеток Δ клеточного комплекса X.

При этих условиях для $\lambda(g)$ выводится некоторое соотношение, имеющее своим следствием (в случае постоянного $\mathcal{H}^*(f)$) формулу из теоремы 1.

Занумеруем индексом i все клетки X, вне зависимости от их размерности. Клетки будем обозначать как Δ_i^p, где верхний индекс означает размерность. Множество индексов, отвечающих p-мерным клеткам, обозначим как I_p.

Сначала определим число σ_i^p. Имеется индуцированное g отображение клеточных коцепей $g^* : C^p(X) \to C^p(X)$. Имеется коцепь $(\Delta_i^p, 1)$, принимающая значение 1 на клетке Δ_i^p и ноль на остальных клетках. Всевозможные коцепи вида $(\Delta_i^p, 1)$, где $i \in I_p$, образуют базис $C^p(X)$. Пусть $g_1^*(\Delta_i^p, 1) = \sum_{i'} \varphi_{i,i'}(\Delta_{i'}^p, 1)$. Положим $\sigma_i^p = \varphi_{i,i}$. Заметим, что если $\Delta_i^p \not\subseteq g_1(\Delta_i^p)$, то $\sigma_i^p = 0$.

Иначе говоря, σ_i^p есть алгебраическая кратность, с которой Δ_i^p себя накрывает при отображении g_1.

Определим теперь числа λ^i. Пусть i таково, что $\Delta_i^p \subset g_1(\Delta_i^p)$. Пусть $x \in \Delta_i^p$. Так как $\Delta_i^p \subset g_1(\Delta_i^p)$ и так как ограничение пучка $\mathcal{H}^*(f)$ на $g_1(\Delta_i^p)$ постоянно, то мы можем канонически отождествить когомологии слоев $f^{-1}(x)$ и $f^{-1}(g_1(x))$. Поэтому определено число Лефшеца $\lambda^{i,x}$ отображения слоя $f^{-1}(x)$ в слой $f^{-1}(g_1(x))$. Устанавливается, что оно не зависит от x. Обозначим это число как λ^i. Считаем, что $\lambda^i = 0$, если Δ_i^p не содержится в $g_1(\Delta_i^p)$.

Доказывается, что в рассматриваемых условиях верна формула: $\lambda(g) = \sum_p (-1)^p \sum_{i \in I_p} \lambda^i \sigma_i^p$. При этом σ_i^p есть алгебраическая кратность, с которой клетка Δ_i^p накрывает себя посредством g_1, а λ^i есть число Лефшеца отображения в себя слоя над клеткой Δ_i^p.

В случае постоянного пучка Лере все числа λ^i равны между собой, и из полученной формулы следует соотношение из теоремы 5.

В случае же, когда $g_1 = id$ и $\lambda^i = \lambda$ для всех i (см. предложение 18), полученная формула дает соотношение из теоремы 6.

В **восьмой** главе показывается, что пространства с конечнопорожденными гомологиями над $R = \mathbb{Z}$ тогда и только тогда размерно полноценны, когда их локальные гомологии в старшей размерности не имеют кручения (теорема 7). Естественно называть такие пространства гомологическими или обощенными полиэдрами. В **девятой** главе устанавливается наличие компактов с конечнопорожденными локальными гомологиями (тем самым одновременно гомологически и периферическими гомологически локально связных над $\mathbb{Z}$), для размерности произведений которых логарифмический закон не имеет места. Строящийся пример является модификацией конструкции, использовавшейся Дранишниковым для построения контрпримера к гипотезам Дайера и Борсука. В **десятой** главе обсуждается сложность по сравнению с обобщенными многогобразиями локального устройства обощчнных полиэдров. Именно, в предложении 4 приводится пример гомологического полиэдра, такого что на всюду плотном множестве локальные гомологии в наибольшей размерности обращаются в ноль.

Благодарности.

В заключении хочу выразить благодарность своему научному руководителю, профессору Е.Г. Скляренко, за постановку задач и постоянное внимание к работе, а также всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии за доброжелательную и творческую атмосферу.

Список работ по теме диссертации.

1. Д.В. Артамонов. Локальные гомологии и размерная полноценность. - Мат. заметки. - 2007, т. 81 вып. 5, С. 643-659.

2. Д.В. Артамонов. Числа Лефшеца для отображений расслоенных пространств. - Мат. заметки. - 2008, т. 84 вып 5, С. 643-657.