МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 512.772.1

ГОРСКИЙ Евгений Александрович

МОТИВНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ И ИНВАРИАНТЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Специальность 01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2009

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук профессор Гусейн-Заде Сабир Меджидович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук Казарян Максим Эдуардович (Математический институт имени В. А. Стеклова Российской академии наук);

доктор физико-математических наук Ландо Сергей Константинович (Высшая Школа Экономики).

Ведущая организация: Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 17 апреля 2009 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 17 марта 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая диссертация посвящена вычислению и описанию свойств мотивных интегралов, связанных с инвариантами особых точек плоских комплексных алгебраических кривых. Эти интегралы связаны как со структурой нормирований на локальной алгебре особенности, изучавшихся ещё в работах О. Зарисского, так и с топологическими инвариантами алгебраических узлов – многочленом Александера и гомологиями Хегора-Флоера, введёнными П. Ожватом и З. Сабо сравнительно недавно.

Мотивное интегрирование было введено М. Л. Концевичем в 1995 году для доказательства гипотезы Батырева[1] о совпадении чисел Ходжа у бирационально эквивалентных многообразий Калаби-Яу. Вскоре после этого Я. Денеф и Ф. Лозер ввели мотивную меру на пространстве дуг на многообразии[2] и доказали для него формулу замены переменных в полной общности, а также связали мотивные интегралы с p-адическими[3].

С другой стороны, в 1994 году А. Кампильо, Ф. Дельгадо и К. Кийек[4] при исследовании наборов нормирований на локальной алгебре особенности, определяемых неприводимыми компонентами, ввели понятие ряда Пуанкаре мультииндексной фильтрации и установили свойство симметрии для этого ряда. Затем в серии работ А. Кампильо, Ф. Дельгадо и С. М. Гусейн-Заде обнаружили и доказали[5] связь этого ряда Пуанкаре с топологическими инвариантами особенности. Пересечение комплексной кривой со сферой малого радиуса – это узел или зацепление, для которого определён многочлен Александера. Оказывается, ряд Пуанкаре фильтрации на локальной алгебре с точностью до множителя совпадает с этим полиномом Александера, что, в частности, даёт эффективный геометрический способ его вычисления.

Метод доказательства теоремы Кампильо–Дельгадо–Гусейн-Заде основан на интегрировании по эйлеровой характеристике, введенном О. Я. Виро[6]. Ряд Пуанкаре оказывается равным некоторому интегралу по эйлеровой характеристике по проективизации пространства функций. В

[1]V. Batyrev. Birational Calabi–Yau n-folds have equal Betti numbers. New trends in algebraic geometry (Warwick, 1996), 1–11, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 264, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[2]J. Denef, F. Loeser. Germs of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration. Inventiones Math. (1999), no.1, 201–232.

[3]J. Denef, F. Loeser. Motivic Igusa zeta functions. J. Alg. Geom. (1998), 505–537.

[4]A. Campillo, F. Delgado, K. Kiyek. Gorenstein property and symmetry for one-dimensional local Cohen-Macaulay rings. Manuscripta Math. (1994), no. 3–4, 405–423.

[5]A. Campillo, F. Delgado, S. M. Gusein-Zade. The Alexander polynomial of a plane curve singularity via the ring of functions on it. Duke Math J. (2003), no. 1, 125–156.

[6]O. Viro. Some integral calculus based on Euler characteristic. Topology and Geometry – Rohlin seminar. Lect. Notes Math. , Berlin, Heidelberg, New York: Springer (1988), 127–138.

последующих работах было предложено естественное обобщение этого интеграла – мотивный интеграл по пространству функций, конструкция которого аналогична конструкции Концевича. Вычислению обобщённого интеграла и его аналогов и посвящена настоящая диссертация.

Другим естественным обобщением многочлена Александера является теория гомологий Хегора-Флоера, построенная в 2004 году П. Ожватом и З. Сабо[7] и затем развитая ими и их школой в большом количестве работ. Градуированная эйлерова характеристика этой теории гомологий совпадает с многочленом Александера зацепления, для этой теории выполняется аналог двойственности Пуанкаре, можно построить большое количество естественных спектральных последовательностей. Кроме того, вскоре после ее открытия оказалось, что гомологии Хегора-Флоера несут в себе большое количество глубокой геометрической информации об узле. Так, Ожват и Сабо доказали[8], что род узла равен наибольшему номеру ненулевых гомологий Хегора-Флоера, что, например, дало новое доказательство гипотезы Милнора о роде торического узла. Отметим, что до того Дж. Расмуссен доказал[9] гипотезу Милнора при помощи оценок, получающихся из другой теории гомологий узлов – гомологий Хованова[10]. Для гомологий Хегора-Флоера аналогичные оценки оказываются точными. Далее, Йи Ни в 2007 году доказал[11], что узел является расслоенным тогда и только тогда, когда размерность гомологий с максимальным номером равна единице. Кроме того, П. Ожват, З. Сабо, К. Манолеску, С. Саркар и Д. Тёрстон построили[12,13] комбинаторную конструкцию для гомологий Хегора-Флоера, которая впоследствии упрощалась в работах А. Беляковой и П. Дроза[14,15].

Цель работы. Цель диссертации — построить алгоритм вычисления мотивного ряда Пуанкаре, исследовать его свойства и связь с другими топологическими инвариантами особенности.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Сформулирована и доказана теорема о соответствии мотивных мер на проективизации $\mathbb{P}\mathcal{O}$ пространства ростков аналитических

[7] P. Ozsvath, Z. Szabo. Holomorphic discs and knot invariants. Adv. Math. (1), 2004, 58–116.

[8] P. Ozsvath, Z. Szabo. Holomorphic discs and genus bounds. Geometry and topology (2004), 311–334.

[9] J. Rasmussen. Khovanov homology and the slice genus. arXiv:math.GT/0402131.

[10] M. Khovanov. A categorification of the Jones polynomial. Duke Math. J. (2000), 359–426.

[11] Y. Ni. Knot Floer homology detects fibered knots. Invent. Math. (2007), no. 3, 577–608.

[12] C. Manolescu, P. Ozsvath, S. Sarkar. A combinatorial description of knot Floer homology. arXiv: math/0607691

[13] C. Manolescu, P. Ozsvath, Z. Szabo, D. Thurston. On combinatorial link Floer homology. Geom. Topol. (2007), 2339–2412.

[14] A. Beliakova. Simplification of combinatorial knot Floer homology. arXiv:math.GT/0705.0669.

[15] J.-M. Droz. Effective computation of knot Floer homology. arXiv:math.GT/0803.2379.

функций на плоскости в начале координат и на пространстве $\sqcup_k S^k(\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*)$ неупорядоченных наборов кривых, являющемся объединением всевозможных симметрических степеней факторпространства пространства параметризованных формальных кривых по действию группы гомотетий. Коэффициент, связывающий мотивные меры на этих пространствах, зависит от кривой и выражается через число точек самопересечения её общего шевеления.

2. Построен явный алгоритм вычисления мотивного ряда Пуанкаре особенности произвольной плоской кривой. Доказано, что мотивный ряд Пуанкаре $P_g(t_1, \ldots, t_r; q)$ является рациональной функцией, а приведенный мотивный ряд Пуанкаре

   $\overline{P_g}(t_1, \ldots, t_r; q) = P_g(t_1, \ldots, t_r; q)(1-qt_1) \cdot \ldots \cdot (1-qt_r)$ является многочленом. Дается явное выражение для степени этого многочлена. Также доказывается свойство инвариантности приведённого мотивного ряда Пуанкаре относительно замены $t_i \leftrightarrow \frac{1}{qt_i}$.

3. Построено преобразование, связывающее коэффициенты мотивного ряда Пуанкаре и приведённого мотивного ряда Пуанкаре неприводимой особенности плоской кривой, с инвариантами Хегора-Флоера узла, получающегося в пересечении этой кривой с малой сферой с центром в начале координат.

Методы исследования. В работе используются методы теории особенностей, основанные на изучении вложенных разрешений особенностей плоских кривых. Важную роль играют теорема Я. Денефа и Ф. Лозера о замене переменных в мотивном интеграле, теорема Н. А' Кампо[16] о связи дзета-функции особенности с геометрией её разрешения, формула А. Кампильо, Ф. Дельгадо и С. М. Гусейн-Заде[17], выражающая мотивный ряд Пуанкаре в виде суммы некоторого количества формальных степенных рядов. Также широко используется степенная структура на кольце Гротендика квазипроективных многообразий, предложенная И. Луенго, А. Мелье-Эрнандезом и С. М. Гусейн-Заде[18].

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы диссертации могут найти применение в теории особенностей, комплексной алгебраической геометрии, и могут быть полезны специалистам, работающим в МГУ, МИРАН, СПбГУ и др.

[16] N. A'Campo. La fonction zeta d'une monodromie. Comment. Math. Helv., (1975), 233–248.

[17] A. Campillo, F. Delgado, S. M. Gusein-Zade. Multi-index filtrations and motivic Poincaré series. Monatshefte für Mathematik. (2007), no.3, 193-210.

[18] S. M. Gusein-Zade, I. Luengo, A. Melle-Hernández. A power structure over the Grothendieck ring of varieties. Math. Res. Lett. (2004), no.1, 49–57.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались:

- Неоднократно (2003-2008 гг.) на научно-исследовательском семинаре «Топологические инварианты особенностей» кафедры высшей геометрии и топологии МГУ; руководитель проф., д.ф.-м.н. С. М. Гусейн-Заде.

- На научной конференции памяти А. Д. Александрова, МГУ, г. Москва, в мае 2006 года.

- На международной конференции-школе CIMPA «Новые направления в теории особенностей» , Мадрид (Испания), в августе 2006 года.

- На международной конференции «Дзета-функции в алгебре и геометрии», Сеговия (Испания), в июне 2007 года.

- На швейцарско-русском семинаре «Пространства модулей и математическая физика», Цюрих (Швейцария), в декабре 2007 года.

- На международной конференции-школе YMIS «Пространства дуг, интегрирование и комбинаторная алгебра», Седано (Испания), в феврале 2008 года.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырех работах автора, список которых приведён в конце автореферата [1-4].

Структура диссертации. Диссертация состоит из введения и пяти глав. Текст диссертации изложен на 105 страницах. Список литературы содержит 92 наименования.

Содержание работы

Во введении описана история рассматриваемой проблемы, приведён список основных результатов, изложено содержание диссертационной работы и дан список основных обозначений.

Глава 2 содержит основные понятия и факты теории особенностей и теории мотивного интегрирования, используемые в дальнейшем. В ней вводится кольцо Гротендика комплексных квазипроективных многообразий[19]. Затем в параграфе 2.2 вводятся мотивные меры и мотивные интегралы на различных пространствах, принимающие значения в пополненной локализации кольца Гротендика многообразий по классу комплексной прямой, приводятся простейшие примеры вычисления мотив-

[19]F. Bittner. The universal Euler characteristic for varieties of characteristic zero. Compos. Math. (2004), no. 4, 1011–1032.

ных интегралов. Следующий параграф 2.3 посвящён основному техническому средству в теории мотивного интегрирования – формуле замены переменных в мотивном интеграле, доказанной Денёфом и Лозером. Приводятся примеры вычисления естественных мотивных интегралов по пространству дуг, подсчёт которых напрямую был бы весьма тяжёлым без применения формулы замены переменной. Также приводится доказательство гипотезы Батырева, принадлежащее Концевичу. Оно показывает, что теория мотивного интегрирования может быть успешно применена в естественных и важных задачах, формулировка которых не использует кольца Гротендика.

В параграфе 2.4 вводятся основные понятия топологической теории особенностей: число Милнора особенности[20,21], линк, расслоение Милнора, дзета-функция монодромии. Формулируется теорема А' Кампо, выражающая число Милнора и дзета-функцию особенности через её вложенное разрешение.

Глава 3 посвящена функциональным уравнениям на различные мотивные интегралы по пространству дуг, связанным с формулой замены переменной. Основными результатами главы являются теоремы 2 и 3, в которых доказывается функциональное уравнение на мотивный интеграл, соответствующий числу Милнора, и единственность решения этого уравнения.

Теорема. Пусть μ – число Милнора, а v_x и v_y – индексы пересечения дуги с осями координат. Рассмотрим мотивный интеграл

$$I(t,a,b,c,d,f)=\int_{\mathcal{L}} t^{\mu}a^{v_x}b^{v_y}c^{v_x^2}d^{v_xv_y}f^{v_y^2}d\chi_g.$$

Имеет место функциональное уравнение:

$$I(t,a,b,c,d,f)=I(t,t^{-1}ab\mathbb{L}^{-1},b,tcdf,df^2,f)+I(t,t^{-1}ab\mathbb{L}^{-1},a,tcdf,dc^2,c)+$$
$$+I(t,t^{-1}ab\mathbb{L}^{-1},1,tcdf,1,1)\cdot(\mathbb{L}-1).$$

Это уравнение имеет единственное с точностью до умножения на константу решение в классе формальных степенных рядов, делящихся на $abcdf$.

В теореме 4 дается явно выражение для компонент функции $I(t,a,b,c,d,f)$.

Теорема. Пусть $a =$НОД(k,m). Тогда

$$G_{k,m}(t,\mathbb{L})=\int_{\{\mathrm{Ord}_{x(t)=k},\mathrm{Ord}_{y(t)=m}\}} t^{\mu(\gamma)}d\gamma=$$

[20]Дж. Милнор. Особые точки комплексных гиперповерхностей.-М.: Мир, 1971.

[21]В. И. Арнольд, А. Н. Варченко, С. М. Гусейн-Заде. Особенности дифференцируемых отображений. - М. Наука, 1984.

$$= (\mathbb{L}-1)^2 \cdot t^{(k-1)(m-1)}\mathbb{L}^{-k-m} \cdot \sum_{\underline{a},\underline{b}} \prod_{j=1}^{r} \mu(\frac{b_j}{a_{j-1}}) \times$$

$$\times \frac{(\mathbb{L}-1)t^{(a_j-1)b_j}\mathbb{L}^{-b_j}(1-t^{(a_j-1)(a_j-b_j)}\mathbb{L}^{b_j-a_j})}{(1-t^{a_j(a_j-1)}\mathbb{L}^{1-a_j})\cdot(1-t^{(a_j-1)b_j}\mathbb{L}^{-b_j})},$$

где суммирование ведётся по всевозможным наборам

$$(1 = a_0 \leq b_1 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_{r-1} \leq b_r \leq a_r = a)$$

таким, что $a_{j-1}|b_j$, $b_j|a_j$ и $b_j < a_j$ для всех j (r не фиксировано).

В левой части μ обозначает число Милнора, а в правой части – функцию Мёбиуса, но появление одного и того же обозначения для двух разных объектов не должно вызывать непонимания.

Замечание. Из определения видно, что $G_{k,m}(t,\mathbb{L})$ действительно являются компонентами функции $I(t,a,b,c,d,f)$, а именно, имеет место равенство

$$I(t,a,b,c,d,f) = \sum_{k,m=1}^{\infty} G_{k,m}(t,\mathbb{L}) a^k b^m c^{k^2} d^{km} f^{m^2} \tag{1}$$

Приводятся примеры вычисления этих компонент, в простейших из них результат теоремы 4 сравнивается с прямым вычислением. Теорема 4 позволяет также доказать неожиданное свойство симметрии для функции I и её компонент.

Следствие 1

$$G_{k,m}(t^{-1},\mathbb{L}^{-1}) = t^{-2(k-1)(m-1)}\mathbb{L}^{2k+2m-2} \cdot G_{k,m}(t,\mathbb{L}).$$

Следствие 2

$$I(t,\mathbb{L};a,b,c,d,e) = t^2\mathbb{L}^2 I(t^{-1},\mathbb{L}^{-1}; at^{-2}\mathbb{L}^{-2}, bt^{-2}\mathbb{L}^{-2}, c, dt^2, e).$$

В параграфе 3.4 рассматривается естественная деформация функционального уравнения на $I(t,a,b,c,d,f)$ с бесконечным числом дополнительных параметров, в теореме 5 доказывается аналог теоремы 4 для деформированной задачи. Решение по-прежнему удовлетворяет свойству симметрии, однако введение дополнительных параметров выявляет новые функционально-дифференциальные соотношения, доказанные в теореме 5.

Кроме того, в главе 3 приведено аналогичное функциональное уравнение для мотивного интеграла, соответствующего индексу пересечения кривых.

В главе 4 обсуждается связь между мотивными мерами на пространствах параметризованных кривых и функций на плоскости. В параграфе 4.1 вводится понятие степенной структуры, введённое Гусейн-Заде, Луэнго и Мелье-Эрнандезом, и описывается степенная структура на кольце Гротендика многообразий. При помощи степенной структуры вводится естественное продолжение мотивной меры на объединение всевозможных симметрических степеней пространства дуг. Основными результатами этой главы является теоремы 7 и 8, в которых описывается универсальные множители, описывающие переход между мерами.

Теорема. Пусть $\mu(\gamma)$ – число Милнора, а $r(\gamma)$ – число неприводимых компонент ростка кривой γ, обозначим $\delta(\gamma) = \frac{1}{2}(\mu(\gamma) + r(\gamma) - 1)$. Пусть $a(\gamma)$ – произвольная измеримая функция на пространстве $\sqcup_k S^k\mathcal{B}$. Тогда

$$\int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} a(Z(f))d\mu = \int_{\sqcup_k S^k(\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*)} (p^*a)\mathbb{L}^{-\delta(\gamma)}d\mu.$$

Здесь $\mathcal{O}$ – пространство формальных ростков функций на плоскости в начале координат, $\mathbb{P}\mathcal{O}$ – его проективизация, $\mathcal{L}$ - пространство ростков параметризованных формальных кривых (дуг) на плоскости в начале координат, $\mathcal{B} = \mathcal{L}^*/Aut(\mathbb{C}, 0)$, а $Z : \mathbb{P}\mathcal{O} \to \sqcup_k S^k(\mathcal{L}^*/\mathbb{C}^*)$ – произвольная параметризация компонент кривой $\{f = 0\}$.

В параграфе 4.3 приводятся примеры, в которых независимо вычисляются левая и правая меры, а также коэффициент перехода. В частности, из теоремы 8 следует формула Габриэлова-Хованского-Кушниренко[22] для модальности торической особенности.

Кроме того, доказывается теорема 9, описывающая связь между эйлеровыми характеристиками подмножеств в проективизации пространства функций и пространстве неупорядоченных наборов дуг. Так как множество нулевой мотивной меры может иметь ненулевую эйлерову характеристику, теорема 9 немного отличается от теорем 7 и 8.

Глава 5 составляет техническое ядро диссертации. В ней строится алгоритм вычисления мотивного интеграла по проективизации пространсва функций, аналогичного ряду Пуанкаре особенности.

Пусть $C = \cup_{i=1}^r C_i$ – росток плоской кривой,

$$\gamma_i : (\mathbb{C}, 0) \to (C_i, 0) -$$

униформизации его неприводимых компонент. Если $f \in \mathcal{O}$ – росток функции на $(\mathbb{C}^2, 0)$, положим

$$v_i(f) = Ord_0 f(\gamma_i(t)),$$

[22]A. G. Kouchnirenko. Polyederes de Newton et nombres de Milnor. - Invent. Math. (1976), 1–31.

и ряд Пуанкаре кривой C определяется как интеграл по эйлеровой характеристике по проективизации пространства функций:

$$P^C(t_1, \ldots, t_r) = \int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} t_1^{v_1} \cdot \ldots \cdot t_r^{v_r} d\chi. \tag{2}$$

Например, если C неприводима, можно определить убывающую фильтрацию

$$\mathcal{O} \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots, \qquad J_n = \{f \in \mathcal{O} | v_1(f) \geq n\}, \tag{3}$$

и

$$P^C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \dim J_n / J_{n+1}. \tag{4}$$

Через $\Delta^C(t_1, \ldots, t_n)$ обозначим полином Александера пересечения C с маленькой сферой с центром в начале координат. Теорема Кампильо, Дельгадо и Гусейн-Заде утверждает, что если $r = 1$, то

$$(1 - t)P^C(t) = \Delta^C(t), \tag{5}$$

а если $r > 1$, то

$$P^C(t_1, \ldots, t_r) = \Delta^C(t_1, \ldots, t_r).$$

В последующих работах Кампильо, Дельгадо и Гусейн-Заде была предложена следующая естественная деформация ряда Пуанкаре. Рассмотрим мотивный интеграл, обобщающий (2):

$$P_g^C(t_1, \ldots, t_r) = \int_{\mathbb{P}\mathcal{O}} t_1^{v_1} \cdot \ldots \cdot t_r^{v_r} d\mu. \tag{6}$$

Если $r = 1$, можно переписать (6) как деформацию (4):

$$P_g^C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \frac{q^{\operatorname{codim} J_n} - q^{\operatorname{codim} J_{n+1}}}{1 - q}, \tag{7}$$

и в этом случае ряд $P_g(t)$ легко определяется по $P(t)$. Если $r > 1$, ситуация усложняется: мотивный ряд Пуанкаре не определяется $P(t)$, и метод его вычисления существенно сложнее. Тем не менее, в диссертации приводится явный алгоритм его вычисления. Кроме того, оказывается полезным использовать следующее выражение.

Определение 1

$$\overline{P}_g(t_1, \ldots, t_r) = (1 - qt_1) \cdot \ldots \cdot (1 - qt_r) \cdot P_g(t_1, \ldots, t_r). \tag{8}$$

В диссертации доказываются следующие свойства приведённого мотивного ряда Пуанкаре.

1. **Полиномиальность.** $\overline{P}_g(t_1, \ldots, t_n; q)$ является многочленом от переменных $t_1, \ldots, t_n$ и q. Дается оценка для его степени по переменным $t_1, \ldots, t_n$.

2. **Сведение к многочлену Александера.** Если $n = 1$, то
$$\overline{P}_g(t; q = 1) = \Delta(t),$$
где Δ обозначает многочлен Александера линка соответствующей особенности плоской кривой. Если $n > 1$, то
$$\overline{P}_g(t_1, \ldots, t_n; q = 1) = \Delta(t_1, \ldots, t_n) \cdot \prod_{i=1}^{n}(1 - t_i).$$

3. **Забывание компонент.** Пусть C – росток плоской кривой с n компонентами, а C_1 – неприводимая кривая. Тогда
$$\overline{P}_g^{C \cup C_1}(t_1, \ldots, t_n, t_{n+1} = 1) = (1 - q)\overline{P}_g^{C}(t_1, \ldots, t_n). \tag{9}$$
Если у C только одна компонента, то
$$\overline{P}_g^{C}(t = 1) = 1.$$
Это свойство легко вывести из выражения (6), но, тем не менее, оно кажется интересным и, например, не выполняется для многочлена Александера.

4. **Симметрия.** Пусть μ_α – число Милнора кривой C_α, $(C_\alpha \circ C_\beta)$ – индекс пересечения кривых C_α и C_β, $\mu(C)$ – число Милнора ростка C. Положим
$$l_\alpha = \mu_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha}(C_\alpha \circ C_\beta), \quad \delta(C) = (\mu(C) + n - 1)/2.$$
Известно, что многочлен Александера симметричен в том смысле, что выполнено следующее равенство:
$$\Delta(t_1^{-1}, \ldots, t_n^{-1}) = \prod t_\alpha^{1-l_\alpha} \cdot \Delta(t_1, \ldots, t_n)$$
при $n > 1$, и
$$\Delta(t^{-1}) = t^{-\mu}\Delta(t)$$
при $n = 1$.

В диссертации доказвается обобщение этого равенства, а именно,
$$\overline{P}_g(\frac{1}{qt_1}, \ldots, \frac{1}{qt_n}) = q^{-\delta(C)} \prod_{\alpha} t_\alpha^{-l_\alpha} \cdot \overline{P}_g(t_1, \ldots, t_n).$$

На более топологическом языке, μ_α равняется удвоенному роду узла – линка кривой C_α, а $(C_\alpha \circ C_\beta)$ равняется коэффициенту зацепления соответствующих узлов. Отметим также, что имеет место тождество

$$\sum_{\alpha=1}^{n} l_\alpha = 2\delta(C).$$

5. **Связь с гомологиями узлов.** Для неприводимых кривых доказывается, что $\overline{P}_g(t)$ можно связать посредством несложной процедуры с многочленом Пуанкаре для гомологий Хегора-Флоера соответствующего узла. Так как симплектическая топология, стоящая за определением гомологий Хегора-Флоера, весьма далека от алгебраической конструкции ряда Пуанкаре, равенство ответов кажется неожиданным.

В параграфе 5.1 определяется ряд Пуанкаре особенности плоской кривой, и затем мотивный ряд Пуанкаре. Для неприводимых кривых доказывается формула, выражающая мотивный ряд Пуанкаре через обыкновенный ряд Пуанкаре. В заключение в разделе 5.1.4 приводится общая формула для мотивного ряда Пуанкаре, принадлежащая Кампилью, Дельгадо и Гусейн-Заде. Она записана в терминах вложенного разрешения особенности и включает большое количество суммирований по вспомогательным переменным. Остаток главы 5 посвящен упрощению этой формулы, построению алгоритма для эффективного вычисления мотивного ряда Пуанкаре, а также описанию свойств этого ряда.

В параграфе 5.2 во всех подробностях описывается процесс применения формулы Кампилью–Дельгадо–Гусейн-Заде к неособой кривой. Хотя ответ легко вычислить, прямая подстановка в формулу оказывается технически не совсем очевидной, и этот пример может служить моделью для вычислений в общем случае, рассматривающихся в дальнейшем.

Параграф 5.3 содержит, в основном, комбинаторные утверждения технического характера. Итогом комбинаторной работы служит теорема 12, описывающая явный алгоритм, позволяющий за конечное время вычислить мотивный ряд Пуанкаре. В важном семействе частных случаев алгоритм немного упрощается, как описывается в лемме 19. К сожалению, неизвестно, существует ли компактная явная формула для мотивного ряда Пуанкаре, поэтому структура ответа в теореме 12 довольно сложна: он выражен через величины $d_P(n)$, производящая функция для которых может быть выписана явно, хотя и не очень компактно. Другая форма записи ответа предлагается в леммах 15 и 16: мотивный ряд Пуанкаре выражен через величины $c_K(n)$, производящая функция для которых сравнительно простая и разлагается в произведение.

Одна из технических сложностей состоит в том, что ненулевых значений $c_K(n)$, вообще говоря, бесконечное количество, поэтому, после их подстановки в лемму 16, получится бесконечное число слагаемых, все из которых, за исключением конечного числа, сократятся. Чтобы сделать алгоритм конечным, необходимо учесть все эти сокращения, что существенно усложняет вид производящей функции.

В параграфе 5.4 алгоритм из теоремы 12 применяется к особенностям, разрешение которых содержит одну, две или три компоненты исключительного дивизора. В ряде частных случаев ответ сравнивается с данными, полученными напрямую.

В параграфе 5.5 доказывается свойство симметрии (теорема 13) для мотивного ряда Пуанкаре, обобщающее свойство симметрии, доказанное Кампильо, Дельгадо и Кийеком. Проводится аналогия между теоремой 13 и функциональным уравнением для дзета-функции Капранова[23,24]. Кроме того, свойство симметрии дает явную оценку для степени приведённого мотивного ряда Пуанкаре по каждой переменной.

Глава 6 посвящена сравнительно новым мощным инвариантам узлов – гомологиям Хегора-Флоера, введённым П. Ожватом и З. Сабо. Параграф 6.1 содержит основные определения и свойства этой теории гомологий, в частности, связь градуированной эйлеровой характеристики с многочленом Александера от нескольких переменных. Свойства полинома Пуанкаре для гомологий Хегора-Флоера имеют много общего со свойствами мотивного ряда Пуанкаре особенности – оба они удовлетворяют свойству симметрии, одинаково ведут себя при забывании компонент зацепления и при специализации в эйлерову характеристику. Эта формальная аналогия наталкивает на мысль о сравнении соответствующих многочленов.

В теореме 16 доказывается, что для неприводимых особенностей многочлен Пуанкаре для гомологий Хегора-Флоера связан с приведённым мотивным рядом Пуанкаре несложной заменой переменных. Это утверждение следует из того факта, что оба многочлена одним и тем же образом могут быть получены из многочлена Александера и им полностью определяются. Для гомологий Хегора-Флоера алгебраических узлов это было установлено Ожватом и Сабо при помощи разрешения особенностей и пламбинг-конструкции, а для мотивного ряда Пуанкаре неприводимой особенности это вытекает из его определения. Оказывается, совпадение многочленов Пуанкаре не совсем случайно. В диссертации строится фильтрованнный цепной комплекс, тесно связанный с мотивным

[23] F. Heinloth. A note on functional equations for zeta functions with values in Chow motives. Ann. Inst. Fourier (Grenoble), (2007), no. 6, 1927–1945.

[24] M. Kapranov. The elliptic curve in the S-duality theory and Eisenstein series for Kac-Moody groups, arXiv: math.AG/0001005

рядом Пуанкаре, свойства которого полностью аналогичны свойствам комплекса Хегора-Флоера для соответствующего узла. Более того, описанный в утверждении 12 набор этих свойств полностью определяет градуированные числа Бетти как данного комплекса, так и всех естественно связанных с ним комплексов. Таким образом, конструкция такого комплекса дает более прозрачное доказательство теоремы 16.

Для особенностей с большим количеством компонент (соответственно, зацеплений) гомологии Хегора-Флоера и мотивный ряд Пуанкаре уже нельзя напрямую получить из многочлена Александера, поэтому их связь не удается установить. Тем не менее, в разделе 6.2.4 для серии особенностей A_{2k-1}, имеющих две неприводимые компоненты, явно вычисляются как гомологии Хегора-Флоера, так и мотивные ряды Пуанкаре. Ответы получаются похожими, что указывает на возможную связь между ними.

Автор благодарит своего научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Сабира Меджидовича Гусейн-Заде за постановку задачи, внимание и интерес к работе. Автор также благодарит всех сотрудников кафедры высшей геометрии и топологии за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Е. А. Горский. О дивизорных фильтрациях в пучках. Математические заметки, 2006, **79**:6, 825–837.

[2] Е. А. Горский. Мотивные интегралы и функциональные уравнения. Алгебра и анализ, 2007, **19**:4, 92–112.

[3] Е. А. Горский. Симметрии мотивных интегралов. УМН, 2008, **63**:4 (382), 179–180.

[4] E. Gorsky. On the motivic measure on the space of functions. Revista Matematica Complutense, **20**(2007), no. 2, 507–521.