Московский Государственный Университет
имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.214.4

Осмоловский Игорь Юрьевич

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В ЦЕНТРАЛЬНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Специальность: 01.01.05 - Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва - 2009 г.

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета в Московском Государственном Университете имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Сенатов Владимир Васильевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук
профессор
Круглов Виктор Макарович,

доктор физико-математических наук
профессор
Хохлов Юрий Степанович.

Ведущая организация: Санкт-Петербургское отделение математического института.

Защита диссертации состоится 29 мая 2009 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском Государственном Университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, Главное Здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 28 апреля 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И.Н.Сергеев

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы

Одним из фундаментальных результатов теории вероятностей является центральная предельная теорема (ЦПТ), которая утверждает, что при достаточно широких условиях сумма многих случайных величин имеет приблизительно нормальное распределение. В ЦПТ рассматриваются независимые и слабо зависимые случайные величины, одинаково и различно распределенные случайные величины, действительные случайные величины и случайные величины, принимающие значения в многомерных пространствах и т.д. Простейший вариант ЦПТ связан с независимыми одинаково распределенными случайными величинами (н.о.р.с.в.) с конечными дисперсиями, при этом без ограничения общности можно считать, что среднее значение этих случайных величин равно нулю, а дисперсия - единице. В этом случае ЦПТ можно сформулировать в следующем виде.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - н.о.р.с.в. с $\mathsf{E}X_1 = 0$ и $\mathsf{D}X_1 = 1$. Обозначим через F общую функцию распределения (ф.р.) этих случайных величин и $F_n(x) = \mathsf{P}(\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}} < x)$ - функцию распределения нормированной суммы $\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$ первых n из этих случайных величин. ЦПТ утверждает, что

$$F_n(x) \to \Phi(x) \ \text{ при } n \to \infty$$

равномерно по $-\infty < x < \infty$, где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$ - функция распределения стандартного нормального закона. При выполнении некоторых дополнительных условий у ф.р. $F_n(x)$ существует плотность $p_n(x)$ и $p_n(x) \to \varphi(x)$ при $n \to \infty$ равномерно по $-\infty < x < \infty$, где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ - плотность стандартного нормального закона.

Важность ЦПТ объясняется тем, что она позволяет в практических расчетах заменять (при больших n) ф.р. F_n на ф.р. Φ, работа с которой не представляет трудностей. Функцию распределения $F_n(x)$ можно записать в виде $F^{*n}(\sqrt{n}x)$, где ^{*n} означает $n-$кратную свертку функции распределения F, точнее,

$$F^{*n}(x) = \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty}}_{n-1} F(x-y_1-\cdots-y_{n-1}) dF(y_1) \ldots dF(y_{n-1}), \ -\infty < x < \infty,$$

то есть $F_n(x)$ является многократной нормированной сверткой ф.р. F с самой собою. Хорошо известно, что свертки распределений в явном виде вычисляются лишь в исключительных случаях, и даже в этих случаях расчет многократных сверток напрямую обычно невозможен.

Например, в случае, когда $F(x)$ является экспоненциальным распределением с параметром единица, то есть $F(x) = 0$ при $x < 0$ и $F(x) = 1 - e^{-x}$ при $x \geqslant 0$

$$F^{*n}(x) = 1 - \mathsf{P}\left(X_1 + \cdots + X_n > x\right) = 1 - \sum_{r=0}^{n-1} e^{-x}\frac{x^r}{r!}$$

при $x > 0$. Прямые расчеты по этой формуле при больших n невозможны хотя бы из-за того, что $70! > 10^{100}$. Как уже отмечалось, ЦПТ позволяет заменять многократные свертки нормальными законами, работа с которыми не вызывает трудностей. Однако, при такой замене мы всякий раз (за исключением тривиального случая, когда F – нормальная функция распределения) совершаем некоторую ошибку, и возникает естественный вопрос о величине этой ошибки, или, как иногда говорят, о точности аппроксимации в ЦПТ.

Одним из самых известных результатов в этом направлении является теорема Берри[1]–Эссена[2], которая гарантирует, что

$$\rho(F_n, \Phi) = \sup_{-\infty<x<\infty} |F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant c\frac{\mathsf{E}|X_1|^3}{\sqrt{n}}, \qquad (1)$$

где c - некоторая константа. Эта оценка является неулучшаемой с точностью до значения константы c, для которой известна как верхняя оценка[3] $c < 0,7056$, так и нижняя оценка $c \geqslant \frac{3+\sqrt{10}}{6\sqrt{2\pi}} = 0,409...$[4]. К сожалению, точность оценки Берри-Эссена невелика. Если мы захотим гарантировать с помощью (1) справедливость неравенства $\rho(F_n, \Phi) \leqslant 10^{-3}$, то в силу того, что $\mathsf{E}|X_1|^3 \geqslant 1$ (это следует из неравенства Ляпунова), величина n должна быть более $(10^3 c)^2 > 160000$. В случае, когда нормированная сумма состоит из нескольких десятков слагаемых, оценка теоремы Берри-Эссена, по существу, бессодержательна.

[1]Berry A. The accuracy of the Gaussian approximation to the sum of independent variates. Trans. Amer. Math. Soc. 1941. V.49. № 1. P. 122-136.

[2]Esseen C.-G. On the Liapunoff limit of error in the theory of probability. Ark. Mat. Astr. Fys. 1942. V.28A. № 9. P. 1-19.

[3]Шевцова И.Г., Уточнение верхней оценки абсолютной постоянной в неравенстве Берри-Эссена, Теория вероятностей и ее применения, 2006, т. 51, в. 3, с.с. 622 - 626.

[4]Esseen, Moment inequalities with application to the Central Limit Theorem, Scand. Actuarietidskrist. N 34. 1956. P.160-170.

Малая точность аппроксимации в ЦПТ - факт, давно и хорошо известный. Он привел к развитию нескольких направлений в оценках точности аппроксимации в ЦПТ, среди которых изучение неравномерных оценок и изучение оценок, содержащих псевдомоменты. Примером неравномерной оценки является неравенство

$$|F_n(x) - \Phi(x)| \leqslant C \frac{\mathsf{E}|X_1|^3}{(1+|x|^3)\sqrt{n}}, \tag{2}$$

а пример оценки, содержащей псевдомоменты, дает неравенство

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant C \frac{\nu_3(F, \Phi)}{\sqrt{n}} \qquad \text{при } n \geqslant 4, \tag{3}$$

где C - некоторые постоянные, а ν_3 - метрика на множестве функций распределения, которая называется *вариацией с весом* (здесь вес равен $|x|^3$) и определяется равенством[5]

$$\nu_3(V, W) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|^3 |d(V-W)(x)| = \sup \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^3 w(x) d(V-W)(x) \right|,$$

где верхняя грань берется по множеству таких измеримых функций w, что $|w(x)| \leqslant 1$, $-\infty < x < \infty$, а V и W - произвольные функции распределения.

Значения постоянных в этих оценках оказывается существенно больше значения постоянной c в неравенстве (1).

Таким образом, оценка (2) не имеет преимуществ перед (1) при не очень больших $|x|$, а (3) не имеет преимущество перед (1), если расстояние $\nu_3(F, \Phi)$ не очень мало.

По-видимому, малая точность аппроксимации, которую гарантируют приведенные оценки, связана с тем, что они применимы для очень широкого класса распределений F: они справедливы для любой ф.р. F с конечным третьим моментом. Существенное продвижение в оценках точности аппроксимации в ЦПТ можно получить за счет сильного сужения множества функций распределения исходных случайных величин. Так известно, что если для некоторого натурального $m \geqslant 2$ абсолютный момент β_{m+2} функции распределения F конечен, моменты F совпадают с

[5] Ульянов В.В. К уточнению оценок скорости сходимости в центральной предельной теореме. Теория вероятностей и ее применения. 1978. Т23. Вып. 3. С. 684-687.

моментами Φ вплоть до порядка $m+1$, F обладает некоторой гладкостью, то

$$\rho(F_n, \Phi) \leqslant c\frac{\beta_{m+2}}{n^{m/2}} + o\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right), \tag{4}$$

где c зависит лишь от m. Известны явные оценки величин $o\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right)$. Это неравенство приводилось в спецкурсе "Дополнительные главы теории вероятностей", прочитанном В.В. Сенатовым на механико-математическом факультете МГУ в 2002 г.

Для справедливости (4) необходимо наложить на F ограничения, связанные с ее гладкостью. Эти условия, по крайней мере, должны гарантировать нерешетчатость F, поскольку для любой решетчатой ф.р. F величины $\rho(F_n, \Phi) \geqslant 0.125\frac{h}{\sqrt{n}}$ для всех n, начиная с некоторого, где h - шаг распределения F, при любых (сколь угодно сильных) ограничениях на моменты.

Одним из условий на гладкость F, которое гарантирует выполнение (4), является условие Крамера[6]

$$\limsup_{|t|\to\infty} |f(t)| < 1,$$

где f - характеристическая функция распределения F. Выполнение этого условия гарантирует существование у F непрерывной компоненты в ее лебеговом разложении. При выполнении условия Крамера и упомянутых выше условий на моменты справедливо неравенство (4), в котором для $o\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right)$ можно получить явную оценку, в которую входит величина

$$\alpha(T) = \sup\{|f(t)| : t \geqslant T\} < 1$$

для некоторого $T > 0$. При этом $o\left(\frac{1}{n^{m/2}}\right)$ из неравенства (4) при росте n убывает экспоненциально быстро.

Условия, при которых доказывается неравенство (4) близки, а при четных m совпадают с условиями одной теоремы И.А. Ибрагимова[7], устанавливающей связь между скоростью стремления к нулю величины $\rho(F_n, \Phi)$ и значениями моментов F.

По-видимому, точности, которую гарантирует неравенство (4), достаточно для большинства практических расчетов уже при не очень больших m, скажем, для m, больших 3-5, однако ограничение, связанное с

[6] Крамер Г. Случайные величины и распределения вероятностей. М.: Изд-во иностр. литер., 1947.

[7] Ибрагимов И.А. О точности аппроксимации распределения сумм независимых величин нормальным распределением, Теория вероятностей и ее применения. 1966. Т.11. Вып.4. С.632-655.

совпадением моментов F и Φ вплоть до порядка $m+1$, очень сильно сужает область применения неравенства (4).

Хорошо известен еще один подход к аппроксимации распределений F_n, он связан с так называемыми асимптотическими разложениями. В этом подходе нормальный закон Φ рассматривается только как первое приближение распределения F_n и аппроксимация F_n ищется в виде суммы Φ и некоторых слагаемых, стремящихся к нулю при росте n. Асимптотические разложения в ЦПТ появились в работах Грама[8] 1883 года, Шарлье[9] 1913-1914 годов и в работе Эджворта[10] 1905 года. В 1920-х годах асимптотические разложения интенсивно изучались Г. Крамером[11], а затем и другими исследователями, которыми были получены важные результаты, однако подавляющее большинство этих результатов давало оценки точности для асимптотических разложений в терминах $O\left(\frac{1}{n^a}\right)$ и $o\left(\frac{1}{n^a}\right)$, где $a > 0$ - некоторое число, зависящее от количества моментов, которые существуют у распределения F. По-видимому, первые результаты с явными оценками точности для асимптотических разложений появились в конце 20-го века в работах Шимицу[12], Добрич, Гош[13]. В 1990-х годах появились результаты В. Сенатова, которые были получены с использованием сопровождающих зарядов.

Основные результаты по исследованию явных оценок асимптотических разложений в ЦПТ были получены В. В. Сенатовым. Им были получены явные равномерные оценки остаточных частей разложений.

Данная работа обобщает полученные разложения на многомерный случай. При этом оценки остаточных членов получены в явном виде. Таким образом, тема диссертации представляется актуальной с теоретической точки зрения, а полученные в ней результаты могут быть практически применимы.

Цель работы

Цель диссертации - получить новые, более точные, чем известные, асимптотические разложения в центральной предельной теореме в многомерном случае с явными оценками их остаточных частей.

---

[8] Gram J.P., J. reine und angew. Math, 1883, Bd 94, S. 41-43.

[9] Charlier C.V.L., Arkiv. Mat. Astr. Fys., 1913/1914, Bd 9, N 25, S. 1-17.

[10] Edgeworth, The law of error, Camb. Phil. Soc. Proc. 20, 1905, 36-141.

[11] Крамер Г. Случайные величины и распределения вероятностей. М.: Изд-во иностр. литер., 1947.

[12] Shimizu R., On the remainder term for the central limit theorem, Ann. Inst. Stat. Math. 1974. V.26. P.195-201.

[13] Dobric V., Ghosh B.K. Some analogs of the Berry-Esseen bound for first order Chebychev-Edgeworth expansions, Stat. Decis. 1996. V.14.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- Исследованы многомерные аналоги многочленов Чебышева-Эрмита, использующиеся при получении асимптотических разложений в многомерном случае.
- Получены новые асимптотические разложения для гладких распределений в многомерном случае.
- Получены асимптотические разложения для решетчатых распределений в многомерном случае.
- Для всех асимптотических разложений получены явные оценки остаточных членов.

Методы исследования

В работе используются методы теории вероятностей, математического и функционального анализа. В частности, для построения асимптотических разложений применяется метод характеристических функций, формулы обращения, теорема Фубини. Также применяются некие новые объекты, многомерные аналоги многочленов Чебышева–Эрмита, которые описаны в работе.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Были исследованы многомерные аналоги многочленов Чебышева-Эрмита, с помощью которых получена аппроксимация плотностей распределений в многомерных пространствах, а также аппроксимация решетчатых распределений. Полученные результаты можно применять в реальных задачах аппроксимации.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ (руководитель - член-корр. РАН А.Н.

Ширяев) в 2008 году и на семинаре кафедры статистики ВМК МГУ (руководитель - академик Ю. В. Прохоров) в 2008 году. Был сделан доклад на международной конференции "Ломоносов-2009". Результаты диссертации были представлены на семинаре "Прикладные аспекты теории вероятностей и математической статистики"кафедры теории вероятностей и математической статистики РУДН (руководитель - д.ф.-м.н. Ю.С.Хохлов) в 2009 г.

Публикации

По теме диссертации опубликованы 3 работы. Список приведен в конце автореферата [1] - [3].

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, приложения и списка литературы, насчитывающего 33 наименования и организованного в алфавитном порядке. Результаты, полученные автором диссертации, оформлены в виде Теорем и Лемм. Нумерация лемм и теорем состоит из двух чисел. Первое число относится к номеру главы, второе к номеру утверждения (леммы или теоремы). Нумерация формул - сквозная. Общий объем работы составляет 78 страниц.

2 Краткое содержание диссертации

Целью работы является обобщение результатов, о которых говорилось выше, на многомерный случай. При этом используются многомерные аналоги многочленов Чебышева-Эрмита, введенные В.В. Сенатовым[14].

В первой главе дается определение многомерных аналогов многочленов Чебышева-Эрмита как полилинейных функционалов, полученных с помощью дифференцирования по Фреше функций, связанных с плотностью нормального закона, для некоторых из них указывается явный вид, перечисляются известные свойства этих функционалов, формулируются и доказываются утверждения, обобщающие свойства одномерных многочленов Чебышева-Эрмита на эти функционалы.

Обозначим E^d - евклидово пространство размерности d, $(\cdot, \cdot)$ - скаляр-

[14]Сенатов В.В. Об одном многомерном аналоге разложения Чебышева, Теория вероятностей и ее применения, 2007, т. 52, в. 3, с.с. 603 - 610.

ное произведение в E^d, $|\cdot|$ - норму в E^d, α_m - m-й момент одномерного стандартного нормального распределения, $\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-|x|^2/2}$ - плотность нормального закона с нулевым средним и единичной матрицей ковариаций в E^d. Многомерные аналоги многочленов Чебышева-Эрмита - это множество многочленов $H_l^{(2j)}, l, j = 0, 1, 2, \ldots$, которое являются последовательностью серий, состоящих из счетного числа элементов. Первый элемент каждой серии является функцией на E^d, второй элемент каждой серии - линейный функционал, третий элемент - билинейный функционал и т.д.

Эти многочлены можно свести в таблицу

$$\begin{array}{cccccc}
H_0^{(0)}, & H_1^{(0)}, & H_2^{(0)}, & H_3^{(0)}, & H_4^{(0)}, & H_5^{(0)}, \ldots \\
 & & H_0^{(2)}, & H_1^{(2)}, & H_2^{(2)}, & H_3^{(2)}, \ldots \\
 & & & & H_0^{(4)}, & H_1^{(4)}, \ldots \\
 & & & & & \ldots\ldots
\end{array}$$

Многочлены Чебышева-Эрмита из первой серии (ей соответствует $j = 0$), точнее, действие многочленов $H_l^{(0)}(x)$ на векторы $h_1, \ldots, h_l \in E^d$, можно получить по формуле

$$H_l^{(0)}(x)(h_1, \ldots, h_l) = (-1)^l \left(\varphi(x)\right)^{(l)} (h_1, \ldots, h_l)/\varphi(x)$$

(производная понимается в смысле Фреше), которая аналогична равенству $H_l(x) = (-1)^l \left(\varphi(x)\right)^{(l)} / \varphi(x)$, справедливому в одномерном случае. Величина $H_l^{(0)}(x)(h_1, \ldots, h_l)$ является симметрической функцией переменных $h_1, \ldots, h_l$, поэтому мы иногда будем записывать ее в виде $H_l^{(0)}(x)(\{h_1, \ldots, h_l\})$, где $\{h_1, \ldots, h_l\}$ означает множество, состоящее из векторов $h_1, \ldots, h_l$.

Первый элемент первой серии - функция на E^d, тождественно равная 1, второй элемент первой серии - линейный функционал $(x, \cdot)$, третий элемент этой серии - билинейный функционал $(x, \cdot)(x, \cdot) - (\cdot, \cdot)$, $x \in E^d$, и т.д.

Справедлива формула обращения

$$\frac{i^l}{(2\pi)^d} \int\limits_{E^d} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} (t, h_1) \ldots (t, h_l) dt = H_l^{(0)}(x)(h_1, \ldots, h_l)\varphi(x),$$

где i - мнимая единица.

Для любого $j \geqslant 1$ многочлены $H_l^{(2j)}(x)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, определяются равенствами

$$H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l)\varphi(x) = \frac{i^{2j+l}}{(2\pi)^d} \int\limits_{E^d} e^{-i(t,x)} e^{-|t|^2/2} (t,t)^j (t, h_1) \dots (t, h_l) dt.$$

В первой главе указан явный вид некоторых из этих многочленов и рассматриваются их простейшие свойства.

В одномерном случае многочлены Чебышева-Эрмита являются многочленами Аппеля, то есть для них справедливо равенство

$$H_l^{'}(x) = l H_{l-1}(x), \quad l = 1, 2, \dots$$

Аналог этого свойства для многочленов $H_l^{(0)}(x)$ имеет вид

$$\Big(H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l)\Big)_x^{'}(h_{l+1}) = \sum_{r=1}^{l} (h_{l+1}, h_r) H_{l-1}^{(0)}(x)(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_r\}).$$

Также выполнено рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} H_{l+1}^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}) = (x, h_{l+1}) H_l^{(0)}(x)(h_1, \dots, h_l) - \\ - \sum_{r=1}^{l} (h_{l+1}, h_r) H_{l-1}^{(0)}(\{h_1, \dots, h_l\} \setminus \{h_r\}). \quad (5) \end{aligned}$$

Эти равенства получены В.В. Сенатовым в упомянутой работе[14].

Для многомерных аналогов многочленов Чебышева-Эрмита произвольной строки в первой главе получены соотношения

$$\begin{aligned} \Big(H_l^{(2j)}(x)(h_1, ..., h_l)\Big)_x^{'}(h_{l+1}) = \sum_{r=1}^{l} (h_{l+1}, h_r) H_{l-1}^{(2j)}(x)(\{h_1, ..., h_l\} \setminus \{h_r\}) + \\ + 2j H_{l+1}^{(2j-2)}(x)(\{h_1, ..., h_{l+1}\}) \end{aligned}$$

и рекуррентная формула

$$\begin{aligned} H_{l+1}^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_{l+1}) = (x, h_{l+1}) H_l^{(2j)}(x)(h_1, \dots, h_l) - \\ - \sum_{r=1}^{l} (h_{l+1}, h_r) H_{l-1}^{(2j)}(x)(\{h_1, ..., h_l\} \setminus \{h_r\}) - 2j H_{l+1}^{(2j-2)}(x)(\{h_1, ..., h_{l+1}\}). \end{aligned}$$

Во второй главе в многомерном случае строятся новые асимптотические разложения плотностей нормированных сумм независимых случайных величин, у которых конечны моменты 5 и 6 порядков (асимптотические разложения в случае конечности моментов меньших порядков получены в работе В.В. Сенатова[15] Эти асимптотические разложения строятся с использованием вспомогательных сопровождающих зарядов, которые представляют собой функции, получаемые интегрированием многомерных аналогов многочленов Чебышева-Эрмита по распределению исходных случайных величин. Приводятся явные оценки остаточных частей разложений.

Здесь и далее мы будем действовать в рамках следующих обозначений и предположений.

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ - независимые одинаково распределенные величины в E^d с нулевым средним и единичным ковариационным оператором и P - распределение X_1. Пусть для характеристической функции $f(t)$ распределения P выполнено условие

$$\int\limits_{E^d} |f(t)|^\nu dt < \infty \tag{a}$$

для некоторого $\nu{>}0$, и для некоторой пары (μ, T), где функция $e^{-|t|^2/2} \leqslant \mu(t) \leqslant 1$ и число $T > 0$, выполняется неравенство $|f(t)| \leqslant \mu(t)$ при всех $|t| \leqslant T$.

Через P_n обозначим распределение нормированной суммы $\frac{X_1+\cdots+X_n}{\sqrt{n}}$. При выполнении условия (a) для всех $n \geqslant \nu$ существует плотность $p_n(x)$, $x \in E^d$, распределения P_n, которую можно вычислить по формуле обращения.

Определим моментные характеристики распределения P, которые нам понадобятся. Для $s \in \mathbb{N}$ и вектора $e \in E^d, (e,e) = 1$, положим

$$\alpha_s(e) = \alpha_s(e, P) := \int\limits_{E^d} (e,u)^s P(du), \quad \beta_s(e) = \beta_s(e, P) := \int\limits_{E^d} |(e,u)|^s P(du),$$

$$|\alpha_s| = \sup_{|e|=1} |\alpha_s(e)|, \quad \beta_s = \sup_{|e|=1} \beta_s(e), \quad s = 0, 1, \ldots$$

Легко видеть, что $\alpha_s(e)$ и $\beta_s(e)$ - момент и абсолютный момент s-го порядка проекции P на направление вектора e.

[15]Сенатов В.В. Несколько асимптотических разложений в ЦПТ в многомерном случае. Теория вероятностей и ее применения, 2008, т. 53, в. 2, с.с. 293 - 306.

Во всех леммах и теоремах мы будем предполагать, что для некоторого $m \in \mathbb{N}$ величина β_{m+2} конечна.

Мы будем использовать многомерные моменты Чебышева-Эрмита $\theta_s,\ s = 0, 1, \ldots,$ которые определяются следующим образом:

$$\frac{\theta_s}{s!} = \frac{\theta_s(e)}{s!} := \sum_{j=0}^{[s/2]} \frac{(-1)^j \alpha_{s-2j}(e)}{j! 2^j (s-2j)!} = \sum_{j=0}^{[s/2]} \frac{(-1)^j}{j! 2^j (s-2j)!} \int\limits_{E^d} (e,u)^{s-2j} P(du),$$

а также величины

$$|\theta_s| = \sup_{|e|=1} |\theta_s(e)|, \quad s = 0, 1, \ldots,$$

$$\frac{\|\theta_s\|}{s!} := \begin{cases} \sum\limits_{j=0}^{s/2} \dfrac{|\alpha_{s-2j}|}{j! 2^j (s-2j)!}\,, & \text{для четных } s \geqslant 4 \\ \dfrac{\beta_s}{s!} + \sum\limits_{j=1}^{[s/2]} \dfrac{|\alpha_{s-2j}|}{j! 2^j (s-2j)!}\,, & \text{для нечетных } s \geqslant 5 \end{cases},$$

В оценках остаточных частей асимптотических разложений будут использоваться величины $\|\theta_s^{(m)}\|$, которые определяются формулами для $\|\theta_s\|$, в которых нужно положить $|\alpha_l| = 0$ при $l \geqslant s+1$.

Отметим, что $\theta_s(e)$ - момент Чебышева-Эрмита s-го порядка проекции P на направление вектора e.

Пусть $\Phi(x)$ - нормальный закон с нулевым средним и единичным ковариационным оператором в E^d. Для $e \in E^d, |e| = 1$, и натуральных s обозначим

$$\Delta_s(e) = \int\limits_{E^d} (e,u)^s (P - \Phi)(du), \quad \delta_s = \sup_e |\Delta_s(e)|, \quad \overline{\beta}_s(e) = \int\limits_{E^d} |(e,u)|^s \Phi(du).$$

Отметим, что для любого $e \in E^d$, $|e| = 1$, величина $\overline{\beta}_s(e)$ совпадает с s-м абсолютным моментом одномерного стандартного нормального закона.

Введем следующие величины

$$B_s = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{E^d} |t|^s e^{-|t|^2/2} dt, \quad B_{s,n} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{|t| \leqslant T\sqrt{n}} |t|^s \mu^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt.$$

Величина B_s асимптотически (при $d \to \infty$) равна $\dfrac{1}{2\pi^{d/2}} d^{s/2}$. Для распределений с конечным четвертым моментом пару (μ, T) можно подобрать так, чтобы $B_{s,n} \to B_s$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного $s > 0$.

Также отметим, что из формулы Тейлора с остаточным членом в интегральной форме следует, что для любого действительного α

$$e^{i\alpha} = \sum_{s=0}^{k} \frac{i^s \alpha^s}{s!} + \gamma \frac{\alpha^{k+1}}{(k+1)!}, \tag{6}$$

где k - произвольное неотрицательное целое число и γ - непрерывная комплекснозначная функция такая, что $|\gamma| \leqslant 1$.

Итак, пусть

$p_n(x)$ - плотность нормированной суммы $\frac{(X_1+..+X_n)}{\sqrt{n}}$,

$q_n(x)$ - плотность нормированной n-кратной свертки заряда.

Мы можем записать плотность $p_n(x)$ в виде

$$p_n(x) = q_n(x) + [p_n(x) - q_n(x)].$$

В случае использования заряда доказательство состоит из двух шагов:

- оценка близости плотностей нормированных сумм $|p_n(x) - q_n(x)|$;
- разложение плотности $q_n(x)$ по многочленам $H_l^{(2j)}(x)$ с некоторой погрешностью.

Полученные асимптотические разложения можно рассматривать как цепочку результатов, где каждое последующее разложение получается из предыдущего путем переноса (с соответствующими изменениями) некоторых членов из остаточной части в главную.

Оценки остаточных частей для каждого разложения указаны в явном виде. Получены следующие разложения.

Теорема 2.4 *Пусть распределение P таково, что $\beta_5 < \infty$ и $\beta_4 < 9$. Тогда в рамках введенных обозначений и предположений для всех $n \geqslant \max(3, \nu)$ таких, что*

$$\rho = \frac{|\theta_4|}{6} + \frac{|\theta_4|(d-1)}{3n} + \frac{|\theta_4| d(d+2)}{72n} < 1$$

(при $\beta_4 < 9$ величина $\rho < 1$ для всех n, начиная с некоторого), при всех $x \in E^d$ для плотности $p_n(x)$ справедливо равенство

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\varphi(x)}{6\sqrt{n}} \int\limits_{E^d} H_3^{(0)}(x)(u,u,u) P(du) +$$

$$+\frac{\varphi(x)}{24n}\left\{\int\limits_{E^d} H_4^{(0)}(x)(u,u,u,u)P(du) - 3H_0^{(4)}(x)\right\}+$$

$$+\frac{\varphi(x)}{72n}\int\limits_{E^d}\int\limits_{E^d} H_6^{(0)}(x)(u,u,u,v,v,v)P(du)P(dv)+$$

$$+\frac{\varphi(x)}{144n^{3/2}}\int\limits_{E^d}\int\limits_{E^d} H_7^{(0)}(x)(u,u,u,v,v,v,v)P(du)P(dv)-$$

$$-\frac{\varphi(x)}{48n^{3/2}}\int\limits_{E^d} H_3^{(4)}(x)(u,u,u)P(du)+$$

$$+\frac{\varphi(x)}{(3!)^4 n^{3/2}}\int\limits_{E^d}\int\limits_{E^d}\int\limits_{E^d} H_9^{(0)}(x)(u,u,u,v,v,v,w,w,w)P(du)P(dv)P(dw) + R,$$

где $R = O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right), n \to \infty$, *- остаточная часть, для которой выписывается явная оценка.*

Явный вид многочленов $H_l^{(0)}, l = 3,4,6,7,9, H_0^{(4)}$ и $H_3^{(4)}$ указан в главе 1. В частности,

$$H_3^{(0)}(x)(u,u,u) = (x,u)^3 - 3(x,u)(u,u),$$

поэтому слагаемое в асимптотическом разложении $p_n(x)$, связанное с $H_3^{(0)}$, можно записать в виде

$$\frac{\varphi(x)}{6\sqrt{n}}\mathsf{E}\left((x,X_1)^3 - 3(x,X_1)(X_1,X_1)\right) =$$

$$= \frac{\varphi(x)}{6\sqrt{n}}\left(|x|^3\mathsf{E}(X_1,e_x)^3 - 3|x|\mathsf{E}(X_1,e_x)(X_1,X_1)\right),$$

где $e_x = \frac{x}{|x|}, X_1$ - с.в. распределения P. Величина $\mathsf{E}(X_1,e_x)^3$ является третьим моментом проекции с.в. X_1 на направление вектора e_x, а $\mathsf{E}(X,e_x)(X,X)$ можно рассматривать как некий смешанный момент третьего порядка с.в. X.

Все интегралы в приведенном асимптотическом разложении являются величинами, зависящими от $|x|$ и от моментов исходных случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ (среди этих моментов - моменты проекций с.в. X_1 на направление вектора e_x, четвертый момент нормы $\mathsf{E}|X_1|^4$, смешанные моменты, моменты $\mathsf{E}(X_1,X_2)^3$ и т.д.)

В цитировавшейся работе В.В. Сенатова было получено разложение, главная часть которого совпадает с суммой первых четырех слагаемых из теоремы 2.4, а в оценке остаточной части присутствуют слагаемые, оценивающие пятое, шестое и седьмое слагаемые разложения из теоремы 2.4. Включение этих слагаемых в главную часть разложения позволяет существенно уточнить оценку, полученную В.В. Сенатовым, правда, скорость стремления к нулю при росте n остаточной части остается прежней. Для того, чтобы получить разложение, оценка остаточной части которого убывает быстрее $\frac{1}{n^{3/2}}$, необходимо потребовать существования момента шестого порядка.

Теорема 2.6 *Пусть распределение P таково, что $\beta_6 < \infty$ и $\beta_4 < 9$. Тогда при всех $x \in E^d$ для всех $n \geqslant \max(3, \nu)$ таких, что*

$$\rho = \frac{|\theta_4|}{6} + \frac{|\theta_4|(d-1)}{3n} + \frac{|\theta_4|d(d+2)}{72n} < 1,$$

для плотности $p_n(x)$ справедливо равенство

$$p_n(x) = \varphi(x) + \frac{\varphi(x)}{6\sqrt{n}} \int\limits_{E^d} H_3^{(0)}(x)(u,u,u)P(du) +$$

$$+\frac{\varphi(x)}{24n} \left\{ \int\limits_{E^d} H_4^{(0)}(x)(u,u,u,u)P(du) - 3H_0^{(4)}(x) \right\} +$$

$$+\frac{\varphi(x)}{72n} \int\limits_{E^d}\int\limits_{E^d} H_6^{(0)}(x)(u,u,u,v,v,v)P(du)P(dv) +$$

$$+\frac{\varphi(x)}{120n^{3/2}} \int\limits_{E^d} H_5^{(0)}(x)(u,u,u,u,u)P(du) - \frac{\varphi(x)}{12n^{3/2}} \int\limits_{E^d} H_3^{(2)}(x)(u,u,u)P(du) +$$

$$+\frac{\varphi(x)}{144n^{3/2}} \int\limits_{E^d}\int\limits_{E^d} H_7^{(0)}(x)(u,u,u,v,v,v,v)P(du)P(dv) -$$

$$-\frac{\varphi(x)}{48n^{3/2}} \int\limits_{E^d} H_3^{(4)}(x)(u,u,u)P(du) +$$

$$+\frac{\varphi(x)}{(3!)^4 n^{3/2}} \int\limits_{E^d}\int\limits_{E^d}\int\limits_{E^d} H_9^{(0)}(x)(u,u,u,v,v,v,v,w,w,w)P(du)P(dv)P(dw) + R,$$

где $R = O(\frac{1}{n^2}), n \to \infty$, - остаточная часть, для которой выписывается явная оценка.

Главная часть разложения из теоремы 2.6 отличается от главной части разложения теоремы 2.4 тем, что в нее добавились величины, связанные с $H_5^{(0)}$ и $H_3^{(2)}$, за счет этого улучшается скорость стремления к нулю остаточной части.

В приведенных теоремах оценки остаточных частей R в каждой следующей теореме лучше, чем в предыдущей (во всяком случае, при больших n).

Явный вид оценок остаточных частей не приведен в автореферате ввиду их громоздкости.

В третьей главе рассматриваются асимптотические разложения для плотностей в общем случае (без использования вспомогательного заряда). Здесь получены явные оценки остаточных частей разложений, главные части которых были известны, но оценки остаточных частей давались в виде, непригодном для численных расчетов. Построение асимптотических разложений состоит из двух шагов:

- с некоторой погрешностью представляем $p_n(x) - \varphi(x)$ в виде суммы Σ, зависящей от разностей моментов P и Φ, то есть от величин
$$\Delta_s(e) = \int\limits_{E^d} (e,u)^s (P-\Phi)(du);$$
- слагаемые из Σ, убывающие при росте n как $O(\frac{1}{n^{(m+1)/2}})$, включаем в остаточную часть разложения, оставшиеся слагаемые - в главную.

Представление разности плотностей с помощью $\Delta_s(e_t)$ дает

Лемма 3.1 *Во введенных предположениях и обозначениях при $n \geqslant \max(\nu, 2m)$ существует плотность $p_n(x)$ и для любого $x \in E^d$ справедливо равенство*
$$p_n(x) - \varphi(x) =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{|t| \leqslant T\sqrt{n}} e^{-i(t,x)} e^{-\frac{|t|^2}{2}} \sum_{k=1}^{m} C_n^k e^{\frac{k|t|^2}{2n}} \left(\sum_{s=3}^{m+1} \frac{i^s \Delta_s(e_t)}{s!} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^s \right)^k dt + R,$$
где $e_t = \frac{t}{|t|}$ и R - остаточная часть, для которой выписывается явная оценка.

При помощи этой леммы получен следующий результат

Теорема 3.1 *В рамках введенных предположений и обозначений при всех $n \geqslant \max(\nu, 2m)$ у распределения P_n нормированной суммы существует плотность $p_n(x)$ и для всех $x \in E^d$*

$$p_n(x) = \varphi(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{k_3,\ldots,k_{m+1}} \frac{n!}{(n-k)!k_3!\cdots k_{m+1}!} \frac{1}{(3!)^{k_3}\ldots((m+1)!)^{k_{m+1}}} \frac{\varphi(x)}{n^{(3k_3+\cdots+(m+1)k_{m+1})/2}} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{J} \frac{(-1)^j}{j!2^j} \left(\frac{r}{n}\right)^j \int\limits_{E^d} \cdots \int\limits_{E^d} H_l^{(2j)}(u_1^{(3)}, u_1^{(3)}, u_1^{(3)}, \ldots, u_{k_3}^{(3)}, u_{k_3}^{(3)}, u_{k_3}^{(3)}, \ldots, u_{k_{m+1}}^{(m+1)}, \ldots$$

$$\ldots, u_{k_{m+1}}^{(m+1)}) Q(du_1^{(3)}) \cdots Q(du_{k_3}^{(3)}) \cdots Q(du_1^{(m+1)}) \cdots Q(du_{k_{m+1}}^{(m+1)}) + R,$$

где $Q = P - \Phi$ и внутреннее суммирование ведется по всем наборам $k_3, \ldots, k_{m+1}$ таким, что

$$k_3 + \cdots + k_{m+1} = k,\ 3k_3 + \cdots + (m+1)k_{m+1} \leqslant m + 2k,$$

$$J = \left[\frac{m}{2} - \frac{k_3 + \cdots + (m-1)k_{m+1}}{2}\right],$$

а

$$|R| \leqslant C_n^{m+1} \frac{B_{3(m+1),n-(m+1)}}{n^{\frac{3(m+1)}{2}}} D_T^{m+1} +$$

$$+ \frac{\beta_{m+2} + \overline{\beta}_{m+2}}{(m+2)!} \sum_{l=1}^{m+1} C_n^l \frac{B_{3(l-1)+m+2,n-l}}{n^{\frac{3(l-1)+m+2}{2}}} D_T^{l-1} +$$

$$+ \frac{n^{d/2}}{(2\pi)^d} \alpha^{n-\nu}(T) \int\limits_{|t|\geqslant T} |f(t)|^\nu dt + \frac{1}{(2\pi)^d} L_{1,0}(T\sqrt{n}) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m} \frac{C_n^l}{n^{\frac{m+1}{2}+l}} e^{\frac{lT^2}{2}} D^l B_{m+2l+1} + \sum_{l=1}^{m} \frac{C_n^l}{n^{\frac{m+1}{2}+l}} \frac{l^{\frac{m-l}{2}+1} e^{\frac{lT^2}{2}}}{2} D^l \left\{\frac{1}{(2\pi)^d} + B_{m+2l}\right\} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{m} C_n^l \frac{D^l}{(2\pi)^d} L_{1,3m+l-1}(T\sqrt{n}),$$

где для действительных a, b, τ_1 обозначено $L_{a,b}(\tau_1) = \frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \int\limits_{\tau_1}^{\infty} e^{-\frac{ar^2}{2}} r^b dr$, а для натурального l и положительного действительного T

$$D = \sum_{s=3}^{m+1} \frac{\delta_s}{s!}, \quad D_T = \sum_{s=3}^{m+1} \frac{\delta_s}{s!} T^{s-3}.$$

В четвертой главе рассматриваются асимптотические разложения в локальной форме ЦПТ для решетчатых распределений. Показано, как из асимптотических разложений, полученных во второй и третьей главах, можно получать главные части соответствующих разложений для вероятностных мер точек роста многомерных решетчатых распределений и указывается, как при этом необходимо изменить оценки остаточных частей разложений.

В пятой главе получен один результат, связанный с асимптотическими разложениями для вероятностных мер, соответствующих нормированным суммам, на шарах в пространстве E^d. При этом приходится использовать функции Бесселя, точнее, разложения этих функций в ряды. Асимптотические разложения получаются в виде рядов, которые довольно быстро сходятся, но представить эти ряды в виде суперпозиций элементарных функций не удается. По этой причине в главе 5 пришлось ограничиться лишь одним результатом, тем более, что обобщения этого результата на общий случай достаточно очевидны.

3 Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук Владимиру Васильевичу Сенатову, под руководством которого проходила работа над диссертацией, за постановку задачи и постоянное внимание.

4 Список публикаций автора по теме диссертации

[1] Осмоловский И.Ю. "О некоторых свойствах многомерных аналогов многочленов Чебышева-Эрмита", Теория вероятностей и ее применения, 2008, т. 53, в. 2, сс. 373 - 378.

[2] Осмоловский И.Ю. "Об оценке точности аппроксимации для асимптотических разложений в многомерном случае", Теория вероятностей и ее применения, 2009, т. 54, в. 1, сс. 152 - 158.

[3] Осмоловский И.Ю. "Об оценке точности аппроксимации для асимптотических разложений в многомерном случае", Деп. В ВИНИТИ 24.03.2009 № 152-В2009.