МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Отставнов Евгений Игоревич

Исследование устойчивости систем с односторонним ограничением

Специальность: 01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени

кандидата физико-математических наук

Москва 2009

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель: Чл.-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор В.В. Белецкий

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук, профессор И.И. Косенко
Кандидат физико-математических наук, доцент А.В. Родников

Ведущая организация: Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН

Защита состоится 5 июня 2009 года в 15.00 часов на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 по механике при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 5 мая 2009 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22
доцент В.А. Прошкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Механические системы с неудерживающими связями являются важным разделом современной аналитической механики. Развитие соответствующих методов и их обобщение для упрощения работы с конкретными системами является важной и актуальной задачей. В диссертации рассматриваются примеры систем, в которых возникают неудерживающие связи различных видов, и строится общая теория, обобщающая алгоритмы исследования динамики механических систем с неудерживающими связями, с помощью которых доказываются теоремы об устойчивости по Ляпунову неподвижных точек.

Цель работы. Исследование устойчивости в механических системах с неудерживающими связями путём построения более общих моделей и их иллюстрация на конкретных примерах.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в работе, являются новыми, ранее не известными. Они основываются на классических утверждениях механики и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Следует отметить, что для механических систем вводится абстрактная модель систем с односторонними ограничениями, при своём применении в механике не требующая приведения уравнений связей к простому виду. Неудерживающие голономные и неинтегрируемые дифференциальные типы связей в механике естественно возникают как случаи при общем рассмотрении.

Достоверность результатов. Все результаты диссертационной работы строго обоснованы и доказываются с помощью утверждений теоретической механики, теории систем обыкновенных дифференциальных уравнений и линейной алгебры.

Используемые методы. В работе используются методы аналитической механики, математического анализа, алгебры. Они применяются к рассматриваемым системам.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для исследования устойчивости положений равновесия в произвольных механических системах, если те возникают из-за наличия неудерживающих связей.

Апробация работы и публикации. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах:

- Семинар по динамике относительного движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. Ю.Ф. Голубева, доц. К.Е. Якимовой, доц. Е.В. Мелкумовой, 2008 г.;
- Семинар по аналитической механике и устойчивости движения имени В.В. Румянцева кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. А.В. Карапетяна, 2008 г.;
- Семинар отдела механики ВЦ РАН под руководством проф. С.Я. Степанова, 2008 г.;

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в печатных работах, список которых приведён в конце автореферата.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы из 65 наименований. Общий объём диссертации - 121 страница.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении описана предметная область, цель диссертации, дан обзор работ по вопросам механики систем с неудерживающими связями и их примерам в реальности, по вопросам исследования устойчивости в таких и родственных системах, а также приведено краткое содержание диссертации.

В главе 1 для развития общих методов исследования подобных систем представлена задача по нахождению условий, при которых система, состоящая из двух произвольных твёрдых тел, не требует фиксирования частей друг относительно друга, но при этом её динамика не приводит к соударению тел или их разлёта на слишком большое расстояние. Это можно назвать устойчивостью по Лагранжу движений, удовлетворяющих найденным условиям. Задача ставится в рамках небесной механики, но, разумеется, может применяться и в динамике космического полёта. Ещё один аспект – это задача о невыходе на границу неудерживающей голономной связи, задаваемой как условие касания поверхностей тел.

В качестве модели будут рассматриваться взаимно-гравитирующие твёрдые тела T_1, T_2 с центрами масс C_1, C_2, массами m_1, m_2 и центральными тензорами инерции *J* и *A* соответственно. Пусть $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3})$, $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma})$ - правые тройки, задающие вмороженные оси $C_1\zeta\eta\varsigma$ и $C_2\alpha\beta\gamma$ первого и второго тел. Внешние силы отсутствуют.

Можно показать, что динамика системы описывается уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{\omega} \times r = \boldsymbol{v} \\ \mu(\dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}) = \dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \\ J\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times J\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\alpha} \times \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\beta} \times \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\beta}} + \boldsymbol{\gamma} \times \dfrac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\gamma}} + \mathbf{r} \times \dfrac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \\ \dot{\boldsymbol{K}}_{\mathbf{0}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{K}_{\mathbf{0}} = 0 \\ \Omega = C\Lambda^{-1}C^T(\boldsymbol{K}_{\mathbf{0}} - J\boldsymbol{\omega} - \mu\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}} = (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\alpha} \\ \dot{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\beta} \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = (\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) \times \boldsymbol{\gamma} \\ C = [\boldsymbol{\alpha} \quad \boldsymbol{\beta} \quad \boldsymbol{\gamma}] \end{cases} \tag{0.1}$$

в которых введены обозначения:

$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{C_1C_2}$, $\boldsymbol{v} = {}^{d\boldsymbol{r}}/_{dt}$. $\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\Omega}$ – абсолютные угловые скорости первого и второго тел,

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ приведённая масса системы.

$U = \int_{T_1 \times T_2} \frac{G}{|r - \boldsymbol{\rho}_1^0 + C\boldsymbol{\rho}_2^0|} \sigma_1(\boldsymbol{\rho}_1^0)\sigma_2(\boldsymbol{\rho}_2^0) d\boldsymbol{\rho}_1^0 d\boldsymbol{\rho}_2^0$ - силовая функция гравитационного взаимодействия тел, $\boldsymbol{K}_O = J\boldsymbol{\omega} + A\boldsymbol{\Omega} + \mu\boldsymbol{r} \times \frac{dr}{dt} = \boldsymbol{k}$ – кинетический момент системы относительно её центра масс.

Все производные в (0.1) записаны в осях, вмороженных в первое тело. Тогда $\Lambda = C^T A C$ - центральный тензор инерции второго тела в своих главных осях. Уравнения (0.1) замкнуты, но для завершения описания нужно ещё определить ориентацию первого тела в абсолютном пространстве. Это делается путём интегрирования уравнений Пуассона

$$\begin{cases} \frac{de_1}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e_1} \\ \frac{de_2}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e_2} \\ \frac{de_3}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{e_3} \end{cases} \tag{0.2}$$

после решения (0.1).

В качестве демонстрации относительно несложно можно получить условия относительного равновесия системы – оба тела вращаются как твёрдое целое вокруг их совместной главной центральной оси инерции. Непосредственное нахождение таких решений затруднено общим видом силовой функции U.

Для грубого качественного описания динамики рассматриваемой системы предлагается найти условия, при которых тела вечно остаются на конечном расстоянии друг от друга и не сталкиваются. Scheeres была предложена методика исследования и получена оценка, существенно и независимо использующая модуль вектора $\boldsymbol{K}_0$. В работе происходит отказ от его непосредственного использования как независимого параметра.

Методика нахождения необходимых и достаточных условий восходит к классической работе С. Смейла. В силу сложного устройства полного потенциала взаимодействия тел получены приближённые оценки границ области возможности движения (ОВД), с помощью исследования которых получены следующие результаты:

Утверждение 1. Пусть значения безразмерного квадрата кинетического момента κ^2 и безразмерной суммы главных центральных моментов инерции тел i^* таковы, что при некотором $x > 1$ выполнены условия

1) $\kappa^2 = \frac{4(i^*+x^2)^2}{x^2-1}$
2) $\kappa^2 > \frac{(i^*+x^2)^3}{2x(x-1)^2}$.

Тогда существует промежуток значений безразмерной энергии $\chi \in [\chi_1, \chi_2] < 0$, при которых все движения системы, начавшиеся на расстояниях между центрами масс, достаточно близкими к x (или больших x), будут ограниченными и бесстолкновительными.

Утверждение 2. Пусть значения параметров κ^2 и i^* таковы, что при некотором $x > 1$ выполнены условия:

1) $\kappa^2 = \frac{2(i^*+x^2)^2}{x-1}$
2) $\kappa^2 \geq \frac{(i^*+x^2)^3}{2x(x-1)^2}$.

Тогда существует промежуток значений безразмерной энергии $[\chi^*, 0) < 0$, при которых движения системы, начавшиеся на расстояниях не меньших x, будут ограниченными и бесстолкновительными.

Утверждение 1 может иметь место только при значении i^* безразмерной суммы максимальных из главных центральных моментов инерции тел из интервала $\left[0, \frac{25}{3} - \Delta_0\right)$, $\Delta_0 \approx 5.126$. Утверждение 2 может работать при любых значениях i^*, но оно требует больших величин кинетического момента системы для обеспечения бесстолкновительности, нежели утверждение 1. Заметим, что безразмерный квадрат кинетического момента уже вычисляется с помощью соотношений в условиях утверждений.

Глава 2 посвящена развитию теории, необходимой для исследования подобных ситуаций в системах с нежёсткой фиксацией частей.

Давая конструктивное определение решения системы с односторонним ограничением, обобщающее наиболее робастные способы получения решений в динамике систем с ударами, можно построить с его помощью отображение последования, позволяющее исследовать устойчивость неподвижной точки системы, возникающей на ограничении (если таковая существует). Исследование (относительных) равновесий важно, так как их практическое применение как правило является наиболее простым и надёжным с инженерной точки зрения.

Системой ОДУ с односторонним ограничением (или просто *системой*) будем называть четвёрку (X, r, S, R), состоящую из:

1) Системы обыкновенных дифференциальных уравнений $\dot{x} = X(x) = f + Ax + +\frac{1}{2}(Bx, x) + \cdots, x \in R^n$, называемой *свободной системой*.
2) Скалярного неравенства $\mathrm{r}(x) = (c, x) + \frac{1}{2}(Ux, x) + \cdots \geq 0$, называемого *односторонним дифференциальным ограничением* (или просто *ограничением*),
3) отображения $S: R^n \to R^n$,
4) вектор-функции $R(x)$, называемой реакцией ограничения.

Рассмотрим систему в окрестности начала координат и значения $f = X(0)$, $c = \frac{\partial r}{\partial x}(x)$. Существенно различаются 3 случая: $(c, f) > 0, (c, f) = 0, (c, f) < 0$. Первый из них влечёт уход решения от ограничения и в рассмотрение не входит. Два оставшихся предполагают существенные различия в определении и свойствах рассматриваемых решений.

При $(c, f) < 0$ решение системы $x(x_0, t)$, отвечающее начальным условиям x_0, определим конструктивно:

a) Если (пока) $r\big(x(x_0, t)\big) > 0$, то решение строится с помощью свободной системы пока не выполнено b).
b) Если $r\big(x(x_0, t^*)\big) = 0$, $\dot{r} := \frac{\partial r}{\partial x} X(x(x_0, t^*)) \leq 0$ и существует $\varepsilon > 0$, что для всех $t \in (t^*, t^* + \varepsilon)$ справедливо $\dot{r} < 0$, то происходит переход от a) к c), либо решение строится с помощью c) в случае, если $t^* = 0$. Этот переход называется *выходом на ограничение*.
c) Если (пока) $r(x) = 0$, то решение сроится с помощью системы на ограничении $\dot{x} = X(x) + R(x)$ пока не выполнено d). Функция $R(x)$ выбирается

таким образом, чтобы обеспечить сохранение равенства $r = 0$ для системы на ограничении.

d) Если $r\big(x(x_0, t^{**})\big) = 0, \dot{r} \geq 0$ и существует $\varepsilon > 0$, что для всех $t \in (t^{**}, t^{**} + \varepsilon)$ справедливо $\dot{r} > 0$, то происходит переход от c) к a), либо решение строится с помощью a) в случае, если $t^{**} = 0$. Этот переход называется *сходом с ограничения*.

Можно показать, что механические системы с односторонними дифференциальными связями описываются подобным образом.

Допустим, что $R(0) = -X(0) = f$, тогда, учитывая, что $r(0) = 0$ и $\dot{r}(0) = (c, f) < 0$, $x(0, t) \equiv 0$ является стационарным решением системы на ограничении и всей системы в целом.

Теорема 1. Для системы с односторонним ограничением в случае $(c, f) < 0$ при $R(0) = -X(0)$ устойчивость решения $x(0, t) \equiv 0$ определяется только исследованием его устойчивости как решения системы на ограничении

Похожее утверждение для механических систем с неупругим выходом на границу односторонней голономной связи получалось А.П. Ивановым, когда внешняя сила приводит к падению фазовой точки на связь недалеко от положения равновесия и далее точка остаётся на связи, так как нормальная составляющая импульса теряется при ударе. Вывод об устойчивости также можно сделать, рассматривая систему на связи. Однако, это сходство внешнее. Можно показать, что механическим системам с голономными односторонними связями, чьё поведение исследуется по полному набору переменных (координат и скоростей), соответствует случай $(c, f) = 0$. Также, в рассматриваемом выше определении не происходит скачков решения при выходе на границу связи. Эта ситуация является типичной для механических систем с односторонними неголономными связями, исследование которых может проводиться с помощью полученного результата.

При $(c, f) = 0$ решение системы $x(x_0, t)$, отвечающее начальным условиям x_0, строится следующим образом:

a) Если (пока) $r\big(x(x_0, t)\big) > 0$, то решение строится с помощью свободной системы, пока не выполнены b) или c)

b) Если $r\big(x(x_0, t^*)\big) = 0, \dot{r} = 0$ и существует $\varepsilon > 0$, что для всех $t \in (t^*, t^* + \varepsilon)$ вдоль решения свободной системы справедливо $\ddot{r} \leq 0$, то происходит переход от a) к d), либо решение строится с помощью d) в случае, если $t^* = 0$. Этот переход называется *выходом на ограничение*.

c) Если $r\big(x(x_0, t^*)\big) = 0, \dot{r} < 0$, то происходит *удар*: $x^- = x(x_0, t^*) \to x^+ = S(x^-)$, причём $r(x^+) = 0, \dot{r}(x^+) \geq 0$. Если $\dot{r}(x^+) = 0$ и для решения свободной системы с начальными условиями x^+ справедливо b), то происходит переход к d), иначе решение продолжается с помощью a).

d) Если (пока) $r(x) = 0$, то решение строится с помощью системы на ограничении $\dot{x} = X(x) + R(x)$ пока не выполнено e)

e) Если $r\big(x(x_0, t^{**})\big) = 0, \ddot{r} \geq 0$ и существует $\varepsilon > 0$, что для всех $t \in (t^{**}, t^{**} + \varepsilon)$ вдоль решения свободной системы справедливо $\ddot{r} > 0$, то происходит переход от d) к a), называемый *сходом с ограничения.*

Этот случай покрывает механические системы с односторонними голономными связями.

Рассмотрим *условие общности* - векторы c и $A^T c + Uf$ линейно независимы, *условие касания* - $(c, f) = 0$, *условие возвращаемости* - $\ddot{r}|_{X(x)}(0) = (A^T c + Uf, f) < 0$.

При их выполнении в окрестности начала координат можно построить отображение последования, сопоставляющее ближайшие по времени моменты схода с ограничения. Рассматривается $\hat{P} = S\left(E - 2f\frac{(A^T c+Uf)^T G}{(A^T c+Uf,f)}\right)$ - ограничение его дифференциала на гиперплоскость $(c, f) = 0$ (G-матрица Грама скалярного произведения).

Теорема 2. Пусть для системы ОДУ с односторонним ограничением выполнены условия, указанные выше. Если все собственные значения оператора $\widehat{\mathrm{P}}$ строго меньше единицы по абсолютной величине и 0 – устойчивая по Ляпунову неподвижная точка системы на ограничении, то решение $x(0, t) \equiv 0$ системы устойчиво по Ляпунову. Если существует хотя бы одно собственное значение оператора $\hat{P}$, большее по модулю, чем единица, и соответствующее собственное подпространство не касается многообразия $\dot{r}(x) = 0$, либо *0* – неустойчивая по Ляпунову неподвижная точка системы на ограничении, то решение $x(0, t) \equiv 0$ системы неустойчиво по Ляпунову.

В случае, когда некоторые из собственных значений оператора $\hat{P}$ равны по модулю единице, ситуация усложняется. Пусть $\mu_1, \mu_2, \dots \mu_l$ – действительные, а $\vartheta_1, \overline{\vartheta_1}, \dots, \vartheta_k, \overline{\vartheta_k}$ - комплексные собственные значения оператора $\widehat{\mathrm{P}}$, $\; l + 2k = n - 1$. Записывая ϑ_j в виде $\rho_j e^{i\varphi_j}, \varphi_j \neq 0$, можно представить матрицу ограничения дифференциала отображения Пуанкаре (строго говоря, сколь угодно близкого) в новом базисе:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} \mu_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \mu_l & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & B_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & B_k \end{pmatrix}, \; B_j = \rho_j \begin{pmatrix} cos\ \varphi_j & sin\ \varphi_j \\ -sin\ \varphi_j & cos\ \varphi_j \end{pmatrix}, j = 1 \dots k.$$

Рассмотрим ограничение отображения Пуанкаре на границу связи $\hat{P}: z \to z^+$, определяемую формулами (по повторяющимся на разных уровнях индексам предполагается суммирование):

$$\xi^+{}_i = \mu_i \xi_i + b_i^{vs} \xi_v \xi_s + g_i^{vp} \xi_v \eta_p + h_i^{pq} \eta_p \eta_q + \overline{o}(\|z\|^2),$$
$$\eta^+{}_j = \rho_j \left(\eta_j cos\varphi_j + \eta_{j+1} sin\varphi_j\right) + A_j^{vs} \xi_v \xi_s + B_j^{vp} \xi_v \eta_p + C_j^{pq} \eta_p \eta_q + \overline{o}(\|z\|^2)$$
$$\eta^+{}_{j+1} = \rho_j \left(-\eta_j sin\varphi_j + \eta_{j+1} cos\varphi_j\right) + A_{j+1}^{vs} \xi_v \xi_s + B_{j+1}^{vp} \xi_v \eta_p + C_{j+1}^{pq} \eta_p \eta_q + \overline{o}(\|z\|^2),$$

$$i, v, s = 1 \dots l, \qquad p, q = 1..k, j = 1,3,5,..2k-1$$

Без потери общности будем считать, что $|\mu_i| = 1, i = 1..\grave{l} \le l,\ |\rho_j| = 1, j = 1..\grave{k} \le k$, и допустим, что соответствующие им жордановы клетки имеют единичный размер, а остальные собственные значения строго меньше единицы по абсолютной величине.

Рассмотрим функции

$$M_i(z) = sign(\mu_i \xi_i)\left(b_i^{vs}\xi_v\xi_s + g_i^{vp}\xi_v\eta_p + h_i^{pq}\eta_p\eta_q\right),\ i = 1..\grave{l}\,,$$

$$N_j(z) = sign\left(\rho_j\left(\eta_j cos\varphi_j + \eta_{j+1} sin\varphi_j\right)\right)\left(A_j^{vs}\xi_v\xi_s + B_j^{vp}\xi_v\eta_p + C_j^{pq}\eta_p\eta_q\right),$$

$$N_{j+1}(z) = sign\left(\rho_j\left(-\eta_j sin\varphi_j + \eta_{j+1} cos\varphi_j\right)\right)\left(A_{j+1}^{vs}\xi_v\xi_s + B_{j+1}^{vp}\xi_v\eta_p + C_{j+1}^{pq}\eta_p\eta_q\right),$$

$$j = 1,3,5, \dots 2\grave{k} - 1.$$

Теорема 3. Пусть выполнены условия общности, касания и возвращаемости. Если нулевое решение системы на ограничении устойчиво, и все вышеуказанные функции отрицательно определены при $\xi_i \ne 0, \eta_j cos\varphi_j + \eta_{j+1} sin\varphi_j \ne 0$ и $-\eta_j sin\varphi_j + \eta_{j+1} cos\varphi_j \ne 0$ соответственно, то решение $x(0,t) \equiv 0$ системы устойчиво по Ляпунову. Если среди этих функций существует хотя бы одна положительно определённая при $\xi_i \ne 0$ функция M_i, причём соответствующее ей собственное подпространство линейной части отображения последования в нуле не касается многообразия $\dot{r}(x) = 0$, то нулевое решение системы неустойчиво по Ляпунову.

Можно показать, что условия теорем 1 и 2 нельзя ослабить в части требований к расположению собственных подпространств при формулировке условий неустойчивости.

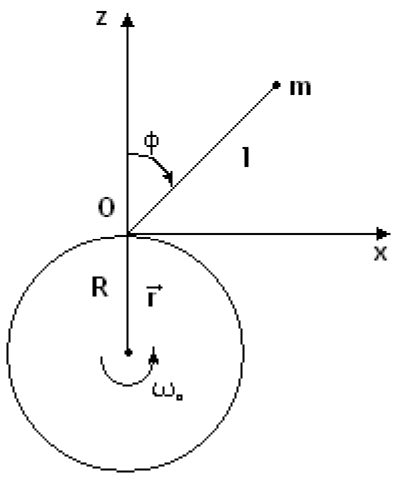
Глава 3 посвящена рассмотрению механических примеров, для исследования которых применяются результаты главы 2.

Условия $(c, f) < 0$ (или $\ddot{r}(x(t))|_{x=0} < 0$) в механике имеют простой смысл – активные силы должны стремиться “прижать“ систему к границе односторонней связи (дифференциальной и голономной соответственно).

В первой части показывается, что всегда при числе степеней свободы большем единицы в системах с неудерживающей голономной связью для положений равновесия на ней будут существовать собственные значения дифференциала отображения последования равные по модулю (и просто равные) единице, что делает неприменимой теорему 2 в части исследования устойчивости. Результаты главы 2 остаются справедливыми, то есть имеется качественное описание характера движения системы в окрестности положения равновесия, но полного исследования устойчивости неподвижной точки вообще говоря сделать не удаётся. Ситуацию с исследованием устойчивости систем рассматриваемого типа спасают результаты А.П. Иванова, а в качестве вывода можно сказать, что метод функций Ляпунова оказывается более эффективным для исследования устойчивости положений равновесия механических систем с односторонними голономными связями, когда имеет место интеграл энергии или Якоби. Если же не удаётся построить функцию Ляпунова, то можно попытаться применить теорему 3 главы 2 для исследования устойчивости.

Примером систем с односторонней голономной связью служит модельная задача о космическом лифте. Идея “космического лифта“ восходит к К.Э Циолковскому и неоднократно обсуждалась в научной и технической литературе. Смысл её в том, что на экваторе Земли строится башня или закрепляется трос так, что вершина башни или свободный конец троса находится на геостационарной орбите (т.е. на расстоянии 42270 км. от центра Земли). Тогда, добравшись с Земли до вершины этой конструкции, оказываемся, с малыми затратами энергии – уже в свободном космическом полёте. Благодаря развитию в последние годы нанотехнологий и перспективам их дальнейшего совершенствования (углеродные нанотрубки), проблема создания космического лифта уже не кажется технически безнадёжной.

Ещё одним случаем, в котором возникает аналогичная модель, является двухмодульная космическая станция, состоящая из массивной главной части к которой с помощью троса крепится лёгкий модуль или зонд, чьим влиянием на основную часть станции пренебрегают.



Система моделируется равномерно вращающимся шаром, к экватору которого одним концом прикреплена безмассовая нерастяжимая нить. На другом конце находится материальная точка. Наиболее интересными с практической точки зрения являются положения системы, когда центр шара, точка крепления нити и материальная точка на её конце находятся на одной прямой. Находятся условия натянутости связи.

Опираясь на результаты А.П. Иванова можно показать, что при нахождении материальной точки дальше геостационарной орбиты такие относительные равновесия будут устойчивыми.

Вторая часть содержит простые иллюстративные примеры систем с односторонним дифференциальным ограничением.

Устойчивость по скоростям кругового движения одностороннего конька Чаплыгина. По гладкой плоскости, скользит диск с “односторонним коньком”. Направление конька в абсолютных осях задаётся вектором τ, а нормаль к нему вектором $n = (cos\varphi, sin\varphi)$. Эти векторы вместе образуют систему координат, вмороженную в диск. Скорость центра масс конька (диска) представим во вмороженных осях в полярных координатах в виде $v = (cos\alpha n + sin\alpha\tau)v$. Влияние одностороннего конька по определению выражается наличием односторонней дифференциальной связи $r = (v, n) = vcos\alpha \geq 0$.

Используя теорию главы 2, можно показать, что решение $v = v_0, \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0, \alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ системы на ограничении устойчиво по Ляпунову по переменным $v, \dot{\varphi}, \alpha$. Вместе с теоремой 1 главы 2 это даёт устойчивость по скоростям кругового движения диска с односторонним коньком, аналогичного решению задачи о коньке Чаплыгина даже в силу возмущений приводящих к сходу со связи, если выполнены условия $\dot{\varphi}_0 < 0$ при $\alpha = {}^{\pi}/_{2}$ или $\dot{\varphi}_0 > 0$ при $\alpha = -{}^{\pi}/_{2}$. Оба из них означают, что диск пытается ориентироваться так, чтобы вектор скорости был направлен в запрещённую область и, тем самым, “прижимается” к границе связи.

Стационарный режим генератора с ограничением скорости вращения его ротора. Рассмотрим систему ОДУ:

$$i^{\cdot} = -(r + k\omega)i$$
$$\dot{\omega} = jki^2$$

К такой форме приводятся уравнения, описывающие при малых токах генератор последовательного возбуждения без внешнего момента, приложенного к валу.

Введём постоянные величины $\omega_0 = -r/k$ и i_0. Поддержание первой из них обеспечивает сохранение постоянной величины тока i_0 в системе. Допустим, что на систему наложено ограничение $\omega \geq \omega_0$ и выполнено условие $k < 0$ (равносильное $(c, f) < 0$ в общей теории главы 2). Тогда теорема 1 главы 2 обеспечивает устойчивость решения $\omega_0(t) \equiv -r/k$, $i(t) \equiv i_0$ системы с односторонним ограничением.

Третья часть отводится исследованию обобщения задачи Суслова, также являющей собой пример системы с односторонней дифференциальной связью в случае $(c, f) < 0$. Рассматривается динамически невырожденное твёрдое тело, точка О которого зафиксирована в абсолютном пространстве. Внешние силы отсутствуют, либо не создают момента относительно точки О. Пусть ω - вектор угловой скорости, а e - орт, вмороженный в тело. На тело наложена односторонняя дифференциальная связь, если не забывать про угловое положение тела) $(\omega, e) \geq 0$.

Для её реализации используется обобщённая схема Вагнера с заменой колёсиков с острой кромкой (эквивалентных в данном случае конькам Чаплыгина) на аналогично закреплённые односторонние коньки , лежащие в одной плоскости, вмороженной в тело и проходящей через неподвижную точку. Их допустимые для скольжения стороны расположим центрально-симметрично относительно последней. Этим обеспечивается требуемая возможность вращения только в одну сторону.

Решается задача поиска и исследования устойчивости неподвижных точек системы (стационарных движений твёрдого тела) по компонентам угловой скорости. Поведение угловых координат не исследуются. Если классические неподвижные точки уравнений Эйлера попали в область $(\omega, e) > 0$, то их устойчивость определяется классическими результатами. Отдельно исследуется начало координат $\omega = 0$. Можно показать, что $\omega = 0$ всегда является устойчивой по Ляпунову неподвижной точкой системы.

Случай шарового тензора инерции тривиален – каждая точка фазового пространства является устойчивой по Ляпунову неподвижной точкой системы.

Для динамически-симметричного твёрдого тела существуют:

- классические, попавшие в допустимую область, неустойчивые стационарные движения в главной плоскости эллипсоида инерции. Последняя перпендикулярна оси динамической симметрии.

- устойчивые стационарные движения, отвечающие вращению вокруг оси динамической симметрии, лежащей в плоскости, ограничивающей связь.
- новые устойчивые стационарные движения, заполняющие первую и третью четверти границы связи (в подходящих координатах и при соответствующей нумерации осей).

В общем случае несимметричного тела сохраняются классические стационарные вращения вокруг главных осей эллипсоида инерции, к которым прибавляются семейства равновесий, если граница связи является главной плоскостью границы связи. Последние устроены аналогично новым неподвижным точкам случая симметричного тела. Если же плоскость $(\omega, e) = 0$ не является главной для эллипсоида инерции, то можно указать условие, когда на ней возникает однопараметрическое семейство неподвижных точек, чья устойчивость исследуется с помощью теоремы 1 главы 2.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. Белецкий В.В., Иванов М.Б., Отставнов Е.И.Модельная задача о космическом лифте. // Космич. Исслед. 2005, Т.43, Вып. 2.
2. Отставнов Е.И. Уравнения движения и условия существования системы двойного астероида // Космич. Исслед. 2008, Т.46, Вып. 2.