

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

Кремнёв Андрей Викторович

**Математические модели движения на
роликовой доске (скейтборде)**

Специальность: 01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва 2009

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники
механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова

Научный руководитель: Кандидат физико-математических наук,
доцент А.С. Кулешов

Официальные оппоненты: Доктор физико-математических наук,
профессор И.И. Косенко
Кандидат физико-математических наук,
А.С. Сумбатов

Ведущая организация: Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского
Российской Академии Наук

Защита состоится 05 июня 2009 года в 15 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 по механике при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 05 мая 2009 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.22
доцент

В.А. Прошкин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Исследования динамики спортивных средств передвижения типа скейтборда необходимы для того, чтобы в перспективе выработать некоторые общие принципы катания на подобных объектах и представить полученные принципы в виде инструкции для начинающих спортсменов. Наличие некоторых общих рекомендаций о правильном пользовании досками привело бы к значительному уменьшению травматизма, вызванного падениями при катании.

Цель диссертационной работы. Основной целью данной диссертационной работы является построение математической модели движения человека на роликовой доске (скейтборде), получение уравнений движения и исследование вопросов их интегрируемости, а также вопросов устойчивости стационарных движений и поведения системы вблизи положения равновесия.

Научная новизна. В данной работе были впервые получены полные уравнения движения человека на скейтборде для двух приведённых моделей. До этого были известны лишь приближенные (линейные) уравнения движения. Анализ полной системы уравнений движения человека на скейтборде позволил обнаружить интегрируемый случай в данной задаче. Для найденного интегрируемого случая были получены строгие выводы об устойчивости стационарных движений системы и построены бифуркационные диаграммы Пуанкаре – Четаева. Также впервые было исследовано поведение системы вблизи статически устойчивого положения равновесия. При этом было установлено, что в случае движения скейтборда в неустойчивом направлении система стремится изменить направление движения.

Достоверность. Все результаты диссертационной работы являются строго обоснованными, они базируются на общих теоремах динамики, теории устойчивости и бифуркаций.

Используемые методы. Уравнения движения системы были получены методом Аппеля. Для исследования устойчивости и бифуркаций стационарных

движений системы в работе использовались методы Рауса, Ляпунова, Четаева, Пуанкаре и Румянцева. При исследовании поведения системы вблизи положения равновесия использовался метод нормальных форм Пуанкаре.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты дают представление о движении человека на скейтборде и об устойчивости различных стационарных движений.

Апробация работы. Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Десятая Международная конференция «Устойчивость, управление и динамика твердого тела», Донецк, Украина, 2008 г.
- Шестая Международная конференция ENOC-2008, Санкт-Петербург, Россия, 2008 г.
- XXXVI Международная школа-конференция АРМ-2008, Санкт-Петербург, Россия, 2008 г.
- Девятая Международная конференция MOVIC-2008, Мюнхен, Германия, 2008 г.
- Десятый Международный семинар «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления» им. Е.С. Пятницкого, Москва, Россия, 2008 г.
- Семинар по аналитической механики и теории устойчивости им. В.В. Румянцева кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. А.В. Карапетяна, 2009 г.
- Семинар по динамике относительного движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. Ю.Ф. Голубева, доц. К.Е. Якимовой, доц. Е.В. Мелкумовой, 2009 г.

– Семинар отдела механики ВЦ РАН им. А.А. Дородницына под руководством проф. С.Я Степанова, 2009 г.

Публикации. Основные результаты диссертационной работы изложены в семи научных работах, две из них опубликованы в журналах, которые входят в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертационная работа состоит из введения, двух глав и списка литературы из 135 наименований. Общий объем диссертации – 118 страниц.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** определена цель диссертации, обоснована научная новизна, дан обзор работ, связанных с исследованиями динамики неголономных систем, а также приводится краткое содержание диссертации.

В **первой главе** рассматривается простейшая модель движения человека на скейтборде. Предполагается, что человек, катающийся на скейтборде, представляет собой твердое тело, остающееся ортогональным к плоскости доски во все время движения. В этом случае наклон доски и наклон человека определяются одной обобщенной координатой. Также предполагается, что управление скейтбордом со стороны человека отсутствует.

Во *введении* к первой главе проводится обзор имеющейся литературы по исследуемой задаче, а затем дано краткое описание скейтборда и составляющих его частей. Предполагается, что скейтборд движется по горизонтальной плоскости и при этом все четыре колеса опираются о плоскость. Также делается предположение о том, что в случае наклона доски скейтборда возникает восстанавливающий момент, который возвращает доску в первоначальное положение.

Основные системы координат, используемые при изучении движения системы, вводятся в *первом параграфе*. Формулируется постановка задачи, предполагается, что скейтборд движется таким образом, что его колеса не

могут проскальзывать в направлении, перпендикулярном плоскости колеса. Это приводит к тому, что на систему накладываются неголономные связи подобные тем, что возникают в задаче о движении саней Чаплыгина. На отрезке, соединяющем середины колесных осей, указывается точка P , скорость которой всегда направлена вдоль этого отрезка. Именно в эту точку помещается начало подвижной полусвязанной системы координат, относительно которой записываются уравнения движения.

Второй параграф посвящен выводу кинематических соотношений, связывающих угол наклона доски с углами поворота колесных осей скейтборда. При этом также выясняется, что найденная точка P будет неподвижна относительно отрезка, связывающего середины осей колес.

Последующие *два параграфа* посвящены выводу уравнений движения системы. Уравнения движения записываются в форме уравнений Аппеля. Для этого строится функция Аппеля (энергия ускорений). Проверяется, что полученные уравнения всегда обладают первым интегралом – интегралом энергии.

В *пятом параграфе* проводится сравнение полученных уравнений движения с теми приближенными, что были выведены ранее в работах Хаббарда^{1 2} и Эстерлинга³, и показывается, как свести найденные уравнения к уравнениям указанным в их работах.

Уравнения движения скейтборда всегда имеют важное частное решение, которое соответствует равномерному прямолинейному движению скейтборда. Устойчивость этого движения исследуется в *шестом параграфе*. Выясняется, что в данной задаче имеет место особый случай одного нулевого корня. Получены условия устойчивости равномерного прямолинейного движения скейтборда, а также условия устойчивости равновесия, когда скейтборд неподвижно стоит на плоскости. Оказывается, что устойчивость движения

¹ M. Hubbard. Lateral Dynamics and Stability of the Skateboard // ASME Journal of Applied Mechanics. 1979. V. 46, P. 931-936.

² M. Hubbard. Human Control of the Skateboard // Journal of Biomechanics. 1980. V. 13, P. 745-754.

³ A.E. Osterling. MAS 3030. On the Skateboard, Kinematics and Dynamics. Master Thesis. 2004. School of Mathematical Sciences, University of Exeter. United Kingdom.

зависит от направления движения и от того, где именно относительно центра доски стоит человек. Также показано, что в случае статической неустойчивости движение можно стабилизировать за счет увеличения скорости скейтборда.

Вопросу существования у полученных уравнений движения инвариантной меры с гладкой положительной плотностью посвящен *седьмой параграф* первой главы. Используя результаты В.В. Козлова, были найдены условия, при которых инвариантная мера существует.

При выполнении этих условий обнаруживается дополнительный интеграл, линейный относительно псевдоскоростей. Используя этот интеграл, можно получить полное решение задачи в виде квадратур. Подробный качественный анализ квадратур данного интегрируемого случая приведен в *восьмом параграфе*.

В *девятом параграфе* с использованием дополнительного первого интеграла исследуется устойчивость всех стационарных движений скейтборда для интегрируемого случая. Получены условия устойчивости стационарных движений, все аналитические результаты подтверждены серией построенных численно бифуркационных диаграмм Пуанкаре – Четаева.

В последнем, *десятом параграфе* первой главы, проводится анализ движения скейтборда вблизи статически устойчивого положения равновесия. Уравнения движения приводятся к нормальному виду, и на основе нормальной формы делается вывод о том, как ведет себя система вблизи положения равновесия. В частности оказывается, что при движении в неустойчивом направлении происходит смена направления движения.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию более сложной модели скейтборда. Предполагается, что наклон доски и наклон человека определяются двумя независимыми обобщенными координатами. Как и в первой главе предполагается, что управление скейтбордом со стороны человека отсутствует.

В *первых двух параграфах* второй главы выводятся уравнения движения данной модели скейтборда, при этом снова используется метод Аппеля. Полученные уравнения сравниваются с теми приближенными, что были выведены ранее в работах Хаббарда⁴.

Как и в случае простейшей модели, уравнения движения данной модели скейтборда допускают частное решение, которое соответствует равномерному прямолинейному движению скейтборда. Устойчивость этого движения исследуется в *третьем параграфе*. Снова имеет место особый случай одного нулевого корня. Получены условия устойчивости равномерного прямолинейного движения, а также равновесия скейтборда. Как и в первой главе, устойчивость будет зависеть от направления движения и от того, где стоит человек. В случае статической неустойчивости системы её можно стабилизировать, однако если человек нетвердо стоит на доске, то устойчивость невозможна ни при каких условиях.

Четвертый параграф посвящен исследованию условий существования у уравнений движения инвариантной меры с гладкой положительной плотностью. В результате получены лишь необходимые условия для существования инвариантной меры в данной задаче.

В *пятом параграфе* проводится анализ движения скейтборда вблизи статически устойчивого положения равновесия, при этом снова используется метод нормальных форм. Для упрощения вычислений на параметры системы накладывается некоторое ограничение, не нарушающее, впрочем, общности рассуждений. Никаких дополнительных эффектов, вызванных введением еще одной степени свободы, обнаружено не было. Движение данной модели скейтборда будет в точности таким же, как движение простейшей модели, рассмотренной в первой главе. В частности, при движении в неустойчивом направлении система стремится изменить направление движения.

⁴ См. ссылки, приведенные на странице 6.

По теме диссертации опубликованы следующие работы:

1. Кремнев А.В., Кулешов А.С. Нелинейная динамика простейшей модели скейтборда // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4. № 3. С. 323-340.
2. Кремнев А.В., Кулешов А.С. Нелинейная динамика модели скейтборда с тремя степенями свободы // Нелинейная динамика. 2008. Т. 4. № 3. С. 341-355.
3. Кремнев А.В., Кулешов А.С. Нелинейная динамика и устойчивость движения простейшей модели скейтборда. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при Механико-математическом факультете МГУ. 2007. 104 с.
4. Кремнев А.В., Кулешов А.С. Математическая модель скейтборда с тремя степенями свободы. М.: Изд-во Центра прикладных исследований при Механико-математическом факультете МГУ. 2008. 72 с.
5. Кремнев А.В., Кулешов А.С. Нелинейная динамика простейшей модели скейтборда // Механика твердого тела. Межведомственный сборник научных трудов. Донецк. 2007. Вып 37. С. 112-121.
6. Kremnev A.V., Kuleshov A.S. Dynamics and Simulation of the Simplest Model of a Skateboard // Proceedings of the 6th EUROMECH Nonlinear Dynamics Conference ENOC-2008. June 30 – July 4. 2008. Saint-Petersburg. Russia.
7. Kremnev A.V., Kuleshov A.S. Dynamics and Stability of the Simplest Skateboard Model // Proceedings of the 9th International Conference on Motion and Vibration Control MOVIC-2008. September 15-18. Muenchen. Germany.