Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.21

КРЫЖАНОВСКАЯ Наталья Юрьевна

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ СЛАБО ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва 2009

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор Александр Вадимович Булинский

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Михаил Анатольевич Лифшиц

кандидат физико-математических наук, Михаил Александрович Вронский

Ведущая организация: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 15 мая 2009 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 15 апреля 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор И.Н. Сергеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

Доказательство центральной предельной теоремы (ЦПТ) при различных условиях является традиционной задачей теории вероятностей (см., например, книги Гнеденко и Колмогорова[1], Ибрагимова и Линника[2], Петрова[3], Сенатова[4]). Достаточно указать на труды Муавра, Лапласа, Чебышева, Маркова, Ляпунова, Линдеберга, Бернштейна, Колмогорова, Прохорова, Леви, Гнеденко, Ибрагимова, Петрова, Золотарева, Ширяева и других ученых. Это важное направление исследований имеет множество применений в статистике. В частности, ЦПТ используется для проверки статистических гипотез и построения приближенных доверительных интервалов для параметров моделей. При анализе векторнозначных зависимых полей приходится вместо дисперсии для нормировки в центральной предельной теореме вводить асимптотическую матрицу ковариаций частных сумм случайного поля (так называемую долгосрочную матрицу ковариаций). Диссертационная работа посвящена изучению свойств оценок этой матрицы как для стационарных, так и для нестационарных полей. В случае, когда известно, что поле стационарное, используются статистики с локальным усреднением. Если же нет предположения о стационарности, применяются ядерные оценки.

Понятие независимости систем случайных величин является в теории вероятностей одним из основных. Для таких семейств случайных величин получено множество глубоких результатов. Однако в настоящее время имеется немало интересных стохастических моделей, описываемых зависимыми случайными величинами. Это объясняется как красотой математических конструкций, так и широким применением таких структур в физике, химии, биологии и экономике.

Важными примерами зависимых процессов и полей являются мартингалы и близкие им объекты, марковские процессы и поля, процессы и поля с перемешиванием. Еще одним широко распространенным под-

[1] Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, ГТТИ, М.-Л., 1949.

[2] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, Независимые и стационарно связанные величины, Наука, М., 1965.

[3] В. В. Петров, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин, Наука, М., 1987.

[4] В. В. Сенатов, Центральная предельная теорема. Точность аппроксимации и асимптотические разложения, Либроком, 2009.

ходом к описанию стохастической зависимости является задание ограничений на ковариации некоторых (пробных) функций от конечных наборов случайных величин или векторов.

В диссертации изучаются (BL, θ)-зависимые случайные поля, заданные на решетке $\mathbb{Z}^d$ $(d \geq 1)$. Этот класс случайных систем, введенный Булинским и Сюкэ[5] в 2001 г., позволяет единообразно рассматривать как положительно, так и отрицательно ассоциированные случайные системы, которые играют большую роль в статистической физике, теории перколяции и теории надежности. Также отметим, что при выполнении условия конечной восприимчивости (которое для стационарного в широком смысле поля сводится к суммируемости ковариационной функции), предложенного Ньюменом[6], квазиассоциированные случайные поля будут (BL, θ)-зависимыми. Кроме того, имеются примеры (BL, θ)-зависимых полей[7], которые не являются ассоциированными.

Существует достаточно много работ, посвященных исследованию ядерных оценок долгосрочной матрицы ковариаций для *последовательностей* зависимых центрированных случайных векторов $\{X_t\}_{t=1}^{\infty}$. Эти оценки часто возникают при изучении асимптотической нормальности параметров в эконометрических моделях[8], обладающих свойствами гетероскедастичности и автокорреляции ошибок. В анализе финансовых временных рядов и макроэкономических данных все большую популярность завоевывает обобщенный метод моментов[9], в котором важную роль играют состоятельные оценки долгосрочной матрицы ковариаций. Широкое применение именно ядерных оценок для долгосрочной матрицы ковариаций можно объяснить их тесной связью с хорошо изученным классом ядерных оценок матрицы спектральной плотности[10].

[5] A. Bulinski, C. Suquet, Normal approximation for quasi-associated random fields, Statist. Probab. Lett., 2001, V. 54, №2, P. 215–226.

[6] C. M. Newman, Normal fluctuations and the FKG inequalities, Commun. Math. Phys., 1980, V. 74, №2, P. 119–128.

[7] А. В. Булинский, А. П. Шашкин, Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственные системы, ФИЗМАТЛИТ, М., 2008.

[8] D. W. K. Andrews, Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation, Econometrica, 1991, V. 59, № 3, P. 817–858.

[9] L. P. Hansen, Large sample properties of generalized methods of moments estimators, Econometrica, 1982, V. 50, №4, P. 1029–1054.

[10] M. B. Priestley, Spectral analysis and time series, Probab. and Math. Statist., Academic Press, San Diego, 2001.

Цель работы

Настоящая диссертация посвящена исследованию слабо зависимых случайных полей. Ее основные задачи — установить состоятельность и сильную состоятельность оценок долгосрочной матрицы ковариаций для таких полей, а также получить новые асимптотические результаты, относящиеся к выявлению скорости сходимости в центральной предельной теореме для самонормированных частных сумм. Кроме того, разработан вариант метода секционирования дискретных множеств в многомерном пространстве, который позволяет доказать новые моментные и максимальные неравенства для сумм зависимых мультииндексированных случайных величин.

Научная новизна

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем.

1. Установлены теоремы о состоятельности и сильной состоятельности оценок долгосрочной матрицы ковариаций для слабо зависимых случайных полей.
2. Получена оценка скорости сходимости в многомерной центральной предельной теореме с самонормировкой.
3. Доказаны новые моментные и максимальные неравенства для слабо зависимых случайных полей. Предложен новый вариант метода секционирования дискретных множеств целочисленной решетки.

Результаты диссертации обоснованы в виде строгих математических доказательств и получены автором самостоятельно. Точные формулировки ряда утверждений приведены ниже.

Методы исследования

В работе используются традиционные методы теории вероятностей и случайных процессов (моментные и максимальные неравенства, урезание исходных случайных величин и др.), а также новый вариант секционирования множеств.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применение в теории случайных полей и непараметрической статистике.

Апробация работы

Результаты диссертации неоднократно докладывались автором на семинаре “Асимптотический анализ случайных процессов и полей” (мехмат МГУ, 2005–2008 гг., руководители — профессор А. В. Булинский и доцент А. П. Шашкин), а также на Большом кафедральном семинаре кафедры теории вероятностей (мехмат МГУ, 2009 г., руководитель — член-корреспондент РАН А. Н. Ширяев), Городском семинаре по теории вероятностей (Санкт-Петербург, 2009 г., руководитель — академик РАН И. А. Ибрагимов), конференции “Колмогоровские чтения-VI” (Ярославль, 2008 г.), XXVIII конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, 2006 г.).

Тематика работы поддержана грантом РФФИ №07-01-00373-а.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, насчитывающего 104 наименования. Общий объем работы — 99 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** излагается история вопроса, формулируются основные определения и описывается структура работы.

Введем основные определения. Пусть $|I|$ — мощность множества I; $\mathcal{BL}(n)$ — класс действительнозначных ограниченных липшицевых (bounded Lipschitz) функций на $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Случайное поле $X = \{X_j,\, j \in \mathbb{Z}^d\}$, принимающее значения в $\mathbb{R}^l$, называется (BL,θ)-*зависимым*, если существует монотонно стремящаяся к нулю при $r \to \infty$ последовательность $\theta = \{\theta_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ положительных чисел такая, что для любых конечных непересекающихся множеств $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ и любых функций $f \in \mathcal{BL}(|I|l)$, $g \in \mathcal{BL}(|J|l)$ верно неравенство

$$|\mathrm{cov}(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J))| \le \mathrm{Lip}(f)\,\mathrm{Lip}(g)(|I| \wedge |J|)\theta_{\mathrm{dist}(I,J)}, \quad (1)$$

где

$$\mathrm{dist}(I,J) = \min\{\|x-y\|,\, x\in I, y\in J\}, \qquad ||x|| = \max_{1\le s\le d} |x_s|,\ x\in\mathbb{Z}^d,$$

$$\mathrm{Lip}\,(f) = \sup_{u\ne v}\frac{|f(u)-f(v)|}{||u-v||_1}, \qquad ||v||_1 = \sum_{m=1}^{|I|l}|v_m|.$$

Определение (1) имеет следующий наглядный смысл. При увеличении расстояния между множествами I и J зависимость между случайными векторами, индексированными элементами этих множеств, уменьшается. А если расстояние между множествами не изменяется, а сами множества увеличиваются, то зависимость между соответствующими группами случайных векторов может расти.

Всюду далее термин "слабая зависимость" будет пониматься в смысле приведенного определения.

Для случайного поля $X = \{X_j,\, j\in\mathbb{Z}^d\}$, $d\ge 1$, долгосрочной матрицей ковариаций будем называть матрицу

$$\Sigma := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^d}\sum_{i,j\in U_n}\mathrm{Cov}(X_i,X_j), \tag{2}$$

$$U_n := [1,n]^d\cap\mathbb{Z}^d, \quad n\in\mathbb{N}.$$

Предполагается, что все элементы Σ существуют и конечны.

Если поле стационарное, то вместо матрицы Σ пишем C. Легко проверить, что элементы матрицы $C = (c_{r,q})_{r,q=1}^{l}$ имеют вид

$$c_{r,q} = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d}\mathrm{cov}(X_{0,r}, X_{j,q}), \quad r,q = 1,\dots,l. \tag{3}$$

Ряд работ посвящен изучению самонормировок в центральной предельной теореме для стационарных полей, и, в частности, исследованию оценок для $c_{r,q}$. В первой главе диссертации исследуются статистики с локальным усреднением для элементов матрицы C.

Если случайное поле центрированное, то (2) превращается в

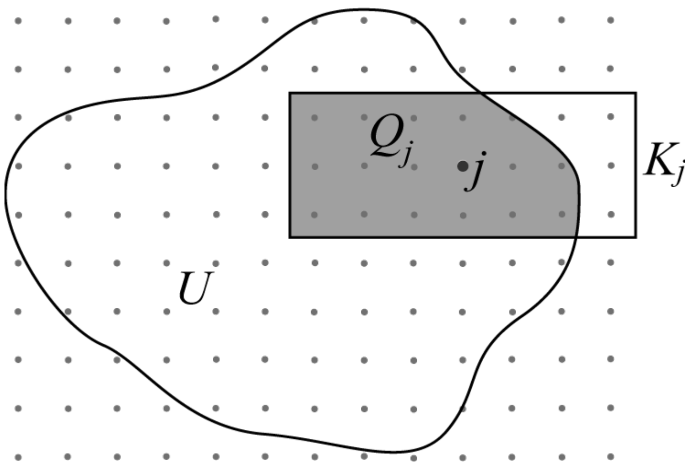
$$\Sigma := \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^d}\sum_{i,j\in U_n}\mathsf{E}\,X_iX_j^\top, \tag{4}$$

где "$\top$" обозначает транспонирование. Для матриц (4) во второй главе диссертации строятся многомерные аналоги ядерных оценок.

В **первой главе** диссертации установлен статистический вариант центральной предельной теоремы со случайной матричной нормировкой для векторнозначных слабо зависимых случайных полей. Основной результат (теорема 1.2.2) дает оценку скорости сходимости в центральной предельной теореме с самонормировкой.

В качестве нормировок в центральной предельной теореме рассматриваются следующие статистики. Для $j = (j_1, \ldots, j_d) \in U \subset \mathbb{Z}^d$ $(1 \le |U| < \infty)$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}(U) = (b_1, \ldots, b_d) \in \mathbb{N}^d$ и $r, q = 1, \ldots, l$ положим

$$K_j(\mathbf{b}) = \{t \in \mathbb{Z}^d : \ |j_m - t_m| \le b_m, \ m = 1, \ldots, d\},$$
$$Q_j = Q_j(U, \mathbf{b}) = U \cap K_j(\mathbf{b}),$$
$$\widehat{c}_{r,q}(U) = \frac{1}{|U|} \sum_{j \in U} |Q_j| \left(\frac{S_r(Q_j)}{|Q_j|} - \frac{S_r(U)}{|U|} \right) \left(\frac{S_q(Q_j)}{|Q_j|} - \frac{S_q(U)}{|U|} \right).$$



Оценки такого рода были введены в 1994 г. Пелиград и Шао[11] для процессов с перемешиванием ($l = 1$, $d = 1$). Для ассоциированных случайных полей ($l = 1$, $d \ge 1$) Булинский и Вронский[12] предложили обобщение упомянутых выше статистик. Для векторнозначных случайных полей ($l \ge 1$, $d \ge 1$) соответствующие случайные матричные нормировки изучались Булинским[13] в условиях квазиассоциированной зависимости. В указанных выше статьях рассматривается случай, в котором

[11] M. Peligrad, Q.-M. Shao, Self-normalized central limit theorem for sums of weakly dependent random variables, J. Theor. Probab., 1994, V. 7, № 2, P. 309–338.

[12] А. В. Булинский, М. А. Вронский, Статистический вариант центральной предельной теоремы для ассоциированных случайных полей, Фундам. и прикл. матем., 1996, Т. 2, № 4, С. 999–1018.

[13] А. В. Булинский, Статистический вариант центральной предельной теоремы для векторных случайных полей, Мат. заметки, 2004, Т. 76, № 4, С. 490–501.

множества $K_j(\mathbf{b})$ являются кубами (т.е. $b_1 = b_2 = \ldots = b_d$). В нашей работе изучается более общая ситуация. Положим $\langle \mathbf{b} \rangle = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_d$.

Последовательность непустых конечных множеств $U_n \subset \mathbb{Z}^d$ ($n \in \mathbb{N}$) называется *регулярно растущей* (к бесконечности), если

$$|U_n| \to \infty \quad \text{и} \quad |\partial U_n|/|U_n| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Здесь ∂U_n — граница множества U_n, т.е.

$$\partial U_n = \{s \in U_n : \inf_{t \in \mathbb{Z}^d \setminus U_n} \|s - t\| = 1\}.$$

В диссертации устанавливается следующий *статистический вариант* центральной предельной теоремы.

Теорема 1.1.2. *Пусть $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ — строго стационарное (BL, θ)-зависимое случайное поле со значениями в $\mathbb{R}^l$. Предположим, что при всех $r, q = 1, \ldots, l$*

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} |\operatorname{cov}(X_{0,r}, X_{j,q})| < \infty.$$

Тогда для любой последовательности множеств $U_n \subset \mathbb{Z}^d$, $n \in \mathbb{N}$, стремящейся к бесконечности регулярным образом, и для произвольной последовательности векторов $\mathbf{b}_n = (b_{n,1}, \ldots, b_{n,d}) \in \mathbb{N}^d$, $n \in \mathbb{N}$, такой что

$$b_n := \min_i b_{n,i} \to \infty, \quad \frac{\langle \mathbf{b}_n \rangle \, |\partial U_n|}{|U_n|} \to 0 \quad \text{при} \;\; n \to \infty,$$

справедливо соотношение

$$\widehat{c}_{r,q}(U_n) \xrightarrow{P} c_{r,q} \quad \text{при } n \to \infty$$

для всех $r, q = 1, \ldots, l$ (см. (3)). Кроме того, если матрица $C = (c_{r,q})_{r,q=1}^l$ невырождена, то имеет место

$$\widehat{T}_n := (|U_n| \widehat{C}_n)^{-1/2}(S(U_n) - |U_n| \,\mathsf{E}\, X_0) \xrightarrow{D} N(0, \mathbf{I}_l), \quad n \to \infty,$$

где $\mathbf{I}_l$ — единичная матрица порядка l.

Чтобы установить скорость сходимости в центральной предельной теореме со случайной нормировкой, вводятся некоторые дополнительные ограничения. Далее будем считать, что верны следующие предположения:

1°. $U_n = \{(a_{n,1}, a_{n,1}+l_{n,1}] \times \dots \times (a_{n,d}, a_{n,d}+l_{n,d}]\} \cap \mathbb{Z}^d$, здесь $a_{n,m} \in \mathbb{Z}$, $l_{n,m} \in \mathbb{N}$ для $n \in \mathbb{N}$, $m = 1, \dots, d$.

2°. $D_s := \sup\limits_{j \in \mathbb{Z}^d} \mathsf{E}\, \|X_j\|^s < \infty$ для некоторого $s > 2$.

3°. X является (BL, θ)-зависимым случайным полем, причем $\theta_r \le c_0 r^{-\lambda}$ при $r \in \mathbb{N}$ (см. (1)) для некоторого

$$\lambda > d\psi(s),$$

где s фигурирует в условии 2°, а функция $\psi(s)$ имеет вид

$$\psi(s) = \begin{cases} (s-1)/(s-2), & 2 < s \le 4, \\ (3-\sqrt{s})(\sqrt{s}+1)/2, & 4 < s \le t_0^2, \\ \frac{(s-1)\sqrt{(s-2)^2-3}-s^2+6s-11}{3s-12}, & s > t_0^2. \end{cases}$$

Здесь $t_0 \approx 2.1413$ — наибольший корень уравнения $t^3+2t^2-7t-4=0$.

Булинским и Шашкиным[14] доказано, что при выполнении условий $1^\circ - 3^\circ$ для некоторых положительных δ и B, зависящих только от d, s, D_s и λ, верна оценка

$$\mathsf{E}\, |S(U_n)|^{2+\delta} \le B|U_n|^{1+\delta/2}. \tag{5}$$

Теорема 1.2.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 1.1.2 *и условия* 1°–3°, *где* $s \in (2,3]$ *в* 2° *и* $\lambda > ds/(s-2)$ *в* 3°. *Кроме того, предположим, что* $|U_n| = O(l_n^M)$, $l_n := \min\limits_i l_{n,i}$, *причем* $d \le M < 2d(s-1)/(s-2)$. *Тогда*

$$\sup_{B \in \mathcal{C}_l} |\,\mathsf{P}(\widehat{T}_n \in B) - \mathsf{P}(Z \in B)| = O(l_n^{-\tau}),$$

здесь $\mathcal{C}_l$ *— класс ограниченных выпуклых подмножеств* $\mathbb{R}^l$, Z *— стандартный нормальный вектор в* $\mathbb{R}^l$, $a = 2 + 4/\delta$ *(см. (5)),*

$$\tau = \min\left\{\frac{2}{5}\mu, \frac{\nu}{3}\right\}, \qquad \nu = \frac{M(\lambda(s-2)-ds)}{2\lambda + d(s+1+2\lambda(s-1))},$$

$$\mu = \begin{cases} d\lambda/(a\lambda+ad) & \text{для } \lambda+1 < a \text{ и } d \le a, \\ \lambda/(2\lambda+1) & \text{для } \lambda+1 \ge a \text{ и } d > a, \\ d\lambda/((a+d)\lambda+d) & \text{для } \lambda+1 \ge a \text{ и } d \le a. \end{cases}$$

[14] A. V. Bulinski, A. P. Shashkin, Strong invariance principle for dependent random fields, IMS Lect. Notes — Monograph Series Dynamics and Stochastics, 2006, V. 48, P. 128–143.

Доказательство этого результата потребовало установления следующей алгебраической леммы, представляющей самостоятельный интерес.

Лемма 1.2.1. *Пусть* $T = (t_{i,j})_{i,j=1}^{l}$ — *произвольная симметричная матрица,* $C = (c_{i,j})_{i,j}^{l}$ — *симметричная положительно определенная матрица,*

$$\lambda := \frac{1}{\max_{i=1,\dots,l}\left\{\sum_{j=1}^{l}(|c_{i,j}|+1)\right\}}, \quad t := \frac{1 - \|\,\mathbf{I}_l - \lambda C\|_2}{2\lambda}.$$

Пусть положительное число Δ *удовлетворяет неравенству*

$$\Delta < \min\{1, t, \lambda_{min}\},$$

где λ_{min} — *минимальное собственное значение матрицы* C. *Тогда из неравенства* $\|T - C\| < \Delta$ *следует, что матрица* T *положительна, обратима и*

$$\|T^{-1/2} - C^{-1/2}\| < \frac{\sqrt{l}}{2} t^{-3/2}\|T - C\|.$$

Здесь для квадратной матрицы W порядка l используются максимальная строчная матричная норма $\|W\|$ и спектральная матричная норма $\|W\|_2$.

Вторая глава посвящена ядерным оценкам долгосрочной матрицы ковариаций для слабо зависимых и необязательно стационарных векторнозначных случайных полей.

Ядерные оценки долгосрочной матрицы ковариаций для последовательности ($d = 1$) центрированных случайных векторов имеют следующий вид:

$$\tilde{\Sigma}_n := \sum_{j=-n+1}^{n-1} k\left(j/\gamma_n\right)\tilde{\Gamma}(j), \tag{6}$$

$$\tilde{\Gamma}(j) := \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-j} X_t X_{t+j}^{\top}, \quad j \ge 0,$$

$$\tilde{\Gamma}(j) := \frac{1}{n}\sum_{t=1-j}^{n} X_t X_{t+j}^{\top}, \quad j < 0,$$

где $k(x)$ — некоторая *ядерная функция* (*ядро*), а γ_n — так называемая *ширина окна*.

В 80-х годах прошлого века активно исследовались оценки вида (6) с различными ядерными функциями. В статье[15] проводится сравнение свойств таких оценок и изучается вопрос оптимизации выбора последовательности $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. В частности, устанавливается, что квадратичное спектральное ядро является в некотором смысле оптимальным.

До появления работы Хансена[16] для доказательства результатов о ядерных оценках матрицы ковариаций обычно использовали предположение о наличии конечного четвертого момента. В упомянутой статье состоятельность оценок установлена при условии конечности абсолютного момента, порядка чуть большего двух. Более того, не требуется стационарность исследуемого процесса. Для последовательностей с определенной структурой зависимости сильная состоятельность оценок установлена Йонгом[17]. В данной диссертации получены аналогичные результаты для (BL,θ)-зависимых случайных полей, обобщающие работы [16] и [17].

Во многих исследованиях результаты о ядерных оценках формулируются для α- и ϕ-перемешивающих последовательностей случайных векторов. Этот подход описания структуры зависимости имеет некоторые недостатки, как отмечено авторами[18]. Во-первых, уже из самого определения последовательностей с перемешиванием понятно, что достаточно сложно проверить, обладают ли имеющиеся данные этим видом зависимости. Во-вторых, как показано в статье Эндрюса[19], даже авторегрессии первого порядка с дискретным шумом не обладают свойством сильного перемешивания. Отметим, что верно и обратное: не всякое поле, обладающее свойствами перемешивания, является ассоциированным. Однако анализ процессов и полей со свойством положительной ассоциированности (или его модификациями) имеет то преимущество, что предельные теоремы устанавливаются при весьма

[15] D. W. K. Andrews, Heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimation, Econometrica, 1991, V. 59, № 3, P. 817–858.

[16] *B. E. Hansen*, Consistent covariance matrix estimation for dependent heterogeneous processes, Econometrica, 1992, V. 60, №4, P. 967–972.

[17] R. M. Jong, A strong consistency proof for heteroskedasticity and autocorrelation consistent covariance matrix estimators, Econometric Theory, 2000, V. 16, № 2, P. 262–268.

[18] P. Ango Nze, P. Doukhan, Weak dependence: models and applications to econometrics, Econometric Theory, 2004, V. 20, № 6, P. 995–1045.

[19] D. W. K. Andrews, Non-strong mixing autoregressive processes, J. Appl. Prob., 1984, V. 21, P. 930–934.

простых условиях на ковариационную функцию и абсолютные моменты рассматриваемых величин.

В первом параграфе второй главы вводится аналог ядерных оценок (6) долгосрочной матрицы ковариаций для полей (см. (4)).

Далее будем говорить, что *функция* $k(\cdot)$ *ядерная* (или принадлежит классу $\mathcal{K}$), если выполняются следующие условия:

1) $k : \mathbb{R}^d \to [-1, 1]$;

2) $k(0) = 1$;

3) $k(x)$ — непрерывна для почти всех $x \in \mathbb{R}^d$ и непрерывна в нуле;

4) $\int_{\mathbb{R}^d} |k(x)| dx < \infty$;

5) $k(x) = k(y)$ при $||x|| = ||y||$.

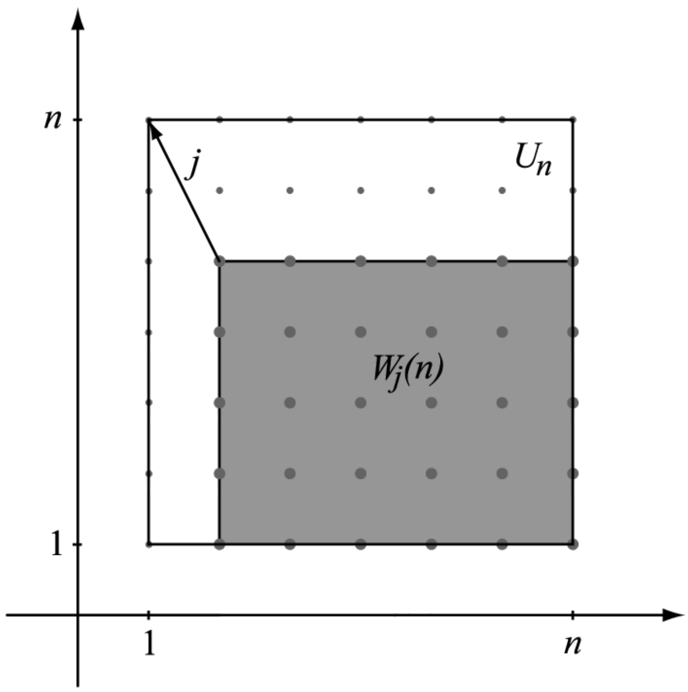
Рассмотрим также последовательность $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ такую, что

1′. $\gamma_n \to \infty$ при $n \to \infty$;

2′. $\gamma_n^{1+2q} n^{-1} = O(1)$ для некоторого $q > 1/2$.

Пусть

$$V_n := [-(n-1), n-1]^d \cap \mathbb{Z}^d, \quad n \in \mathbb{N};$$
$$W_j = W_j(n) := \{t \in U_n : \ t + j \in U_n\}, \quad j \in V_n.$$



Определим следующие статистики:

$$\tilde{\Gamma}(j) := \frac{1}{n^d} \sum_{t \in W_j} X_t X_{t+j}^\top, \quad j \in V_n,$$
$$\tilde{\Sigma}_n := \sum_{j \in V_n} k\left(j/\gamma_n\right) \tilde{\Gamma}(j). \tag{7}$$

Во втором параграфе устанавливается новое моментное неравенство, которое используется в разделе 2.3 для доказательства состоятельности введенных ядерных оценок. При дополнительном условии на ядерную функцию доказана сильная состоятельность этих оценок. Сформулируем основные результаты.

Для случайного вектора $Y = (Y_1, \ldots, Y_l)^\top$ определим нормы

$$||Y||_p := \left(\sum_{a=1}^{l} \mathsf{E}\,|Y_a|^p \right)^{1/p}, \quad p > 1.$$

Как обычно, мы не различаем случайные величины, совпадающие почти наверное.

Теорема 2.3.1. *Пусть $X = \{X_j,\, j \in \mathbb{Z}^d\}$ есть (BL, θ)-зависимое векторнозначное центрированное случайное поле, где последовательность θ такова, что $\theta_m = O(m^{-\lambda})$, причем $r := d/\lambda \in (0,1)$. Допустим, что функция $k = k(x)$ принадлежит классу $\mathcal{K}$, а последовательность $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ удовлетворяет условиям $1'$, $2'$ и, кроме того, $q > 1/2 + r$. Предположим, что*

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}^d} ||X_j||_p =: D < \infty$$

для некоторого

$$p > \frac{4q + q^{-1} + 4}{2q - 2r - 1}.$$

Тогда (см. (7))

$$\tilde{\Sigma}_n \xrightarrow{P} \Sigma \quad \text{\textit{при}} \quad n \to \infty.$$

При больших значениях q в условиях теоремы 2.3.1 можно взять p достаточно близким к 2, так как

$$2 < \frac{4q + q^{-1} + 4}{2q - 2r - 1} \to 2 \quad \text{при} \quad q \to \infty.$$

Иначе говоря, можно обойтись малым запасом абсолютных моментов поля X.

Теорема 2.3.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.3.1 *и существует невозрастающая функция* $g(z): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *такая, что*

1). $|k(x)| \le g(||x||)$ *для* $x \in \mathbb{R}^d$;

2). $\int_{\mathbb{R}^d} g(||x||)dx < \infty$.

Тогда

$$\tilde{\Sigma}_n \to \Sigma \quad \text{п.н. при} \quad n \to \infty.$$

Если к условиям теоремы 2.3.1 добавить предположение, что $k(x)$ имеет ограниченный носитель, то $\widehat{\Sigma}_n \to \Sigma$ п.н. при $n \to \infty$. Это следует из теоремы 2.3.2, так как можно положить $g(z) = \mathbf{1}\{z \le u\}$, где u — такое число, что $k(x) = 0$ при x, для которых $||x|| > u$.

В последнем параграфе второй главы изучается взаимосвязь ядерных оценок и статистик с локальным усреднением, которые рассматриваются в первой главе.

Третья глава содержит 3 параграфа. В первом параграфе автором предложен новый вариант метода секционирования Бернштейна, основанный на результатах Булинского[20] и Лифшица[21].

Отметим, что существенным оказывается использование двух типов разбиения множеств. Один из них позволяет провести секционирование множеств, состоящих из большого числа элементов целочисленной решетки. Второй хорошо работает только для достаточно малых множеств.

Приведем здесь формулировки некоторых результатов первого параграфа третьей главы диссертации.

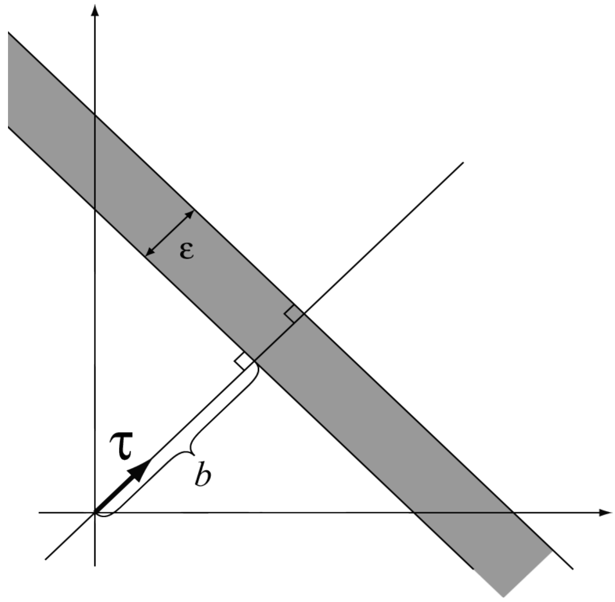
Будем говорить, что множества W_1 и W_2 из $\mathbb{R}^d$ отделены слоем толщины ε, если найдутся единичный вектор $\tau \in \mathbb{R}^d$ и число $b \in \mathbb{R}$ такие, что

$$\begin{aligned} W_1 \subset &\{t \in \mathbb{R}^d \colon (\tau, t) \le b\} \quad \text{и} \\ W_2 \subset &\{t \in \mathbb{R}^d \colon (\tau, t) \ge b + \varepsilon\}. \end{aligned}$$

Здесь (x, y) обозначает скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_d)^\top$, $y = (y_1, \ldots, y_d)^\top \in \mathbb{R}^d$, т.е. $(x, y) = \sum_{i=1}^d x_i y_i$.

[20] А. В. Булинский, Предельные теоремы в условиях слабой зависимости, Изд-во МГУ, М., 1989.

[21] М. А. Лифшиц, Секционирование многомерных множеств, Кольца и модули. Предельные теоремы теории вероятностей, Изд-во ЛГУ, Л., 1986, С. 175–178.



Для семейства неотрицательных чисел $A = \{a_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ и любого множества $U \subset \mathbb{Z}^d$ определим меру $\mu_A(U) = \sum_{j \in U} a_j$.

Теорема 3.1.2. *Предположим, что натуральное число* $d \neq 2$ *и*

$$0 < a := \mu_A(\mathbb{Z}^d) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j < \infty.$$

Тогда для любого $\varepsilon \geq 1/2$ *существует разбиение* $\mathbb{Z}^d$ *на непересекающиеся множества* U_1, U_2, U_3 *и* U_4 *такие, что*

1) U_1 и U_4 *отделены слоем толщины* 2ε;

2) U_1 и $U_3 \cup U_4$, *а также* U_4 *и* $U_1 \cup U_2$ *отделены слоями толщины* ε;

3) $\mu_A(U_i) \leq M_d a_{\max}^{1/d} a^{1-1/d} \varepsilon$ *для* $i = 2, 3$, *где* $a_{\max} := \max_{j \in \mathbb{Z}^d} a_j$, $M_d > 0$ *зависит только от* d;

4) $|\mu_A(U_1 \cup U_2) - \mu_A(U_3 \cup U_4)| \leq \frac{1}{2} M_d a_{\max}^{1/d} a^{1-1/d}$.

Теорема 3.1.4. *Пусть* $U \subset \mathbb{Z}^d$ $(d \geq 1)$ *— конечное множество, для которого* $|U| > 1$. *Пусть* $A = \{a_j,\ j \in \mathbb{Z}^d\}$ *— такой массив действительных чисел, что* $0 < a_{\min} \leq a_j \leq a_{\max}$ *для некоторых* $a_{\min}$, $a_{\max}$ *и всех* $j \in U$. *Тогда множество* U *можно разрезать гиперплоскостью, перпендикулярной одной из осей координат, на два подмножества* U_1 *и* U_2 *так, чтобы*

$$0 < t \leq \frac{\mu_A(U_1)}{\mu_A(U_2)} \leq 1, \qquad t := \frac{1 - v}{v + (2d - 1)}, \quad v := \frac{a_{\max}}{a_{\max} + a_{\min}}.$$

Во втором параграфе эти вспомогательные результаты применяются для доказательства теоремы 3.2.1, которая обобщает неравенство, установленное Булинским и Шашкиным[14], на случай, когда суммирование слабо зависимых случайных величин ведется по произвольным конечным множествам, а не только по "целочисленным параллелепипедам".

Теорема 3.2.1. *Пусть для действительного случайного поля* $X = \{X_j,\ j \in \mathbb{Z}^d\}$ *выполнены условия* 2° *и* 3°. *Тогда для произвольного конечного множества* $U \subset \mathbb{Z}^d$, *некоторых* $\delta > 0$ *и* $C > 1$, *зависящих только от* d, s, D_s, λ *и* c_0, *справедливо неравенство*

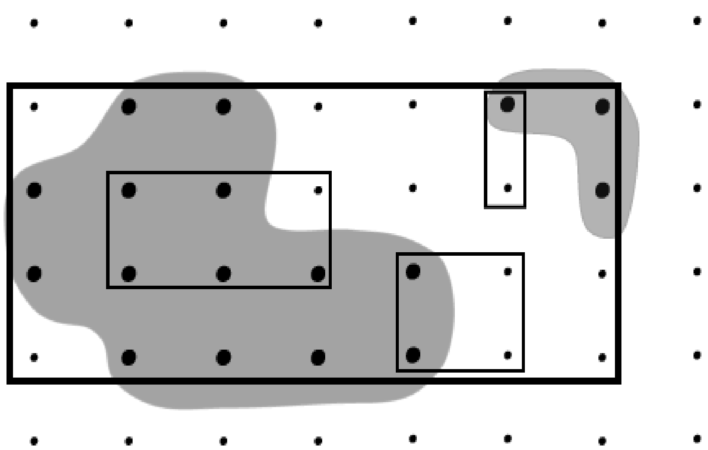
$$\mathsf{E}\,|S(U)|^{2+\delta} \le C|U|^{1+\delta/2}.$$

В параграфе 3.3 теорема Морица[22] и результат параграфа 3.2 используются для доказательства нового максимального неравенства.

Целочисленным блоком (или параллелепипедом) будем называть множество $W = (a,b] \cap \mathbb{Z}^d$, где $(a,b] := (a_1,b_1] \times \cdots \times (a_d,b_d]$, a_i, $b_i \in \mathbb{Z}$, $a_i < b_i$, $i = 1,\ldots,d$. Пусть $\mathcal{U}$ — совокупность всех таких целочисленных блоков. Для произвольного конечного множества $U \subset \mathbb{Z}^d$ определим множество $V_U \in \mathcal{U}$ как минимальный блок, содержащий множество U. Пусть

$$M(U) := \max_{W \subseteq V_U} |S(W \cap U)|,$$

здесь максимум берется по блокам W, лежащим в V_U.



[22]F. Móricz, A general moment inequality for the maximum of the rectangular partial sums of multiple series, Acta Math. Hung., 1983, V. 41, №3–4, P. 337–346.

Теорема 3.3.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2.1. *Тогда для произвольного конечного множества* $U \subset \mathbb{Z}^d$, *некоторых* $\delta > 0$ *и* $C > 1$, *зависящих только от* d, s, D_s, λ *и* c_0, *справедливо неравенство*

$$\mathsf{E}\, M(U)^{2+\delta} \leq A\, C|U|^{1+\delta/2},$$

где A *— множитель, зависящий от* d *и* δ.

Автор благодарна своему научному руководителю профессору А. В. Булинскому за постановку задач, постоянное внимание к работе и ценные советы, а также доценту А. П. Шашкину за полезные замечания.

Работы автора по теме диссертации

[1] Н. Ю. Крыжановская, Моментное неравенство для сумм мультииндексированных зависимых случайных величин, Матем. заметки, 2008, Т. 83, № 6, С. 843-856.

[2] Н. Ю. Крыжановская, Ядерные оценки долгосрочной матрицы ковариаций случайного поля, Успехи матем. наук, 2009, Т. 64, № 1, С. 153-154.

[3] Н. Ю. Крыжановская, Моментное и максимальное неравенства для сумм мультииндексированных случайных величин, Колмогоровские чтения VI, Ярославль, 2008, С. 107-114.

[4] Н. Ю. Крыжановская, Статистический вариант ЦПТ для векторных слабо зависимых полей, Конференция молодых ученых. Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ, Часть I, Изд-во ЦПИ мехмата МГУ, М., 2006, С. 102-106.

[5] A. Bulinski, N. Kryzhanovskaya, Convergence rate in CLT for vector-valued random fields with self-normalization, Probab. Math. Statist., 2006, V. 26, № 2, P. 261-281.

В этой работе А. В. Булинскому принадлежат постановка задачи и подход к получению моментного неравенства. Все остальные результаты получены Н. Ю. Крыжановской самостоятельно.