МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 512.817

Шварцман Осип Владимирович

ТЕОРЕМЫ ТИПА ШЕВАЛЛЕ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ ГРУПП КОМПЛЕКСНЫХ ОТРАЖЕНИЙ

01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

доктора физико-математических наук

Москва 2009

Работа выполена на кафедре геометрии и топологии факультета математики Государственного университета - Высшая школа экономики

Официальные оппоненты:	член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук Веснин Андрей Юрьевич доктор физико-математических наук, профессор Винберг Эрнест Борисович доктор физико-математических наук, профессор Попов Владимир Леонидович
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 16 октября 2009 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 16 сентября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа относится к тому направлению математики, которое можно назвать трансцендентной теорией инвариантов (ТТИ) или теорией инвариантов дискретных групп преобразований.

В алгебраической теории инвариантов типичной является ситуация, когда алгебраическая группа G действует на аффинном алгебраическом многообразии V над полем K, и ставится задача описания алгебры $K[V]^G$ регулярных функций на многообразии V, инвариантных относительно действия группы G.

В трансцендентной теории инвариантов мы имеем дело с дискретными группами преобразований. Здесь типична ситуация, когда имеется дискретная группа Γ автоморфизмов эрмитова симметрического пространства X некомпактного типа, и действие Γ на X таково, что факторпространство X/Γ имеет конечный объем. Такие дискретные группы называются *решетками.* Группы с компактным факторпространством называются *кокомпактными* (равномерными) решетками или *кристаллографическими* группами.

Следующий важный вопрос: что служит аналогом алгебры регулярных функций $K[V]$? Запас голоморфных функций на эрмитовом симметрическом пространстве X велик, но Γ-инвариантными среди них оказываются только константы. Для кристаллографических групп причина этого проста: на компактном аналитическом пространстве X/Γ не существует голоморфных функций, отличных от констант. Выход из положения подсказывает классическая теория автоморфных форм: нужно линеаризовать действие группы Γ, то есть продолжить это действие (согласованным образом) с X на линейное голоморфное расслоение L над X или, другими словами, рассмотреть Γ-расслоение L над X. И тогда главным для ТТИ объектом оказывается градуированная алгебра $\mathcal{L} = \mathcal{L}(L) = \oplus\ H^\circ(L^{\otimes n}, X)$ голоморфных сечений тензорных степеней расслоения L. Группа Γ естественно действует автоморфизмами алгебры $\mathcal{L}$, и ставится задача описания структуры алгебры инвариантов $A = \mathcal{L}^{\Gamma}$.

Алгебра инвариантов A была известна ещё в 19 веке под именем алгебры $\Gamma - a$-автоморфных форм. Функция двух переменных $a(\gamma, z)$, $\gamma \in \Gamma$, $x \in X$, называется коциклом (фактором автоморфности) группы Γ, если при фиксированном γ функция $a(\gamma, x)$ голоморфна по x и нигде не обращается в нуль. Кроме этого, она удовлетворяет условию $a(\gamma_1\gamma_2, x) = a(\gamma_1, \gamma_2 x)a(\gamma_2, x)$ для любых γ_1 и γ_2 из группы Γ и $x \in X$. В качестве примера рассмотрим определитель Якоби (якобиан) $j(\gamma, x)$ преобразования $\gamma \in \Gamma$ в точке $x \in X$.

Голоморфная в X функция $f(x)$ называется $\Gamma - a$-*автоморфной формой* целого *веса* l, если $f(\gamma x) = a^l(\gamma, x) \cdot f(x)$.

Через A_l обозначим комплексное линейное пространство автоморфных форм веса l, и пусть $A = A(\Gamma, a) = \bigoplus\limits_{l \geq 0} A_l$ – градуированная алгебра автоморфных форм, отвечающая коциклу a группы Γ. Алгебра $A(\Gamma, j^{-1})$ называется алгеброй классических автоморфных форм. Опишем на языке автоморфных форм наиболее важные результаты ТТИ, которые имеют прямое отношение к теме данной работы.

Математики 19 и начала 20 века (например, школа Ф. Клейна) занимались, в частности, следующей задачей: пусть в единичном комплексном диске $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ действует дискретная группа его автоморфизмов Γ. Предположим, что факторпространство B/Γ компактно или имеет конечный объем. Что можно сказать в этом случае о структуре алгебры A классических автоморфных форм? Насколько автору известно, никаких общих теорем этот период развития ТТИ после себя не оставил. Но осталось множество ценных примеров. Так, было показано, что для модулярной группы $PSL(2, \mathbb{Z})$ алгебра A свободно порождается формой веса 2 и формой веса 3 [1], а для тре-

[1]Серр Ж-П. Курс арифметики. – М.: Мир, 1972.

угольной группы $T(2,3,7)$ алгебра классических автоморфных форм есть гиперповерхность $\mathbb{C}[X,Y,Z]/(X^2+Y^3+Z^7)$ [2].

После долгого перерыва интерес к этой тематике возродился в 80 - е годы прошлого века в связи с теорией В.И. Арнольда квазиоднородных двумерных особенностей. В своей пионерской работе[3] И.В. Долгачев показал, что такие особенности допускают униформизацию автоморфными формами для подходящих фуксовых групп Г. Главным итогом последовавшего периода развития этого направления ТТИ явилась классификация таких решеток Г в диске B, для которых алгебра $\Gamma - j^{-1}$-автоморфных форм имеет не больше трех образующих[2,3,4].

Вопрос о том, для каких групп Г и коциклов a алгебра $\Gamma - a$-автоморфных форм свободна (т.е. является алгеброй многочленов), в этих работах не рассматривался. Причина понятна: свобода алгебры A означает отсутствие особенности. С другой стороны, вопрос о свободных алгебрах автоморфных форм является первоочередным с точки зрения теории инвариантов. Он интересен еще и потому, что свободные алгебры классических автоморфных форм встречались не только в размерности 1. Гундлах рассматривал кольцо целых O вещественного квадратичного расширения $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$ и группу $\Gamma = PSL(2,\mathcal{O})$, которая дискретно действует на произведении $X = B \times B$ двух одномерных комплексных дисков. Расширив группу Г с помощью автоморфизма X, меняющего местами диски, Гундлах доказал[5], что алгебра классических автоморфных форм для расши-

[2] Wagreich P. Algebras of automorphic forms with few generators // Trans. Amer. Math. Soc. – 1980. – V. 262. – P. 367-389.

[3] Долгачев И.В. Автоморфные группы и квазиоднородные особенности // Функц.анализ и его прил. – 1975. – Т. 9, N 2. – С. 67-68.

[4] Milnor J. On the 3-dimensional Brieskorn manifolds $M(p,q,r)$ // Ann. Math. Studies. – 1975. – V. 84. – P. 175-225

[5] Gundlach K.B. Die Bestimmung der Funktionen zur Hilbertschen Modulgruppe des Zahl korpers $Q(\sqrt{5})$ // Math. Ann. – 1963. – V. 152. – P. 226-256.

ренной группы является свободной алгеброй с тремя образующими. Вслед за Гундлахом, в рамках программы Хирцебруха по исследованию модулярных поверхностей Гильберта, была изучена структура алгебры A для расширенных модулярных групп Гильберта $\widehat{\Gamma}$ над кольцами целых O_K вещественных квадратичных расширений $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$ $(D \leq 13)$ [6]. Хольцапфель рассмотрел группу $PSU(2,1,\mathbb{Z}[\omega])$, $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, дискретно действующую в комплексном шаре $B^2 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1\}$. Обозначим через Γ её конгруэнц-подгруппу по модулю $\sqrt{-3}$. Тогда алгебра A классических Γ-автоморфных форм есть свободная алгебра с тремя образующими[7].

В размерности 3 важное достижение принадлежит Игузе[8]. В качестве X он рассматривал эрмитово симметрическое пространство, которое состоит из комплексных симметрических 2×2 матриц S, удовлетворяющих условию $\operatorname{Im} S > 0$. На этом пространстве действует модулярная группа Зигеля $\Gamma = PSp_4(\mathbb{Z})$, причем факторпространство X/Γ имеет конечный объем, но некомпактно. Игуза доказал, что алгебра A классических Γ-автоморфных форм является свободной алгеброй с четырьмя образующими, веса которых равны 4, 6, 10 и 12. Опираясь на теорему Игузы, удалось полностью описать структуру алгебры классических автоморфных форм для некоторых конгруэнц-подгрупп небольшого индекса в модулярной группе Зигеля Γ [9]. Заметим, что все перечисленные результаты о свободе касаются исключительно арифметических неравномерных решеток. Если размерность X больше трех, то о структуре алгебр автоморфных форм, по-видимому, известно крайне мало. На сегодняшний день даже вычи-

[6] van der Geer G. Hilbert modular surfaces. – Berlin: Springer, 1988.

[7] Holzapfel R-P. Geometry and arithmetic around Euler partial Differential Equations. – Dortrecht: D.Reidel, 1986.

[8] Igusa J-I. On Siegel modular forms of genus two // Amer.J.Math. – 1964. – V. 86. – P. 219-246.

[9] Runge B. On Siegel modular forms of genus two // J.reine und angew. Math. – 1993. – V. 436. – P. 57-85.

сление размерности i-той градуированной компоненты такой алгебры вызывает большие трудности.

Задача об описании свободных алгебр автоморфных форм была поставлена автором в конце 80-х годов прошлого века. Кроме уже упомянутых результатов ТТИ, здесь сказалось и влияние московской школы Э.Б. Винберга, добившейся больших успехов в классификации линейных действий полупростых алгебраических групп со свободной алгеброй инвариантов[10,11].

Рассмотрим дискретную кокомпактную группу Γ, действующую на эрмитовом симметрическом пространстве X размерности l. Назовем группу Γ хорошей, если существует такой коцикл $a(\gamma, x)$, что алгебра $\Gamma - a$-автоморфных форм A является алгеброй многочленов от $(l+1)$-ой переменной. Соответствующий коцикл a называется *свободным коциклом*. **Задача состоит в том, чтобы найти все хорошие группы и их свободные коциклы.**

В качестве X в работе рассматриваются эрмитово комплексное аффинное пространство $\mathbb{C}^l$ и единичный диск $B = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1\}$. Из чисто топологического утверждения (теорема 1.2 главы I) и стандартных фактов алгебраической геометрии[3,12,13] следует, что хорошая группа, действующая на любом из этих пространств, порождается отражениями.

Элемент $\gamma \in \mathrm{Aut}X$ называется *отражением* (иногда говорят о комплексном отражении), если

а) множество $\mathrm{Fix}\gamma$ его неподвижных точек непусто;

---

[10]Винберг Э.Б. Эффективная теория инвариантов // Алгебра. Сборник работ, посвященный 90-летию со дня рождения О.Ю.Шмидта. – М.: МГУ, 1982. – С. 27-34.

[11]Винберг Э.Б., Попов В.Л. Теория инвариантов // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – М.: ВИНИТИ, 1989. – Т. 55. – С. 139-309.

[12]Baily W. L. On embedding of V-manifolds in projective space // Amer. J. Math. – 1957. – V. 79. – P. 403-430.

[13]Baily W. Introductory lectures on automorphic forms. – Ivanami Shoten and Prinston Univ. Press, 1973. – ch. 5.

б) *комплексная коразмерность* множества Fixγ равна единице.

Дискретная группа Γ автоморфизмов X называется *группой отражений*, если группа Γ порождается отражениями.

Классическую теорему Шевалле[14] можно понимать как утверждение о том, что конечная проективная группа отражений является хорошей (см. п.2.1 во введении). По этой причине теоремы о том, что какая-то группа отражений является хорошей, названы в работе теоремами типа Шевалле (теоремами Шевалле) для различных классов групп отражений. Важная роль групп отражений в современной математике подчеркнута в двух фундаментальных обзорах[15,16].

Итак, хорошие группы следует искать среди дискретных кокомпактных групп, действующих на пространстве X и порожденных отражениями. Опишем детальнее рассматриваемые в работе классы дискретных групп отражений.

Пусть X – это эрмитово аффинное комплексное пространство $\mathbb{C}^l$, Γ – кристаллографическая группа отражений в $\mathbb{C}^l$ и $d\Gamma$ – линейная группа, состоящая из дифференциалов $d\gamma$ всех преобразований γ из группы Γ (группа линейных частей). Если Γ есть группа отражений, то группа $d\Gamma$ является линейной группой отражений. По теореме Бибербаха[17] группа $d\Gamma$ конечна для любой кристаллографической группы движений эрмитова пространства $\mathbb{C}^l$. Таким образом, $d\Gamma$ – конечная линейная группа отражений. Все такие группы были перечислены Шепардом и Тоддом[18]. Среди них выделяются веще-

[14] Chevalley C. Invariants of finite groups generated by reflections // Amer.J. Math. – 1955. – V. 77. – P. 778-782.

[15] Dolgachev I.V. Reflection groups in algebraic geometry // Bull.AMS. – 2008. – V. 45, N 1. – P. 1-60.

[16] Givental A.V. Reflection groups in singularity theory // Amer. Math. Soc. Translations. – 1992. – V. 153. – P. 39-71.

[17] Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д. Поверхности и разрывные группы. – М.: Наука, 1988.

[18] Shephard G. C., Todd J. A. Finite unitary reflection groups // Canad. J. Math. – 1954. – V. 6. – P. 274-304.

ственные группы отражений, т.е. такие конечные линейные группы, порожденные отражениями, которые в некотором базисе комплексного линейного пространства записываются вещественными матрицами. Классификация вещественных групп отражений принадлежит Кокстеру[19], и такие группы носят его имя. Конечные линейные группы отражений, не входящие в список Кокстера, называются группами Шепарда-Тодда. Если группа $d\Gamma$ есть группа Кокстера, то группа отражений Γ называется *комплексной кристаллографической группой Кокстера* (сокращенно *cccr-группой*). Если же группа линейных частей $d\Gamma$ есть группа Шепарда-Тодда, то группа отражений Γ называется *комплексной кристаллографической группой Шепарда-Тодда.* В диссертации исследуются *комплексные кристаллографические группы Кокстера.*

Пусть в качестве X рассматривается комплексный одномерный диск B. В этом случае кокомпактная дискретная группа отражений Γ, действующая в диске B, является *фуксовой группой рода нуль*[17].

Цель работы: доказать теорему типа Шевалле для *cccr*-групп в $\mathbb{C}^l$, решить задачу о свободных алгебрах автоморфных форм в диске B, получить аналог классической теоремы Шевалле для бесконечных линейных групп отражений в $\mathbb{C}^2$.

Методы исследования. В работе используются классические методы коммутативной алгебры, теории групп отражений, комплексного анализа и геометрии Лобачевского.

Научная новизна. Результаты диссертации, выносимые на защиту, являются новыми и состоят в следующем:

1) доказана необходимость появления групп отражений в задаче о свободных алгебрах автоморфных форм;

2) дана классификация комплексных кристаллографических групп

[19] Coxeter H.M.S. Discrete groups generated by reflections // Ann.of Math. – 1934. – V. 35. – P. 588-621.

Кокстера в терминах оснащенных конечных систем корней;

3) проведена классификация комплексных кристаллографических групп Кокстера с помощью аффинных систем корней;

4) вычислена группа четных коциклов комплексных кристаллографических групп Кокстера;

5) для всех неприводимых комплексных кристаллографических групп Кокстера (за исключением групп типа D_l) доказана теорема Шевалле;

6) найдены все свободные коциклы для фуксовых групп рода нуль;

7) доказана теорема Шевалле для бесконечных линейных групп отражений в $\mathbb{C}^2$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Некоторые её результаты уже нашли применение в теории особенностей[16], теории алгебр Кричевера-Новикова[20,21] и конформной $2D$-теории поля[22].

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на заседаниях следующих семинаров на Механико-математическом факультете МГУ: семинар "Группы Ли и теория инвариантов" под руководством профессора Э. Б. Винберга и профессора А. Л. Онищика (март 1998 года, февраль 2004 года, апрель 2008 года), семинар "Комплексный анализ" под руководством профессора В. К. Белошапки, профессора А. Г. Сергеева, члена-корреспондента РАН, профессора Е. М. Чирки (март 2008 года). Кроме того, результаты диссертации докладывались в Математическом институте имени В. А. Стеклова РАН на семинаре отдела алгебры под руководством члена-корреспон-

[20] Шейнман О.К. Эллиптические аффинные алгебры Ли // Функц.анализ и его прил. – 1990. – Т. 24. – С. 51-61.

[21] Шейнман О.К. Алгебры Кричевера - Новикова и ССС-группы // Успехи мат.наук. – 1995. – Т. 50. – С. 253-254.

[22] Dubrovin B., Zhang Y. Extended affine Weyl groups and Frobenius manifolds // Compositio Math. – 1998. – V. 111, N 2. – P. 167-219.

дента РАН, профессора А. Н. Паршина (апрель 2008 года) и в ПОМИ РАН на семинаре лаборатории алгебры и теории чисел (апрель 2009 года), а также на семинаре профессора Г. Хардера (Институт Макса Планка, Бонн, июнь 1998 года), семинаре профессора Х. Хеллинга (Университет Билефельд, июль 1998 и 2004 года) и на международных конференциях "Reflection groups and applications" (Триест, январь 1998 года), "Transformation Groups" (Москва, декабрь 2007 года). В марте 2003 года автор выступал с докладом "О теореме Шевалле для гиперболических групп отражений в $\mathbb{C}^2$" на заседании Московского математического общества.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 12 работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1-12].

Личный вклад. Диссертационная работа является итогом многолетних исследований, объединенных общей задачей, постановка которой принадлежит автору. Все результаты главы I, главы IV, главы V и их доказательства получены автором самостоятельно.

В главе II автору принадлежит классификация комплексных кристаллографических групп Кокстера в терминах оснащенных конечных систем корней (теоремы 1.3, 1.4 и их доказательства). Теоремы 3.1, 3.2 и их доказательства принадлежат автору и И. Н. Бернштейну.

В главе III автором получено описание группы четных коциклов для *cccr*-групп (теорема 2.4 §2 и её доказательство). Доказательство теоремы Шевалле для *cccr*-групп (теорема 3.1 главы III) принадлежит автору и И. Н. Бернштейну.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и пяти глав (имеются два приложения к главе III и одно приложение к главе V). Список литературы включает 81 наименование. Объем диссертации – 128 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается общая характеристика работы и её краткое содержание по главам.

В **главе I** содержится топологический результат, с помощью которого доказывается, что хорошие группы являются группами отражений.

Пусть X – неприводимое комплексное аналитическое пространство[13], относительно которого предполагается, что комплексная коразмерность множества его особых точек $\mathrm{Sing}X$ больше единицы.

Определение. Группа $\pi_1^e(X) = \pi_1(X - \mathrm{Sing}X)$ называется *существенной фундаментальной группой* пространства X.

Пусть Γ – дискретная группа автоморфизмов пространства X и $Y = X/\Gamma$ – неприводимое аналитическое пространство. Тогда определен гомоморфизм $\pi_1^e(X) \to \pi_1^e(Y)$ (лемма 1.1).

Теорема 1.2. Гомоморфизм $\pi_1^e(X) \to \pi_1^e(Y)$ тогда и только тогда является эпиморфизмом, когда группа Γ порождается отражениями.

Доказательство теоремы 1.2 опирается на ключевую лемму 1.3, которая является обобщением теоремы Армстронга[23].

Лемма 1.3. Пусть V – линейно связное топологическое многообразие, Γ – дискретная группа гомеоморфизмов V, и Γ_f – (нормальная) подгруппа в Γ, порожденная элементами, имеющими неподвижные точки при действии на V. Естественный гомоморфизм $\pi_1(V) \to \pi_1(V/\Gamma)$ тогда и только тогда является эпиморфизмом, когда $\Gamma = \Gamma_f$.

Пространство X называется сильно односвязным, если $\pi_1^e(X) = 1$. В **§2** доказано, что взвешенное проективное пространство сильно односвязно.

---

[23] Armstrong M. A. On the fundamental group of an orbit space // Proc. Camb. Philos. Soc. – 1968. – V. 64. – P. 299-301.

Глава II диссертации посвящена классификации комплексных кристаллографических групп Кокстера ($cccr$-групп) с точностью до аффинных преобразований.

Пусть V – конечномерное аффинное комплексное пространство, L – присоединенное к V линейное пространство, Γ – дискретная группа аффинных преобразований V. Аффинное преобразование r является отражением, если множество его неподвижных точек есть гиперплоскость. Эта гиперплоскость называется *зеркалом* отражения. Дискретная подгруппа Γ группы аффинных преобразований V называется *cc-группой*, если $T = \Gamma \cap L$ есть решетка полного ранга в L (т.е. фактор-пространство V/T компактно). Точка $x \in V$ называется *специальной* для cc-группы Γ, если $\Gamma = \Gamma_x \cdot T$ (здесь Γ_x - стабилизатор точки x). Cc-группа Γ называется *расщепимой*, если у неё есть специальная точка.

Определение. Комплексной кристаллографической группой Кокстера ($cccr$-группой) называется cc-группа, порожденная отражениями, у которой группа линейных частей есть группа Кокстера.

Для обозначения $cccr$-групп используется буква W. Через $\Pi(W)$ обозначается множество зеркал всех отражений из группы W.

Лемма 1.1. Любая $cccr$-группа W расщепима.

Комплексная кристаллографическая группа называется *неприводимой*, если она не изоморфна нетривиальному прямому произведению cc-групп. Каждая $cccr$-группа есть прямое произведение неприводимых $cccr$-групп (предложение 1.2). Поэтому, ввиду леммы 1.1, достаточно классифицировать только отмеченные (специальной точкой) неприводимые $cccr$-группы. Классификация начинается в **п.1.3** с конструкции отмеченной неприводимой $cccr$-группы с помощью оснащенной конечной системы корней.

Пусть R – неприводимая приведенная система корней в двойственном пространстве $L^\vee$ [24]. Пусть W_0 – группа Вейля системы кор-

[24] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. – М.: Мир, 1975.

ней R и $<,>$ – W_0-инвариантная невырожденная эрмитова форма на пространстве L, с помощью которой мы отождествим пространства L и $L^\vee$. Все корни из R делятся на длинные ($|\alpha| = l_l$) и короткие ($|\alpha| = l_s$) (возможно, что $l_l = l_s$). Положим $p = p(R) = \left(\dfrac{l_l}{l_s}\right)^2$. Тогда $p = 1, 2, 3$ [24]. Каждому корню $\alpha \in R$ поставим в соответствие полную решетку $\mathfrak{a}_\alpha \in \mathbb{C}$ и потребуем, чтобы при этом выполнялись следующие условия:

а) если $|\alpha| = |\beta|$, то $\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a}_\beta$;

б) если $|\alpha| < |\beta|$, то $\mathfrak{a}_\beta$ подрешетка в $\mathfrak{a}_\alpha$ индекса $[\mathfrak{a}_\alpha : \mathfrak{a}_\beta] \le p$ (то есть, либо $\mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a}_\beta$, либо $[\mathfrak{a}_\alpha : \mathfrak{a}_\beta] = p$, поскольку $p = 1$ или p – простое число).

Множество пар $\{(\alpha, \mathfrak{a}_\alpha), \alpha \in R\}$ назовем *оснащенной системой корней* и обозначим через $\mathfrak{a}$.

Рассмотрим аффинное пространство V с отмеченной точкой $x_0 = 0$, ассоциированное с линейным пространством L, и пусть $\Pi(\mathfrak{a})$ – система гиперплоскостей в V вида $\pi(\alpha, \tau) = \{z \in V | \alpha(z) = \tau\}$, $\alpha \in R$, $\tau \in \mathfrak{a}_\alpha$.

Теорема 1.3. Пусть $W = W(\mathfrak{a})$ – группа аффинных преобразований V, порожденная отражениями $r(\alpha, \tau)$ в гиперплоскостях системы $\Pi(\mathfrak{a})$. Тогда

1) W – неприводимая *cccr*-группа, и x_0 – её специальная точка;

2) $\Pi(W) = \Pi(\mathfrak{a})$;

3) любая неприводимая отмеченная *cccr*-группа изоморфна группе вида $W(\mathfrak{a})$.

Теорема 1.3 показывает, что для классификации отмеченных *cccr*-групп достаточно описать изоморфизмы *cccr*-групп вида $W(\mathfrak{a})$. Это делается в **п.1.4**. Две оснащенные системы корней $\mathfrak{a} = \{(\alpha, \mathfrak{a}_\alpha), \alpha \in R\}$ и $\mathfrak{a}' = \{(\beta, \mathfrak{a}_\beta), \beta \in R'\}$ назовем подобными, если существует такой изоморфизм систем корней ψ: $R \to R'$ и такое $\lambda \in \mathbb{C}^*$, что $\lambda \mathfrak{a}_\alpha = \mathfrak{a}'_{\psi(\alpha)}$ для любого $\alpha \in R$. Линейное преобразование $\varphi = \lambda \circ \psi$: $L \to L$ определяет изоморфизм отмеченных *cccr*-групп $W(\mathfrak{a}) \to W(\mathfrak{a}')$.

Для любой оснащенной системы корней $\mathfrak{a}$ можно рассмотреть *двойственную оснащенную систему корней* $\mathfrak{a}^{inv} = \{(\alpha^{inv}, \mathfrak{a}_\alpha^{inv}), \alpha \in R\}$, которая строится по следующему правилу:
если α – длинный корень, то $\alpha^{inv} = \alpha$ и $\mathfrak{a}_\alpha^{inv} = \mathfrak{a}_\alpha$; если α – короткий корень, то $\alpha^{inv} = p\alpha$ и $\mathfrak{a}_\alpha^{inv} = p\mathfrak{a}_\alpha$, где $p = p(\mathfrak{a}) = [\mathfrak{a}_s : \mathfrak{a}_l]$.

Теорема 1.4. Любой изоморфизм φ: $W(\mathfrak{a}) \to W(\mathfrak{a}')$ отмеченных *cccr*-групп определяется подобием либо оснащенных систем $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}'$, либо оснащенных систем $\mathfrak{a}^{inv}$ и $\mathfrak{a}'$. Подобие $\varphi = (\psi, \lambda)$ определено с точностью до замены φ на $-\varphi = (-\psi, -\lambda)$.

Доказательство теоремы 1.3 содержится в **п.1.5**, а теорема 1.4 доказана в **п.1.6**. Отметим, что классификация комплексных кристаллографических групп Шепарда-Тодда принадлежит В. Л. Попову[25].

В **§2** и **§3** содержится классификация *cccr*-групп в терминах аффинных систем корней. В дальнейшем S обозначает неприводимую вполне приведенную нормированную аффинную систему корней в вещественном аффинном пространстве $V_{\mathbb{R}}$. Через W_S обозначим группу Вейля аффинной системы корней S [26] (**п.2.1, 2.2**). Пусть R – неприводимая приведенная система корней и $p = 1$ или $p(R)$. В **п.2.3** по паре (R, p) строится аффинная система корней $S = S(R, p)$. Для любого корня $\alpha \in R$ определим целое число p_α, полагая

$$p_\alpha = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha \text{ – короткий корень,} \\ p, & \text{если } \alpha \text{ – длинный корень.} \end{cases}$$

Пусть $S(R, p)$ – множество линейных функций вида $\{\alpha + p_\alpha l \mid \alpha \in R, l \in \mathbb{Z}\}$. Тогда $S(R, p)$ есть нормированная вполне приведенная неприводимая аффинная система корней и $dS = R$.

Обратно, пусть S – неприводимая вполне приведенная нормиро-

[25]Popov V. L. Discrete complex reflection groups // Communications of the Mathematical Institute, Rijksuniversiteit Utrecht. – 1982. – P. 1-89.

[26]Macdonald I.G. Affine root systems and Dedekind' s η-function // Invent. Math. – 1972. – V.15. – P. 91-143.

ванная аффинная система корней, $R = dS$, а $p = p(S)$ – такое минимальное положительное число, что $S + p = S$. Тогда $p = 1$ или $p(R)$ и $S = S(R, p)$ [26].

Наряду с аффинной системой корней $S = S(R, p)$ *определим систему корней* S^{inv}, полагая $p_\alpha^{inv} = \dfrac{p}{p_\alpha}$, $\alpha^{inv} = p_\alpha^{inv}\alpha$, $R^{inv} = \{\alpha^{inv} | \alpha \in R\}$ и $S^{inv} = S(R^{inv}, p) = \{\alpha^{inv} + p_\alpha^{inv} l | \alpha^{inv} \in R^{inv}, l \in \mathbb{Z}\}$.

В **п.3.1** по аффинной системе корней S и комплексному числу τ, $\mathrm{Im}\tau > 0$, строится *cccr*-группа $W(S, \tau)$. Пусть S – аффинная система корней в вещественном аффинном пространстве $V_\mathbb{R}$. Рассмотрим S как систему (аффинных) линейных функций на комплексном аффинном пространстве $V = V_\mathbb{R} + L(V_\mathbb{R}) \otimes \mathbb{C}$. Для любых $\alpha \in S$ и $k \in \mathbb{Z}$ положим $\pi(\alpha, k) = \{z \in V \mid \tau\alpha(z) = k\}$. Множество всех гиперплоскостей $\pi(\alpha, k)$ обозначим через $\Pi(S, \tau)$. Пусть $W(S, \tau)$ – группа, порожденная отражениями в гиперплоскостях системы $\Pi(S, \tau)$.

Теорема 3.1.
а) Группа $W(S, \tau)$ есть *cccr*-группа и $\Pi(S, \tau) = \Pi(W(S, \tau))$.
б) Любая неприводимая *cccr*-группа изоморфна группе вида $W(S, \tau)$.

Теорема 3.1 показывает, что достаточно описать изоморфизмы групп $W(S, \tau)$. Пусть $p = p(S)$ $(= 1, 2$ или $3)$. В группе $GL^+(2, \mathbb{R})$ рассмотрим элемент $\gamma_p = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -p & 0 \end{pmatrix}$ и подгруппу

$$\Gamma_0(p) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}, \quad c \in p\mathbb{Z}, \quad ad - bc = 1 \right\}.$$

Группа $GL^+(2, \mathbb{R})$ действует дробно-линейными преобразованиями на верхней полуплоскости $H = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im} z > 0\}$[27].

Теорема 3.2.
а) Если $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(p)$, то оператор $\varphi_\gamma : L \to L$, $\varphi_\gamma(z) = \dfrac{z}{a + b\tau^{-1}}$ задает изоморфизм отмеченных комплексных кристаллогра-

[27] Шимура Г. Введение в арифметическую теорию автоморфных функций. – М.: Мир, 1973.

фических групп Кокстера $\varphi_\gamma : W(S,\tau) \to W(S,\gamma\tau)$.

б) Оператор $\varphi_{\gamma_p} : L \to L, \varphi_{\gamma_p}(z) = \tau z$ задает изоморфизм отмеченных комплексных кристаллографических групп Кокстера $\varphi_{\gamma_p} : W(S,\tau) \to W(S^{inv}, \gamma_p\tau)$.

в) Любой изоморфизм $\varphi : W(S_1,\tau_1) \to W(S_2,\tau_2)$ отмеченных *cccr*-групп можно представить как композицию изоморфизмов вида $W(S_1,\tau_1) \xrightarrow{\varphi'} W(S',\tau_2) \xrightarrow{\psi} W(S_2,\tau_2)$, где изоморфизм ψ индуцирован изоморфизмом аффинных систем корней $\psi : S' \to S_2$, и либо $S' = S_1$, $\tau_2 = \gamma(\tau_1)$, $\varphi' = \varphi_\gamma$ для некоторого $\gamma \in \Gamma_0(p)$, либо $S' = S_1^{inv}$, $\tau_2 = \gamma(\gamma_p(\tau_1))$, $\varphi' = \varphi_\gamma\varphi_{\gamma_p}$ для некоторого $\gamma \in \Gamma_0(p)$.

Теорема 3.1 доказана в **п.3.3**, а теорема 3.2 – в **п.3.4**. Доказательство этих теорем опирается на ранее доказанные теоремы 1.3 и 1.4. Теоремы 1.3, 1.4, 3.1 и 3.2 являются главными результатами главы II.

Пусть S – аффинная система корней. Для любого корня $\alpha \in S$ через π_α обозначим гиперплоскость $\{x \in V_\mathbb{R} \mid \alpha(x) = 0\}$. Связные компоненты множества $V_\mathbb{R} \setminus \bigcup\limits_{\alpha\in S} \pi_\alpha$ называются *камерами*. Все камеры конгруэнтны, и любая из них есть открытый симплекс[28]. Фиксируем камеру $\mathcal{C}$. Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_l$ – вершины замкнутого симплекса $\overline{\mathcal{C}}$. Через $B(S)$ обозначим множество таких корней α в S, которые

а) положительны на камере $\mathcal{C}$ (то есть $\alpha(\mathcal{C}) > 0$);

б) $\pi_\alpha \cap \overline{\mathcal{C}}$ есть гипергрань симплекса $\overline{\mathcal{C}}$.

Множество $B(S)$ состоит из элементов $\alpha_0, \ldots, \alpha_l$, которые занумерованы так, что $\alpha_i(x_j) = 0$ при $i \neq j$. Множество $B(S)$ назовем *базисом аффинной системы корней* S, а сами *корни* $\alpha_0, \ldots, \alpha_l$ – *простыми корнями*. Пусть r_i – отражение в зеркале $\pi(\alpha_i)$. Отражения r_i называются *простыми отражениями*[28].

В **§4** вводится группа весов Λ для аффинной системы корней S. На группе весов рассматривается целочисленный линейный функционал $\kappa(\lambda)$. Каждый вес λ однозначно представим квадратичной функцией

[28]Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. – М.: Мир, 1972. – Гл. 4-6.

вида $U_\lambda = -\kappa(\lambda)\|x - x_\lambda\|^2$ с центром $x_\lambda \in V_{\mathbb{R}}$ (здесь $\| \quad \|^2$ – каноническая метрика, которая вводится в **п.2.5**). Через λ_i, $i = 0, \ldots, l$, обозначим вес, который однозначно определяется условиями $U_{\lambda_i} - r_j U_{\lambda_i} = \delta_{ij}\alpha_j$, $j = 0, \ldots, l$. Веса $\lambda_0, \ldots, \lambda_l$ называются *фундаментальными* весами. Они образуют базис группы весов. Обозначим через Λ^+ порожденную ими полугруппу, и пусть $\Lambda_k = \{\lambda \in \Lambda \mid \kappa(\lambda) = k\}$ и $\Lambda_k^+ = \Lambda^+ \cap \Lambda_k$. Припишем каждой аффинной системе корней S набор показателей $n(S) = (n_0, \ldots, n_l)$, где $n_i = \kappa(\lambda_i)$, $i = 0, \ldots, l$. С помощью теоремы 3.2 об изоморфизме проверяется, что для *cccr*-группы $W = W(S, \tau)$ корректно определен набор её показателей $n(S)$ (**п.4.1**) . Поэтому можно говорить о показателях *cccr*-группы W.

В **Главе III** найдена группа классов четных коциклов комплексной кристаллографической группы Кокстера W (**§2**) и доказана теорема Шевалле для всех неприводимых *cccr*-групп $W(S, \tau)$, за исключением групп, построенных по аффинной системе корней D_l.

Пусть $a_w(z) = a(w, z)$ – коцикл группы W со значениями в мультипликативной группе $\mathcal{O}^*(V)$ обратимых голоморфных функций на пространстве V. $W - a$-автоморфные формы в этой главе по традиции называются тэта-функциями.

В лемме 2.2 (**п.2.3**) доказано, что $W = W(S, \tau) = W_S \cdot T_\tau$ (полупрямое произведение), где T_τ – это подгруппа, состоящая из таких параллельных переносов в группе W, которые лежат в пространстве $\tau^{-1}V_{\mathbb{R}}$. Коцикл a называется нормальным, если $a_t(z) \equiv 1$ для всех $t \in T_\tau$. Коцикл a называется *четным*, если для любого отражения $r \in W$ функция a_r равна 1 на зеркале отражения r. Пусть U – квадратичная функция на пространстве $V_{\mathbb{R}}$, представляющая вес λ. Продолжим функцию U на V и будем рассматривать её как квадратичную функцию на V. Положим $\nu = 2\pi i\tau$ и рассмотрим функцию a^λ, которая на элементе $w = t \cdot w_S$ ($t \in T_\tau$, $w_S \in W_S$) принимает значение $a_w = \exp \nu(U - w_S U)$.

Теорема 2.4.

а) Коцикл a^λ является нормальным четным коциклом для любого веса λ.

б) Группа весов Λ изоморфна группе нормальных четных коциклов.

в) Коциклы a^λ и $a^{\lambda'}$ гомологичны[29] тогда и только тогда, когда $\kappa(\lambda) = \kappa(\lambda')$.

В итоге получаем, что группа классов[29] четных коциклов $H^1_{ev}(W, \mathcal{O}^*(V))$ изоморфна $\mathbb{Z}$ (следствие 2.5).

В **§3** сформулирована теорема Шевалле для *cccr*-групп.

Теорема 3.1.

Алгебра тэта-функций A, отвечающая коциклу $a = a^{-\lambda_0}$, изоморфна свободной алгебре многочленов $\mathbb{C}[f_0, \ldots, f_l]$ от переменных $f_i \in A_{n_i}$. Набор степеней образующих $(n_0, \ldots, n_l)$ – это набор показателей группы W.

Доказательство теоремы 3.1 состоит из нескольких шагов.

В **п.4.1** алгебра тэта-функций A отождествляется с алгеброй $\mathcal{O}(\Theta)^W$ функций, голоморфных на расслоении $\Theta = V \times \mathbb{C}^*$, полиномиальных по u и инвариантных относительно действия группы W, которое задается формулой

$$w(z, u) = (wz, a_w(wz)u).$$

Наряду с классическими тэта-функциями[30] в работе рассматриваются "косые" тэта-функции веса k, удовлетворяющие условию

$$wf = \det w \cdot a_w^k \cdot f.$$

Такие функции интерпретируются как W-инвариантные голоморфные дифференциальные формы старшей степени на расслоении Θ и

[29] Касселс Дж.и Фрелих А. Алгебраическая теория чисел. – М.: Мир, 1969. – Гл. 4.

[30] Мамфорд Д. Абелевы многообразия. – М.: Мир, 1971.

называются тэта-формами веса k. Через Σ обозначим градуированное пространство тэта-форм $\Sigma = \oplus\Sigma_k$. Пусть $\lambda \in \Lambda_k$. Рассмотрим функцию $f_\lambda(z,u) = u^k \exp \nu(kU_{\lambda_0} - U_\lambda)$ и положим
$\theta_\lambda = \sum\limits_{w\in W_S} f_{w\lambda}$,
$\psi_\lambda = \sum\limits_{w\in W_S} \det w \cdot f_{w\lambda}$,
$\sigma_\lambda = \psi_\lambda\omega_0 = \psi_\lambda d\alpha_1 \dots d\alpha_l \cdot \dfrac{du}{u}$ ($\alpha_0, \dots, \alpha_l$ – простые корни аффинной системы корней S).

Лемма 4.1.

а) Ряды θ_λ и ψ_λ сходятся в Θ равномерно на компактах.

б) Функции $\{\theta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_k^+\}$ и формы $\{\sigma_\lambda \mid \lambda \in \Lambda_k^+, \lambda \in \rho + \Lambda^+\}$, где $\rho = \lambda_0 + \ldots + \lambda_l$, составляют базис пространств A_k и Σ_k соответственно.

Из леммы 4.1 следует, что

а) $\dim A_k = \{$числу решений в неотрицательных целых числах $(k_0, \dots, k_l)$ уравнения $n_0k_0 + \dots n_lk_l = k\}$.

б) A-модуль Σ является свободным модулем с образующей σ_ρ (следствие 4.2).

в) $\dim A_k = \dim \Sigma_{k+g}$, где $g = n_0 + \dots n_l$. В частности, $\dim \Sigma_g = 1$.

г) Функции $\left\{\zeta_\mu = \dfrac{\sigma_{\rho+\mu}}{\sigma_\rho}, \mu \in \Lambda_k^+\right\}$ образуют базис пространства A_k.

В **§5** изложен план доказательства теоремы Шевалле. Набор весов $\widetilde{\mu} = (\mu_0, \dots, \mu_l)$ называется допустимым, если $\kappa(\mu_i) = n_i$. Дифференциал $d\zeta_{\mu_i}$ лежит в пространстве Σ_{n_i}. Следовательно, дифференциальная форма $J(\widetilde{\mu}) = d\zeta_{\mu_0} \dots d\zeta_{\mu_l}$ принадлежит пространству Σ_g. Пространство Σ_g одномерно и порождается формой σ_ρ. Возникает числовая функция $\varphi_{\widetilde{\mu}}$ (зависящая от набора весов $\widetilde{\mu}$), равная

$$\varphi_{\widetilde{\mu}} = \frac{J(\widetilde{\mu})}{\sigma_\rho}.$$

Если будет доказано, что для какого нибудь допустимого набора $\widetilde{\mu}$ форма $J(\widetilde{\mu}) \neq 0$, то это будет означать алгебраическую независимость функций $\zeta_i = \zeta_{\mu_i}$, то есть инъективность гомоморфизма $\mathbb{C}[f_0, \dots, f_l] \to A$. Но тогда этот гомоморфизм будет изоморфизмом в силу нужной размерности пространства A_k.

Напомним, что $W = W(S, \tau)$, а потому все рассматриваемые функции ζ_i и формы $d\zeta_i$ аналитически зависят от τ. Положим $F_S(\tau) = \sum_{\widetilde{\mu}} | \varphi_{\widetilde{\mu}}(\tau) |^2$ (суммирование ведется по всем допустимым наборам весов $\widetilde{\mu} = (\mu_0, \ldots, \mu_l)$). Утверждение о существовании такого допустимого набора весов $\widetilde{\mu}$, что $J(\widetilde{\mu}) \neq 0$, равносильно утверждению о том, что $F_S(\tau) > 0$ для любого τ.

Таким образом, для доказательства теоремы 3.1 достаточно показать, что функция $F_S(\tau)$ положительна при любом τ.

Поведение функции $F_S(\tau)$ при изоморфизме $cccr$-групп изучено в **п.6.1** с помощью известной конструкции из линейной алгебры. Пусть $C_1, \ldots, C_k,\ D$ – конечномерные эрмитовы векторные пространства и $J\colon\ C_1 \times \ldots \times C_k \to D$ – полилинейное отображение. Полилинейное отображение J можно рассматривать как элемент тензорного произведения $C_1{}^\vee \otimes \ldots \otimes C_k^\vee \otimes D$. Эрмитовы структуры сомножителей задают эрмитову структуру на тензорном произведении. Поэтому можно говорить о норме $\| J \|$ полилинейного отображения J. Выбрав в каждом C_i ортонормированный базис $\{e_j^i\}$, норму полилинейного отображения J можно вычислить по формуле

$$\| J \|^2 = \sum_{(j_1, \ldots, j_k)} \| J(e_{j_1}^1, e_{j_2}^2, \ldots, e_{j_k}^k) \|_D^2,$$

где суммирование распространяется на все такие наборы векторов $(e_{j_1}^1, \ldots, e_{j_k}^k)$, что $e_{j_l}^l$ – базисный вектор в C_l. Эта конструкция применяется в случае, когда $D = \Sigma_g$, $C_i = A_{n_i}$ и $J = J(\widetilde{\mu})$. Эрмитова метрика на пространстве Σ вводится с помощью скалярного произведения Зигеля [31] (**п.4.3**). На пространстве A_k норма вычисляется по формуле $\| f \| = \dfrac{\| f\sigma_\rho \|}{\| \sigma_\rho \|}$. Положим $G_S(\tau) = \| J \|^2$.

[31]Igusa J-I. Theta-functions. – Berlin: Springer, 1972.

Теорема 6.1.

а) $G_S(\tau) = C_S|\tau|^{-2l}(\mathrm{Im}\,\tau)^{l/2}F_S(\tau)$, где константа C_S зависит только от аффинной системы корней S.

б) Если φ: $W(S_1,\tau_1) \to W(S_2,\tau_2)$ – изоморфизм $cccr$-групп, то $G_{S_1}(\tau_1) = G_{S_2}(\tau_2)$.

Пусть $S = S(R,p)$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_l$ – базис системы корней R, $p_i = p$, если α_i – длинный корень, и $p_i = 1$, если α_i – короткий корень, $r(S) = \sum\limits_{i=1}^{l} p_i$. Положим $\eta_S(\tau) = \prod\limits_{1\le i\le l} {p_i}^{1/4}\eta(p_i\tau)$, где $\eta(\tau)$ – эта-функция Дедекинда[1].

В **п.6.2** вводится функция

$$H_S(\tau) = C_S F_S(\tau)|\eta_S(\tau)|^{-2}|\tau|^{-2l}.$$

Теорема 6.1, лемма 6.2 (**п.6.2**) и теорема 3.2 главы II показывают, что $H_S(\gamma\tau) = H_S(\tau)$, если $\gamma \in \Gamma_0(p)$, и $H_S(\gamma_p\tau) = H_{S^{inv}}(\tau)$. В **§7** доказано следующее важное утверждение.

Утверждение 7.2. Пусть $\mathcal{C}$ – камера аффинной системы корней S, x – внутренняя точка камеры $\mathcal{C}$ и $q = \exp 2\pi i\tau$. Положим

$$\Delta\widetilde{\mu}(x) = (l+2)U_\rho(x) - \sum U_{\mu_i+\rho}(x).$$

Тогда $|\varphi_{\widetilde{\mu}}| = O(|\tau|^l|q|^{\Delta\widetilde{\mu}(x)})$. Кроме того, для набора $\widetilde{\mu} = (\lambda_0,\ldots,\lambda_l)$ имеем $|\varphi_{\widetilde{\mu}}| \sim C|\tau|^l|q|^{\Delta\widetilde{\mu}(x)}$, $C \neq 0$.

В **приложении 1** к главе III доказано утверждение 7.3.

Утверждение 7.3. Найдется такая точка $x \in \mathcal{C}$, что $\Delta\widetilde{\mu}(x) > \frac{r(S)}{24} - \frac{1}{r_p}$ для любого допустимого набора весов $\widetilde{\mu}$, где $r_1 = 3$, $r_2 = 4$, $r_3 = 6$.

Доказательство теоремы 7.3 для классических аффинных систем корней типа A_l, B_l, C_l, D_l требует перебора и проходит для всех систем, кроме системы D_l. Удивительно, но доказательство для исключительных систем корней перебора не требует. В таблице 1 (на странице 83 диссертационной работы) собрана вся нужная информация о классических аффинных системах корней, и доказательство утверждения 7.3 фактически сводится к тщательному анализу этих данных. На предпоследнем шаге доказательства вычислена асимптотика функции $H_S(\tau)$ на верхней полуплоскости при $\mathrm{Im}\tau \to \infty$.

Теорема 7.1. $H_S(\tau) = o(|q|^{-2/r_p})$, если $\mathrm{Im}\tau \to \infty$.

Отмеченные выше свойства функции $H_S(\tau)$ и оценка, полученная в теореме 7.1, позволяют доказать теорему 7.4 (**приложение 2** к **главе III**).

Теорема 7.4. Функция $H_S(\tau)$ нигде не обращается в нуль на верхней полуплоскости H.

Если функция $H_S(\tau)$ нигде не обращается в нуль, то и функция $F_S(\tau)$ нигде не равна нулю. Но это и есть утверждение, которое было нашей конечной целью. Для неприводимых $cccr$-групп, связанных с аффинной системой корней D_l, теорема 3.1 была позже (и из совершенно других соображений) доказана В. Кацем и Д. Петерсоном[32]. В **§8** содержится следующий результат, представляющий самостоятельный интерес.

Теорема 8.1. Аналитическое пространство V/W изоморфно взвешенному проективному пространству $\mathbb{P}(n_0 \ldots, n_l)$.

В **главе IV** рассматриваются пары (Γ, a), состоящие из кокомпактной фуксовой группы Γ и коцикла (фактора автоморфности) a. Главный результат этой главы – описание всех таких пар, для которых алгебра $\Gamma - a$- автоморфных форм является алгеброй многочленов от двух переменных.

Дискретная группа автоморфизмов единичного комплексного диска $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ называется *фуксовой группой*. Группа $\mathrm{Aut}B$ автоморфизмов диска B – это группа всех сохраняющих ориентацию движений плоскости Лобачевского[17] (модель Пуанкаре в диске). Ком-

[32]Kac V. G., Peterson D. H. Infinite dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms // Adv. Math. – 1984. – V. 53. – P. 125-264.

плексное отражение γ в группе $\mathrm{Aut}B$ – это поворот плоскости Лобачевского вокруг неподвижной точки $z(\gamma)$ (эллиптическое движение плоскости)[17] (**п.1.1**). В **п.1.2** группы отражений в диске B отождествляются с такими фуксовыми группами Γ, для которых факторпространство $B/\Gamma = P^1(\mathbb{C})$ (фуксовы группы рода нуль). Каждая такая группа Γ допускает *каноническую систему образующих* $\langle\gamma_1, \ldots, \gamma_r\rangle$ с определяющими соотношениями $\gamma_1^{n_1} = \ldots = \gamma_r^{n_r} = 1$, $\gamma_r \ldots \gamma_1 = 1$, $n_i \geq 2$, $r \geq 3$. Набор $(n_1, \ldots, n_r)$ называется *сигнатурой* группы Γ [17].

В **§3** представлены в удобной для наших целей форме известные результаты о структуре группы классов коциклов группы Γ[33,34].

Рассмотрим множество C всех векторов вида $(x_0, x_1, \ldots, x_r)$, где $x_0 \in \mathbb{Z}$, а x_i при $i > 0$ есть правильная дробь со знаменателем n_i. Складываются такие векторы покоординатно с соблюдением следующего правила: если на i-той ненулевой позиции происходит "переполнение", то из полученного результата вычитается единица, которая немедленно прибавляется к нулевой координате. Множество C с такой операцией является абелевой группой.

Лемма 3.1. Группа классов коциклов фуксовой группы Γ рода нуль с сигнатурой $(n_1, \ldots, n_r)$ изоморфна группе C. Изоморфизм осуществляется отображением, которое классу коцикла a ставит в соответствие вектор $C(a) = (\mathrm{Ch}\, a, d_1/n_1, \ldots, d_r/n_r)$, где $\mathrm{Ch}\, a$ – число Черна коцикла a [34], а $a(\gamma_i, z(\gamma_i)) = e^{2\pi\sqrt{-1}d_i/n_i}$, $i = 1, \ldots, r$.

В **§4** получен основной результат четвертой главы. Предварительно введем несколько обозначений: $\dfrac{p'}{q'}$ – будет обозначать несократимую запись дроби $\dfrac{p}{q}$, (a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b, а $[a, b]$ – их наименьшее общее кратное. Через $\overline{x}$ обозначим проекцию точки $x \in B$ на факторпространство B/Γ.

[33] Godement R. Cohomologie des groupes discontinus // Sem.Bourbaki. – 1953-1954. – Exp.90.

[34] Dolgachev I.V. Invariant stable bundles over modular curves $X(p)$ // Contemporary Math. – 1999. – V. 224. – P. 65-69.

Пусть Γ – фуксова группа рода нуль сигнатуры $(n_1, \ldots, n_r)$, $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ – её каноническая система образующих и $a(\gamma, z)$ – коцикл с кодом $C(a) = \left(\mathrm{Ch}(a); \frac{d_1}{n_1}, \ldots, \frac{d_r}{n_r}\right)$. Положим $P_i = z(\gamma_i)$.

Теорема 4.1. Для того, чтобы алгебра $A = A(\Gamma, a)$ была алгеброй многочленов от двух переменных, необходимо и достаточно, чтобы коцикл a был коциклом одного из трех перечисленных ниже взаимоисключающих типов.

0) $C(a) = (1; 0, \ldots, 0)$.

В этом случае $A = \mathbb{C}[\varphi, \psi]$, $\deg\varphi = \deg\psi = 1$, и формы φ и ψ можно выбрать так, чтобы φ имела единственный простой нуль в любой точке $\overline{x}\in P^1(\mathbb{C}) - \{\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_r\}$, а ψ – единственный простой нуль в любой точке $\overline{y}\in P^1(\mathbb{C}) - \{\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_r\}$, отличной от точки $\overline{x}$.

1) $C(a) = \left(0; 0, \ldots, \frac{d_i}{n_i}, \ldots, 0\right)$ ($d_i \neq 0$ ровно для одного индекса i) и выполняется условие $\frac{d_i}{n_i}=\frac{1}{n'_i}$ (т.е. d_i делит n_i) .

В этом случае $A = \mathbb{C}[\varphi, \psi]$, $\deg\varphi = 1$, $\deg\psi = n'_i$, форма φ имеет единственный нуль кратности d_i в точке $\overline{P}_i$, а ψ можно выбрать так, чтобы она имела единственный простой нуль в любой точке $\overline{x}\in P^1(\mathbb{C}) - \{\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_r\}$.

2) $C(a) = \left(-1; 0, \ldots, \frac{d_i}{n_i}, \ldots, \frac{d_j}{n_j}, \ldots, 0\right)$ ($d_i \neq 0$ и $d_j \neq 0$ ровно для двух индексов i и j) и выполнено условие:

$$\frac{d'_i}{n'_i} + \frac{d'_j}{n'_j}=1 + \frac{1}{n'_i n'_j}.$$

В этом случае $A = \mathbb{C}[\varphi, \psi]$, $\deg\varphi = n'_i$, $\deg\psi = n'_j$, форма φ имеет единственный нуль кратности (d_j, n_j) в точке $\overline{P}_j$, а форма ψ – единственный нуль кратности (d_i, n_i) в точке $\overline{P}_i$.

Лемма 4.3 показывает, что "дробная часть" свободного коцикла не может содержать более двух ненулевых координат. В дальнейшем доказательство опирается прежде всего на формулу для размерности (следствие 3.3) и формулу для числа нулей (лемма 3.5).

Формула для размерности. Если $\dim A_l \geq 0$, то

$$\dim A_l = 1 + l\mathrm{Ch}(a) + \sum \left[\frac{ld_i}{n_i}\right].$$

Через $O(\overline{x})$ обозначим порядок нуля формы f в точке $\overline{x} \in B/\Gamma$.

Формула для числа нулей[35,36]. Если f - ненулевая автоморфная форма веса l, то

$$\sum \frac{O(\overline{x})}{|\Gamma_{\overline{x}}|} = l\left(\mathrm{Ch}(a) + \sum_1^r \frac{d_i}{n_i}\right)$$

(суммирование в левой части формулы ведется по всем точкам факторпространства $B/\Gamma = P^1(\mathbb{C})$).

Формула для размерности есть частный случай теоремы Римана-Роха для фуксовых орбифолдов[35,37]. Её "элементарный" вывод для фуксовых групп рода нуль предложен в лемме 3.2.

Полезным для доказательства теоремы 4.1 оказалось понятие *одинокой формы* (**п.4.3**). Ненулевая автоморфная форма называется *одинокой*, если пространство форм её веса одномерно. Такие формы обладают исключительными свойствами.

Утверждение 4.5. Пусть f – одинокая автоморфная форма. Тогда порядок её нуля в точке x строго меньше порядка стабилизатора $|\Gamma_x|$.

Следствие 4.6. Одинокая форма не может обратиться в нуль в точке с тривиальным стабилизатором. Одинокая форма не может обратиться в нуль в такой точке x, где $a(\gamma, x) = 1$ для любого $\gamma \in \Gamma_x$.

Отметим, что код классического коцикла j^{-1} равен $\left(-2, \frac{n_1-1}{n_1}, \ldots, \frac{n_r-1}{n_r}\right)$ [27], а потому такой коцикл не может быть свободным.

---

[35]Futura M., Steer B. Seifert fibered homology 3-spheres and the Yang-Mills equations on Reimann surfaces with marked points // Adv. Math. – 1992. – V. 96. – P. 38-102.

[36]Кра И. Автоморфные формы и клейновы группы. – М.: Мир, 1975.

[37]Kawasaki T. The Riemann-Roch theorem for complex V-manifolds // Osaka Y. Math. – 1979. – V. 16. – P. 151-159.

В **Главе V** классификация свободных коциклов фуксовых групп рода нуль применяется для описания гиперболических групп Шевалле в $\mathbb{C}^2$. Этот результат есть естественное обобщение классической теоремы Шевалле о конечных группах отражений в $\mathbb{C}^2$ [14].

В комплексном векторном пространстве $\mathbb{C}^2$ рассмотрим эрмитову форму $|z_1|^2 - |z_2|^2$ и конус K: $|z_1|^2 - |z_2|^2 < 0$. Пусть $PK = K/\mathbb{C}^*$ – проективизация этого конуса. Область PK – это единичный диск $B = \left\{ \left| \dfrac{z_1}{z_2} \right| < 1 \right\}$ в проективном пространстве $P^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^2 - \{0\}/\mathbb{C}^*$. В диске B рассматривается риманова метрика постоянной отрицательной кривизны -4, совместимая с его комплексной структурой. Линейные преобразования из группы $GL(2, \mathbb{C})$, сохраняющие эрмитову форму $|z_1|^2 - |z_2|^2$, образуют унитарную группу $U(1,1)$. Группа $U(1,1)$ сохраняет конус K. Проективная группа $PU(1,1)$ действует в $P^1(\mathbb{C})$ дробно-линейными преобразованиями, сохраняя диск B. Эта группа есть группа всех сохраняющих ориентацию движений гиперболической плоскости B[17]. Образ линейной группы $\Gamma < U(1,1)$ в проективной группе $PU(1,1)$ обозначим через $P\Gamma$ и назовем *материнской* группой.

Определение. Дискретная группа $\Gamma < U(1,1)$ называется (гиперболической) группой Шевалле, если

1) факторпространство $K/\Gamma = \mathbb{C}^2 - \{0\}$;

2) материнская группа $P\Gamma$ есть кокомпактная фуксова группа.

Элемент $\gamma \in U(1,1)$ является *отражением*, если у него есть неподвижный вектор в конусе K. По теореме 1.2 главы I группа Шевалле Γ порождена отражениями. Как следствие, группа $P\Gamma$ есть фуксова группа рода нуль.

Теорема 1.1. Пусть $\Gamma < U(1,1)$ – дискретная группа, порожденная отражениями, и $P\Gamma$ – фуксова группа рода нуль с сигнатурой $(n_1, \ldots, n_r)$.

Группа Γ тогда и только тогда есть группа Шевалле, когда

$$\nu = 2\left((r-2) - \sum_1^r 1/n_i\right)^{-1} \text{ - целое число.} \qquad (1)$$

Теорема 1.2. Рассмотрим в группе $U(1,1)$ множество всех дискретных подгрупп Γ, порожденных отражениями, с фиксированной фуксовой материнской группой T рода нуль.

Тогда

1) число таких групп Γ конечно;

2) среди них имеется максимальная группа Γ_T, которая содержит любую другую такую группу в качестве нормальной подгруппы конечного индекса.

Любая конечная линейная группа G в $\mathbb{C}^2$, порожденная отражениями, обладает тем свойством, что $\mathbb{C}^2 - \{0\}/G = \mathbb{C}^2 - \{0\}$. Это следует из теоремы Шевалле[14], которая утверждает, что $\mathbb{C}^n/G = \mathbb{C}^n$ для любой конечной линейной группы $G < GL(n, \mathbb{C})$, порожденной отражениями. В гиперболическом случае всякая группа Шевалле порождена отражениями, но далеко не всякая группа, порожденная отражениями, есть группа Шевалле. Число сигнатур, удовлетворяющих условию (1), равно 288, а число r не превосходит девяти. Теоремы 1.1, 1.2 и 5.1 (**§4**) показывают, что множество групп Шевалле в $\mathbb{C}^2$ конечно и обозримо.

Через $\overline{\gamma}$ обозначим подъем элемента $\gamma \in P\Gamma$ в группу $U(1,1)$, через $Z(\Gamma)$ – центр группы Γ, через T или $T(n_1, \ldots, n_r)$ – фуксову группу рода нуль с сигнатурой $(n_1, \ldots, n_r)$ (в главе IV для фуксовой группы рода нуль использовалось обозначение Γ), через l_x – прямую в $\mathbb{C}^2$, соответствующую точке $x \in P^1(\mathbb{C})$. Кодом группы назовем список её образующих и определяющих соотношений.

В **§2** содержится конструкция максимальной группы Γ_T. Здесь же доказано, что Γ_T есть дискретная группа отражений в конусе K, вычислен её центр и найден её код (леммы 2.1 и 2.2).

Рассмотрим в группе $PU(1,1)$ эллиптический элемент A. У преобразования A есть в $P^1(\mathbb{C})$ две неподвижные точки, одна из которых, назовем её x, лежит в диске B. Другая его неподвижная точка y лежит в дополнительном диске $P^1(\mathbb{C}) \setminus B$. Пусть в касательном пространстве к диску в точке x элемент A действует умножением на $e^{i\varphi}$. Рассмотрим в группе $U(1,1)$ отражение $\overline{A}$, которое поточечно сохраняет прямую l_x, а на прямой l_y действует умножением на $e^{i\varphi}$. Такое отражение определено однозначно. Его порядок равен порядку эллиптического элемента A. Отражение $\overline{A}$ назовем *каноническим подъемом* элемента A.

Пусть $T = T(n_1, \dots, n_r)$ – фуксова группа рода нуль. Выберем в группе T каноническую систему образующих $A_1, \dots, A_r$ (в главе IV канонические образующие обозначались через γ_i). Через Γ_T обозначим подгруппу в $U(1,1)$, *порожденную каноническими подъемами всех эллиптических элементов из группы* T.

Лемма 2.1.

а) Группа Γ_T порождена отражениями.

б) Группа Γ_T дискретно действует в конусе K.

в) Центр $Z(\Gamma_T)$ группы Γ_T лежит в центре группы $U(1,1)$ и является конечной циклической группой.

Теорема 1.2 фактически следует из этой леммы (**§4**).

Лемма 2.2. Пусть $T = T(n_1, \dots, n_r)$. Тогда
а) группа Γ_T порождена отражениями $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_r$;
б) любое отражение из группы Γ_T сопряжено ровно одному отражению вида $\overline{A}_i^{k_i}$ $(i = 1, \dots, r)$, $0 \le k_i < n_i$;
в) центр $Z(\Gamma_T)$ порожден элементом $z = \overline{A}_r \dots \overline{A}_1$;
г) относительно образующих $\overline{A}_1, \dots, \overline{A}_r$ группа Γ_T задается определяющими соотношениями
$\overline{A}_1^{n_1} = \dots = \overline{A}_r^{n_r} = 1$, $[\overline{A}_i, \overline{A}_r \dots \overline{A}_1] = 1$, $i = 1, \dots, r$, $(\overline{A}_r \dots \overline{A}_1)^{|Z(\Gamma_T)|} = 1$.

В **§3** содержится важное для доказательства теоремы 1.1 утверждение о центре группы Γ_T.

Теорема 3.1. Пусть $z = \lambda E$ – центр группы Γ_T. Тогда

$$\lambda = \exp\left\{-\pi\sqrt{-1}\left(r-2-\sum_{i=1}^{r}1/n_i\right)\right\} = \exp\frac{-2\pi\sqrt{-1}}{\nu}.$$

Доказательство теоремы 3.1 опирается на геометрическую лемму о площади, представляющую самостоятельный интерес. Рассмотрим в диске B выпуклый гиперболический r-угольник P с вершинами $v_1, \ldots, v_r$ (вершины перечислены в порядке их следования при обходе границы P по часовой стрелке). Предположим, что внутренний угол r-угольника P при вершине v_i равен $\pi\alpha_i$, где $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, \ldots, r$. Пусть $\gamma_i(P)$ – поворот на угол $2\pi\alpha_i$ против часовой стрелки вокруг вершины v_i, а $\overline{\gamma}_i(P) \in U(1,1)$ – канонический подъем эллиптического элемента $\gamma_i(P)$.

Лемма 3.2. Если $S(P)$ – гиперболическая площадь многоугольника P, то элемент $\overline{\gamma}_r(P)\ldots\overline{\gamma}_1(P)$ группы $U(1,1)$ записывается скалярной матрицей

$$\exp\left\{-2\sqrt{-1}S(P)\right\}E.$$

Теорема 3.1 есть следствие леммы 3.2 и связности пространства Тейхмюллера[17] отмеченных фуксовых групп $T(n_1, \ldots, n_r)$. Следующие два важных шага на пути к доказательству теоремы 1.1 – теорема 5.1 и лемма 5.3 из **§5**.

Теорема 5.1. Пусть Γ – группа отражений, $\Gamma \lhd \Gamma_T$ и $P\Gamma = T$. Тогда Γ есть нормальное замыкание в Γ_T семейства отражений $\{\overline{A}_1, \ldots, \overline{A}_i^{l_i}, \ldots, \overline{A}_j^{l_j}, \ldots \overline{A}_r\}$, $1 \le i < j \le r$, $1 \le l_i \le n_i$, $1 \le l_j \le n_j$, $(l_i, l_j) = 1$ и $l_i | n_i$, $l_j | n_j$ (равенство $l_i = n_i$ означает, что отражение $\overline{A}_i$ в семействе отсутствует).

Лемма 5.3.

1) $|Z(\Gamma)| = M/(M, l_i l_j) = M/(M, l_i)(M, l_j)$.

2) $[\Gamma_T : \Gamma] = (M, l_i)(M, l_j)$.

В **§6** содержится доказательство теоремы 1.1, которое кроме всех перечисленных утверждений существенно опирается на теорему 4.1 главы IV (теорема о свободных коциклах). В **приложение** к главе V вынесено одно вычисление в треугольной группе $T(n_1, n_2, n_3)$, которое служит базой индукции при доказательстве леммы 3.2 о площади.

СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ВЕДУЩИХ РЕЦЕНЗИРУЕМЫХ НАУЧНЫХ ЖУРНАЛАХ И ИЗДАНИЯХ (В СООТВЕТСТВИИ С ПЕРЕЧНЕМ ВАК)

1. Бернштейн И.Н., Шварцман О.В. Теорема Шевалле для комплексных кристаллографических групп Кокстера // Функц.анализ и его прил. – 1978. – Т. 12, вып. 4. – С. 79-80. (В этой статье О. В. Шварцману принадлежит постановка задачи, формулировка теоремы Шевалле и ее доказательство для аффинных систем корней $\widehat{A}_l$ и $\widehat{C}_l$. Для всех остальных аффинных систем корней доказательство теоремы Шевалле принадлежит О. В. Шварцману и И. Н. Бернштейну).

2. Шварцман О.В. Теорема Шевалле для комплексных кристаллографических групп, порожденных отражениями,в аффинном пространстве C^2 // Успехи мат.наук. – 1979. – Т. 34. – С. 249-250.

3. Шварцман О.В. О фуксовых группах рода нуль // Функц. анализ и его прил. – 1994. – Т. 28, вып. 4. – С. 66-73.

4. Шварцман О.В. Свободные G-пучки на замкнутых римановых поверхностях // Успехи мат.наук. – 1999. – Т. 54, N 6. – С. 175-176.

5. Шварцман О.В. Свободные алгебры автоморфных форм на верхней полуплоскости // Функц. анализ и его прил. – 2003. – Т. 37, вып. 2. – С. 147-154.

6. Шварцман О.В. Об одном примере Д. Мамфорда и факториальности алгебр автоморфных форм для плоских групп рода 0 // Успехи мат. наук. – 2003. – Т. 58, N 2. – С. 179-180.

7. Шварцман О.В. Гиперболические группы Шевалле в $\mathbb{C}^2$ // Функц. анализ и его прил. – 2009. – Т. 43, вып. 2. – С. 64-72.

8. Bernstein J., Schwarzman O. Complex crystallographic Coxeter groups and affine root systems // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 2006. – V. 13, N 2. – P. 163-182. (В этой статье О. В. Шварцману принадлежит постановка задачи и классификация комплексных кристаллографических групп в терминах оснащенных конечных систем корней. Классификация комплексных кристаллографических групп в терминах аффинных систем корней получена О. В. Шварцманом и И. Н. Бернштейном).

9. Bernstein J., Schwarzman O. Chevalley's theorem for the complex crystallographic groups // Journal of Nonlinear Mathematical Physics. – 2006. – V. 13, N 3. – P. 323-351. (В этой статье О. В. Шварцману принадлежит формулировка теоремы Шевалле, а также теорема о структуре группы четных коциклов $cccr$-групп. Доказательство теоремы Шевалле для всех комплексных кристаллографических групп Кокстера, за исключением групп типа D_l, принадлежит О. В. Шварцману и И. Н. Бернштейну).

СПИСОК РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ, ОПУБЛИКОВАННЫХ В ИЗДАНИЯХ, НЕ ВХОДЯЩИХ В ПЕРЕЧЕНЬ ВАК

10. Шварцман О. В. Коциклы комплексных групп отражений // Сборник "Теория групп и гомологическая алгебра", под. ред. А. Л. Онищика – Ярославль: ЯрГУ, 1992. – С. 32-40.

11. Shvartsman O. V. Cartan matrices of hyperbolic type and nonsingular parabolic points of quotient spaces of tube domains // Selecta Math. Soviet. – 1985. – V. 4, N 1. – P. 55-61.

12. Shvartsman O. V. Chevalley hyperbolic triangle groups in $\mathbb{C}^2$ // In: Abstracts of talks of the International Conference Transformation Groups dedicated to the 70-th anniversary of Ernest B. Vinberg. – Moscow, December 17-22, 2007. – P. 113-114.