Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК: 512.548

Табаров Абдулло Хабибуллоевич

Тождества и линейность квазигрупп

01.01.06 - Математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени доктора физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена на кафедрах высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В.Ломоносова и высшей математики Механико-математического факультета Таджикского национального университета

Научный консультант: доктор физико–математических наук, профессор А.В.Михалев

Официальные оппоненты: доктор физико–математических наук, профессор М.М.Глухов

доктор физико-математических наук, профессор И.Б.Кожухов

доктор физико–математических наук, профессор А.А.Туганбаев

Ведущая организация: Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 16 октября 2009 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М.В.Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 16 сентября 2009 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А.О.Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация посвящена исследованию линейных квазигрупп и некоторых их обобщений. Линейные квазигруппы были введены В.Д.Белоусовым в 1967 году в связи с исследованием уравновешенных тождеств в квазигруппах. В работе большое внимание уделяется проблеме характеризации рассматриваемых классов квазигрупп тождествами.

О значимости тождества в алгебрах можно цитировать высказывание А.И.Мальцева: *"Хотя тождества представляют собой простейшие закрытые высказывания логического языка, язык тождеств все же достаточно богатый, чтобы на нем можно было выражать многие тонкие свойства систем и их классов"*.

Теория квазигрупп берет свое начало в 20-30-х годах XX столетия, когда после фундаментальных работ Давида Гильберта в конце XIX столетия по аксиоматизации математики и, в частности по аксиоматизации геометрии, появились работы по изучению разных видов аксиоматик, в основном, по системам аксиом различных геометрий, в том числе евклидовой геометрии, проективной геометрии, геометрии Лобачевского.

Так как геометрии координатизируются с использованием различного рода алгебраических объектов (полей, почти-полей, тел, групп, полугрупп), то изучались различного рода системы аксиом указанных выше алгебраических объектов.

Впервые термин квазигруппа появился в работе Руфи Муфанг[1] (1935) по координатизации проективных плоскостей. Другими словами, с одной стороны, квазигруппы возникли в недрах (проективной) геометрии, а с другой, - еще раньше, как комбинаторный объект – латинские квадраты в работах Леонарда Эйлера[2,3,4]. Можно утверждать, что термин квазигруппа появился при изучении вопроса независимости аксиом в системах аксиом проективной плоскости. Таким образом, после упомянутой работы Р.Муфанг квазигруппы приобрели "законное право" на самостоятельное существование.

В своих работах Муфанг под квазигруппой понимала объект, который сейчас принято называть лупой Муфанг, то есть лупой со следующими тождествами:

$$(x \cdot yz)x = xy \cdot zx, \ x(yz \cdot x) = xy \cdot zx, \ x(y \cdot xz) = (xy \cdot x)z, \ (zx \cdot y)x = z(x \cdot yx).$$

[1] Moufang R. Zur Structur von Alternativ Korpern. - Math Ann. (1935), vol.110, p.416-430.

[2] Denes J. and Keedwell A.D. Latin squares and their applications. Academiai Kiado. Budapest, 1974.

[3] Denes J. and Keedwell A.D. Some applications of non-associative algebraic systems in cryptology, P.U.M.A. 2002, 12, no.2, p.147-195.

[4] Denes J and Keedwell A.D. Latin squares. New development in the theory and applications, - Annals of Discrete mathematics, 1991, vol. 46, North-Holland.

Следует отметить и работы других математиков, а именно: Вильгельм Дёрнте[5] (1928) по совету Емми Нетер изучает тернарные квазигруппы как некоторые обобщения бинарных групп; А.К.Сушкевич[6,7] (1929, 1937) изучает бинарные квазигруппы с некоторыми дополнительными условиями (постулатами), носящими теперь название "постулаты Сушкевича"; Бурстин и Майер[8] (1929) изучают дистрибутивные квазигруппы.

Несколько позже (1937) А.К.Сушкевич определил медиальные (абелевы) квазигруппы. В период 1939-1944 гг., другими авторами получены ряд важных результатов по теории квазигрупп, а именно, можно отметить работы следующих авторов – А.А.Алберт[9,10] (1943,1944), Р.Бэр[11,12] (1939, 1940), Д.Медоч[13,14] (1939, 1941), К.Тойода[15] (1941), Р.Х.Брак[16,17] (1944, 1946), Э.Л.Пост[18] (1940). Таким образом, работы упомянутых авторов положили начало развитию алгебраической теории квазигрупп.

В 30-е годы XX века было введено понятие сети (ткани). В терминах теории сетей понятие квазигруппы имеет ясную и естественную геометрическую интерпретацию[19,20,21].

Квазигруппы, как решения некоторых возникающих в математической логике функциональных уравнений, неявно (без названия и без определения) появляются в работах немецкого логика Эрнста Шрёдера[22].

В настоящее время теория квазигрупп представляет собой самостоятельный раздел общей алгебры со своими задачами и проблемами. Достаточно полную информацию об этом можно получить из монографий В.Д.Белоусова[19,23]

---

[5]Dornte W. Untersuhungen uber einen veralgemeinerten Gruppenbegriff. - Math.Z, 1928, vol. 29, p.1-19.

[6]Sushkewitsch A.K. On a generalization of the associative law. - Trans. Amer. Math. Soc., 1929, vol. 31, p.204-214.

[7]Сушкевич А.К. Теория обобщенных групп. Киев, 1937.

[8]Burstin C. and Mayer W. Distributive Gruppen von endliher Ordnung. - J. Reine und Angew. Math., 1929, vol. 160, p.11-130.

[9]Albert A.A. Quasigroups.I. - Trans. Amer. Math. Soc., 1943, vol. 54, p.507-519.

[10]Albert A.A. Quasigroups.II. - Trans. Amer. Math. Soc., 1944, vol. 55, p.401-419.

[11]Baer R. Nets and groups.I. - Trans. Amer. Math. Soc., 1939, vol. 46, p.110-141.

[12]Baer R. Nets and groups.II. - Trans. Amer. Math. Soc., 1940, vol. 47, p.435-439.

[13]Murdoch D.S. Quasigroups which satisfy certain generalized associative laws. - Amer. J.Math., 1939, vol. 61, p.509-522.

[14]Murdoch D.S. Structure of abelian quasigroups. - Trans. Amer. Math. Soc., 1941, vol. 49, p.392-409.

[15]Toyoda K. On axsioms of linear functions. - Proc. Imp. Acad.Tokyo., 1941, vol. 17, p.221-227.

[16]Bruck R.H. Some results in theory of quasigroups. - Trans. Amer. Math. Soc., 1944, vol. 55, p.19-52.

[17]Bruck R.H. Contributions to the theory of loops. - Trans. Amer. Math. Soc., 1946, vol. 60, p.245-354.

[18]Post E.L. Polyadic groups. - Trans. Amer. Math. Soc., 1940, vol. 48, p.208-350.

[19]Белоусов В.Д. Основы теории квазигрупп и луп. М., Наука, 1967.

[20]Белоусов В.Д. Алгебраические сети и квазигруппы. Штиинца, Кишинев, 1971.

[21]Белоусов В.Д. Конфигурации в алгебраических сетях. Штиинца, Кишинев, 1979.

[22]Кузнецов А.В.,Кузнецов Е.А. О двухпорожденных дважды однородных квазигруппах. Матем исследования. Кишинев, 1983, вып. 71, с.34-53.

[23]Белоусов В.Д. Элементы теории квазигрупп (учебное пособие по спецкурсу). Кишиневский государственный университет, Кишинев, 1981.

Р.Брака [24], Й.Денеша и А.Кидвелла[2,4], О.Чейн, Х.Пфлюгфельдер и Дж. Смит[25] и материалам периодической печати. Имеется несколько обзоров по теории квазигрупп[26,27].

Фундаментальные результаты в теории бинарных и $n-$арных квазигрупп, в теории сетей и теории функциональных уравнений принадлежат В.Д.Белоусову, начинавшему свою деятельность в этой области под руководством профессора А.Г.Куроша.

В современной алгебре теорию квазигрупп можно рассматривать как одно из звеньев между классическими алгебраическими системами - группами и общими системами универсальной алгебры. Квазигруппы являются удобным объектом для проверки гипотез и идей универсальной алгебры. Ввиду близости к группам, к теории квазигрупп во многом применимы постановки задач и иногда методы теории групп.

Квазигруппы имеют разнообразные приложения в дифференциальной геометрии[28,29,30], теории автоматов[31], криптографии[2–4], физике[32] и т.д. Например, в последнее время квазигруппы нашли свое отражение в теории относительности при изучении пространственно-временных проблем и появились такие понятия, как *квазигруппа Пуанкаре* и *квазигруппа Лоренца*[32].

В настоящее время теория квазигрупп, как и другие алгебраические структуры, развивается по нескольким направлениям, но среди них, по нашему мнению, можно выделить три основных, а именно:

1) *исследование внутренней природы самих квазигрупп;*

2) *тенденция получить аналоги известных результатов и теорем из других алгебраических структур;*

3) *приложения теории квазигрупп.*

Класс квазигрупп, как алгебр с одной бинарной операцией, не замкнут относительно гомоморфных образов, и потому не является многообразием. В

---

[24] Bruck R.H. A survey of binary systems. Berlin - New York, 1958.

[25] Chein O., Pflugfelder H.O., and Smith J.D.H. Quasigroups and loops: Theory and applications, Heldermann Verlag, 1990.

[26] Галкин В.М. Квазигруппы. Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия. ВИНИТИ, 1988, том 26, с.3-44.

[27] Кузьмин Е.Н., Шестаков И.П. Неассоциативные структуры. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. - М.: ВИНИТИ, 1990, том 57, с.179-267.

[28] Сабинин Л.В. Аналитические квазигруппы и геометрия. М, 1991.

[29] Lohmus J., Real E. and Sorgsepp L. About nonassocoativity in mathematics and physics. - Acta Appl. math., 1998, vol.50, p. 3-31.

[30] Sabinin L.V. Smooth quasigroups and loops, Mathematics and its Applications, 492, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 1999.

[31] Гварамия А.А. Квазимногообразия автоматов. Связи с квазигруппами.- Сиб. мат. жур., 1985, том XXVI, №3, с.11-30.

[32] Горелик Г.Е. Размерность пространства. М.: Изд-во МГУ, 1983.

связи с этим при рассмотрении вопросов, связанных с многообразиями, квазигруппы представляют как алгебры с тремя операциями, добавляя к основной операции еще две дополнительные операции. Если основная операция является умножением $(\cdot)$, то остальные две операции называют правым и левым делением и обозначают соответственно в виде $(/)$ и $(\backslash)$. Заметим, что любые две из этих трех операций однозначно определяются третьей операцией, поскольку справедливы следующие эквивалентности:

$$x/y = z \Leftrightarrow z \cdot y = x,\ x\backslash y = z \Leftrightarrow x \cdot z = y,\ x\backslash y = z \Leftrightarrow y/z = x.$$

Легко проверить, что квазигруппы, рассматриваемые как алгебры в сигнатуре $\Omega = \{\cdot, /, \backslash\}$, образуют многообразие. Раньше многообразия алгебр чаще называли примитивными классами и потому квазигруппы в сигнатуре $\Omega = \{\cdot, /, \backslash\}$ называли примитивными квазигруппами. Всюду далее в данной диссертации квазигруппы будут рассматриваться в сигнатуре $\Omega = \{\cdot, /, \backslash\}$. Далее в записях точка, как знак умножения, будет опускаться, а для уменьшения скобок операция $(\cdot)$ будет считаться сильнее операций $(/)$ и $(\backslash)$.

Отметим еще, что при утверждении о незамкнутости класса всех квазигрупп относительно гомоморфных образов имелось в виду, что образ гомоморфизма квазигруппы $(Q, \cdot)$ в алгебру с одной бинарной операцией может не быть квазигруппой. Если же известно, что эта алгебра – квазигруппа, то гомоморфный образ квазигруппы $(Q, \cdot)$ будет обязательно квазигруппой. Больше того, в этом случае гомоморфизм относительно операции $(\cdot)$ будет гомоморфизмом и относительно операций $(/)$, $(\backslash)$.

Многообразие всех квазигрупп в сигнатуре $\Omega = \{\cdot, /, \backslash\}$ задается системой тождеств

$$\sum\nolimits_0 = \{xy/y = x, (x/y)y = x, x(x\backslash y) = y, x\backslash xy = y, x/(y\backslash x) = y, (x/y)\backslash x = y\}.$$

Квазигруппу с единицей называют *лупой*, или квазигруппа $(Q, \cdot, /, \backslash)$ называется лупой, если в ней выполняется тождество $x\backslash x = y/y$.

Квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется *изотопной* квазигруппе $(Q, \circ)$, если существует такая тройка подстановок $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ на множестве Q, что выполняется соотношение $\gamma(x \circ y) = \alpha x \cdot \beta y$.

В классе квазигрупп, изотопных группам, большой интерес представляют так называемые *линейные квазигруппы*. Согласно В.Д.Белоусову, квазигруппа $(Q, \cdot)$ называется *линейной* над группой $(Q, +)$, если она имеет вид

$$xy = \varphi x + c + \psi y, \tag{1}$$

где $\varphi, \psi \in Aut(Q, +)$, с - фиксированный элемент из Q[33].

[33] Белоусов В.Д. Уравновешенные тождества в квазигруппах. - Матем. сборник., 1966, 70(112), №1, с.55-97.

Здесь уместно отметить, что в работе В.Д.Белоусова "Уравновешенные тождества в квазигруппах", которая придала импульс исследованию линейных квазигрупп, решены следующие задачи:

- доказана, что квазигруппа с уравновешенным тождеством изотопна группе, причем указан конкретный вид изотопии;

- впервые рассмотрен класс квазигрупп, изотопных группам, а также его подклассы (линейные, полулинейные квазигруппы);

- класс квазигрупп, изотопных группам (коммутативным группам), охарактеризован тождествами.

Позднее по аналогии с линейными квазигруппами были определены алинейные квазигруппы[34].

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *алинейной* над группой $(Q,+)$, если она имеет вид: $xy = \bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}y$, где $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ - антиавтоморфизмы группы $(Q,+)$, $c \in Q$. В дальнейшем, Г.Б.Белявской и автором как обобщение линейных и алинейных квазигрупп, были введены классы квазигрупп, линейных слева или справа, алинейных слева или справа и смешанных типов линейности [1,6,9,13].

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *линейной слева (справа)* над группой $(Q,+)$, если она имеет вид $xy = \varphi x + c + \beta y$ $(xy = \alpha x + c + \psi y)$, где β (соответственно α) - подстановка множества Q, $\varphi \in Aut(Q,+)$ $(\psi \in Aut(Q,+))$.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ называется *алинейной слева (справа)* над группой $(Q,+)$, если она имеет вид $xy = \bar{\varphi}x + c + \beta y$ $(xy = \alpha x + c + \bar{\psi}y)$, где β (соответственно α) - подстановка множества Q, $\bar{\varphi}$ $(\bar{\psi})$- антиавтоморфизм группы $(Q,+)$.

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ названа квазигруппой *смешанного типа линейности I рода или II рода*, если она имеет вид $xy = \varphi c + c + \bar{\psi}y$ соответственно $xy = \bar{\varphi}x + c + \psi y$, где $\varphi, \psi \in Aut(Q,+)$, $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ - антиавтоморфизмы группы $(Q,+)$. Устанавливается связь между названными типами линейности.

Все эти классы мы будем называть классами квазигрупп различных типов линейности. Разными авторами изучались также квазигруппы различных типов линейности с ограничениями на изотопные им группы и на используемые

[34] Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Характеристика линейных и алинейных квазигрупп. - Дискретная математика, РАН, Москва, 1992, том 4, вып.2, с.142-147.

автоморфизмы и антиавтоморфизмы.[35,36,37,38,39,40,41,42]

Частным случаем линейных квазигрупп являются хорошо известные медиальные квазигруппы, то есть квазигруппы с тождеством $xy \cdot uv = xu \cdot yv$. Согласно теореме Брака-Тойоды эти квазигруппы, линейны над абелевой группой, причем автоморфизмы φ, ψ коммутируют между собой. Медиальные квазигруппы исследовали многие алгебраисты (Брак[16], Тойода[15], Мёдоч[13], Я. Ежек и Т.Кепка[43], Т.Кепка и П.Немец[37,38], К.К. Щукин[44,45] В.А.Щербаков[46] и др.), они играют особую роль в теории квазигрупп. Другим важным случаем линейных квазигрупп являются Т-квазигруппы, введенные Т.Кепкой и П.Немцем[37,38] как обобщение медиальных квазигрупп. Согласно их определению, Т-квазигруппы - это квазигруппы вида $xy = \varphi x + \psi y + c$, где $(Q, +)$ - абелева группа, $\varphi, \psi \in Aut(Q, +)$ и в отличие от медиальных квазигрупп, не обязательно коммутируют. Прослеживается также более общий подход к понятию линейной квазигруппы, а именно, рассматриваются квазигруппы, линейные над некоторой лупой (Т.Кепка и П.Немец[35,36] П.Немец[47], Я.Ежек и Т.Кепка[43], В.А.Щербаков[48] и др.). Квазигруппу $(Q, \cdot)$ называют линейной над лупой $(Q, +)$, если она имеет вид $xy = (\varphi x + \psi y) + d$, где $\varphi, \psi \in Aut\,(Q, +)\,, d \in Q$, предполагая, что при этом в качестве луп $(Q, +)$ будут использоваться достаточно известные и изученные лупы, например лупы Муфанг, то есть лупы с тождеством $x + (y + (x + z)) = ((x + y) + x) + z$. Общая идея квазигруппы, линейной над некоторой лупой, выкристализовалась в работах алгебраистов из Праги (Т.Кепка, Я.Ежек, П.Немец[43,35–38]). В литературе появился также термин *обобщенные линейные квазигруппы*[49]. Как заметил В.А.Щербаков[49], много хорошо известных (классических) объ-

[35] Kepka T. Structure of weakly of abelian quasigroups. - Czech. Math. Journal, 1978, vol.28, p.181-188.

[36] Kepka T. Structure of triabelian quasigroups. - Comment. math. Univ. Carolinae, 1976, vol.17, p.229-240.

[37] Kepka T. and Nemec P. T-quasigroups. I. - Acta univ. Carolin. Math.Phys., 1971, vol.12, №1, p.31-39.

[38] Kepka T. and Nemec P. T-quasigroups.II. - Acta univ.Carolin. Math.Phys., 1971, vol. 12, №2, p.39-49.

[39] Kepka T. A note on WA-quasigroups.Acta univ. Carolin. Math.Phys.,1978, vol.19, p.61-62.

[40] Shcherbacov V.A. About automorphisms and isomorphisms of quasigroups. Intern. conf. on Math. and Informatics. Abstracts (Chisinau), September, 1996, p.41.

[41] Shcherbacov V.A. On structure of finite n-ary medial quasigroups and automorphism groups of these quasigroups. - Quasigroups and related systems, 2005, vol 13, p.125-156.

[42] Shcherbacov V.A. On structure of finite medial quasigroups. - Bull. Acad. Stiinte Repub. Mold., Math. 2005, no.1, p.11-18.

[44] Щукин К.К. О простых медиальных квазигруппах. - Матем. исследования, Кишинев, 1991, вып. 120, с.114-117.

[45] Щукин К.К. Действие группы на квазигруппе. Кишинев, КГУ, 1985.

[46] Щербаков В.А. Об одном классе медиальных квазигрупп. - Матем. исследования, Кишинев, 1988, вып. 102, с.111-116.

[47] Nemec P. Commutative Moufang loops corresponding to linear quasigroups. - Comment. math. Univ. Carolinae, 1988, vol. 2, p.303-308.

[48] Щербаков В.А. О линейных квазигруппах и их группах автоморфизмов. - Матем. исследования, Кишинев, 1991, вып.120, с.104-113.

[49] Shcherbacov V.A. On linear and inverse quasigroups and their applications in code theory. Thesis a Doctor's Degree, Chisinau, 2008.

ектов лежат в классе обобщенных линейных квазигрупп. Например, медиальные квазигруппы (*теорема Тойоды*[15]), дистрибутивные квазигруппы (*теорема Белоусова*[50]), дистрибутивные квазигруппы Штейнера, леводистрибутивные квазигруппы (*теорема Белоусова-Оноя*[51]), CH-квазигруппы (*теорема Манина*[52]), Т-квазигруппы, n-арные группы (*теорема Глускина-Хоссу*[53]), n-арные медиальные квазигруппы (*теорема Ивэнса*[54] *и теорема Белоусова*), F-квазигруппы (*теорема Кепки-Киньона-Филлипса*[55]) являются квазигруппами такого вида.

Обобщение напрашивалось ввиду нескольких теорем о связях между некоторыми классами квазигрупп и луп. Первой в этом ряду стоит теорема Тойоды-Мёдоча о медиальных квазигруппах. Любую медиальную квазигруппу можно получить таким образом: $xy = \varphi x + \psi y + d$, где $\varphi, \psi \in Aut(Q,+)$, $\varphi\psi = \psi\varphi$, $d \in Q$, $(Q,+)$ - абелева группа. Дистрибутивной называется квазигруппа с тождествами $x \cdot yz = xy \cdot xz$, $\quad xy \cdot z = xz \cdot yz$. Если квазигруппа удовлетворяет только первому тождеству, то ее называют леводистрибутивной. В 1958 году В.Д.Белоусов доказал, что любую дистрибутивную квазигруппу можно получить таким образом: $xy = \varphi x + \psi y$, где φ и ψ - некоторые автоморфизмы коммутативной лупы Муфанг (КЛМ) $(Q,+)$. *CH-квазигруппой* называется квазигруппа с тождествами $xy = yx$, $\quad x(xy) = y$, любые три элемента которой порождают медиальную подквазигруппу. CH-квазигруппы введены Ю.И.Маниным в связи с решением одной задачи из алгебраической геометрии, а именно - исследования кубических гиперповерхностей. Как доказал Ю.И.Манин[52], любую CH-квазигруппу можно получить с помощью следующей конструкции: $xy = (-x-y)+d$, где элемент d из центра КЛМ $(Q,+)$. Под центром КЛМ понимают такое множество Z, что $Z = \{a \in Q | a+(x+y) = (a+x)+y,\ x,y \in Q\}$. В дальнейшем исследование линейных квазигрупп над лупами Муфанг, КЛМ, группами, абелевыми группами проводилось также другими математиками.

По известной теореме Ш. Стейна[56] любую леводистрибутивную квазигруппу, изотопную группе, можно получить с помощью такой конструкции: $xy = x + \varphi(-x+y)$, где $(Q,+)$ - некоторая группа, φ - ее определенный автоморфизм. Ввиду ассоциативности групповой операции, получаем:

[50] Белоусов В.Д. О структуре дистрибутивных квазигрупп. - Матем. сборник, 1960, том 50 (92), №3, с.267-298.

[51] Белоусов В.Д. Оной В.И. О лупах, изотопных леводистрибутивным квазигруппам. - Матем. исследования, Кишенев, 1972, том 3(25), с. 135-152.

[52] Манин Ю.И. Кубические формы. М., Наука, 1972.

[53] Белоусов В.Д. n-арные квазигруппы. Штиинца, Кишинев, 1971.

[54] Evans T. Abstract mean values. - Duke math. J., 1963, vol.30, p.331-347.

[55] Kepka T., Kinyon M.K. and Phillips J.D. The structure of F-quasigroups. http://arxiv.org/abs/math/0510298(2005), 24 pages.

[56] Stein S.K. Left distributive quasigroups. - Proc.Amer.Math.Soc., 1959, vol.10, №4, p.577-578.

$xy = (x - \varphi x) + \varphi y = \psi x + \varphi y$. Автоморфизм φ таков, что ψ является подстановкой. Таким образом, леводистрибутивные квазигруппы, изотопные группам, в принципе, линейны справа над группами.

После упомянутой работы В.Д.Белоусова[33] чешскими алгебраистами - Т.Кепка, П.Немец, Я.Ежек и представителями квазигрупповой школы В.Д.Белоусова - Г.Б.Белявская, В.А.Щербаков, В.И.Избаш, К.К.Щукин, Ф.Н.Сохацкий, П.Н.Сырбу, А.Х.Табаров, В.А.Дудек достаточно интенсивно изучались линейные квазигруппы и некоторые их обобщения. Были исследованы алгебраические (морфизмы, конгруэнции, решетки, ядра, центр, ассоциатор, коммутатор, группы умножений) и комбинаторные (ортогональность, численные оценки, латинские квадраты) аспекты обобщенных линейных квазигрупп. Изучались также n-арные линейные квазигруппы. Исследования продолжаются и в настоящее время. Достаточно подробный исторический обзор развития теории квазигрупп содержится в докторских диссертациях Х.Кихле[57] и В.А.Щербакова[49].

Важную роль в теории квазигрупп играет понятие изотопии, заимствованное А.А.Албертом из топологии, обобщающее понятие изоморфизма.

Известно, что понятие изотопии не играет важной роли для групп, так как по теореме А.А.Алберта, если две группы изотопны, то они изоморфны. Но существуют квазигруппы, изотопные группам, но не изоморфные им. Отметим, что понятие изотопии применяется также в теории неассоциативных тел[58].

Класс квазигрупп, изотопных группам, впервые был исследован В.Д.Белоусовым[33]. В частности, В.Д.Белоусовым доказано, что класс квазигрупп, изотопных группам, характеризуется следующим тождеством от пяти переменных:

$$x\,(y\backslash\,((z/u\,)\,v\,)\,) = ((x\,(y\backslash z\,))\,/u\,)\,v\ .$$

Позднее ученик В.Д.Белоусова Ф.Н. Сохацкий заметил, что квазигруппы, изотопные группам, могут быть описаны следующим тождеством от четырех переменных[59,60,61]

$$[(x(u\backslash y))/u]z = x[u\backslash((y/x)z)].$$

Многообразие составляют также все квазигруппы, изотопные коммутативным группам. Это также было впервые замечено В.Д.Белоусовым[33]. Этот класс квазигрупп характеризуется тождеством от четырех переменных:

$$x\backslash(y(u\backslash v)) = u\backslash(y(x\backslash v)).$$

[57] H.Kiechle. Theory of K-loops. Habilitationsschrift. Fachbereich mathematik der Universitat Hamburg. Hamburg, 1998, (Habilitation Dissertation).

[58] Курош А.Г. Лекции по общей алгебре. М., Наука, 1973.

[59] Sokhatsky F.N. On isotopes of groups. I. - Ukrainian Math. Journal, 1995, vol.47, №10, p.1585-1598.

[60] Sokhatsky F.N. On isotopes of groups. II. - Ukrainian Math. Journal, 1995, vol 47, №12, p.1935-1948.

[61] Sokhatsky F.N. On isotopes of groups.III. - Ukrainian Math. Journal, 1996, vol.48, №2, p.283-293.

Многообразие квазигрупп, изотопных группам, исследовали также М.М.Глухов, А.А.Гварамия, Ф.Н.Сохацкий и др. В частности, М.М.Глуховым описаны все тождества длины 4, которые характеризуют квазигруппы, изотопные коммутативным группам:

$$\begin{array}{llll} 1) & x\backslash(y(u\backslash v)) = u\backslash(y(x\backslash v)), & 4) & ((x/y)/u)/v = ((x/v)/u)/y, \\ 2) & (x/y)(u\backslash v) = (v/y)(u\backslash x), & 5) & (x(y\backslash(uv)) = u(y\backslash(xv)), \\ 3) & ((xy)/u)v = ((xv)/u)y, & 6) & ((u/v)x)/y = ((u/y)x)/v. \end{array}$$

Следует отметить, что тождество 1) встречается в работе В.Д.Белоусова[33]. Тождество 4) использовал А.Драпал. Тождество 6) замечено автором. Нетрудно показать, что любое другое тождество длины 4, характеризующее квазигрупп, изотопных коммутативным группам, можно привести к тождествам вида 1) - 6).

А.А.Гварамия[62,63] показал, что класс квазигрупп, изотопных группам из любого многообразия групп, является многообразием квазигрупп. Нетрудно показать, что это утверждение также верно для класса квазигрупп, изотопных лупам из некоторого многообразия луп, а именно, класс квазигрупп, изотопных лупам из любого многообразия луп, является многообразием квазигрупп. Если обозначим через $\mathcal{L}$ - некоторое многообразие луп, а через $\mathcal{JL}$ - многообразие квазигрупп, изотопные лупам из $\mathcal{L}$, то как следствие получаем, что многообразие $\mathcal{JL}$ конечно базируемо тогда и только тогда, когда конечно базируемо многообразие $\mathcal{L}$. Ф.Н.Сохацкий[64] изучал изотопные замыкания классов групп.

Многообразия алгебр и их свободные алгебры в таких алгебраических системах, как группы, полугруппы, кольца, алгебры Ли хорошо изучены и получен ряд важных результатов в этой области[65]. В теории квазигрупп, однако, свободные объекты и многообразия квазигрупп мало изучены. Пожалуй, первые работы в этом направлении принадлежат М.М.Глухову, А.А.Гварамии и

[62] Гварамия А.А. Об изотопии между группами и квазигруппами. IV Всесоюзный симпозиум по теории групп. Тезисы докладов. М., 1984, с.184-185.

[63] Гварамия А.А. Аксиоматизируемые классы квазигрупп и многосортная алгебра. Дисс. докт.физ.-мат. наук. - Сухуми, 1985.

[64] Сохацкий Ф.Н. Ассоциаты и разложения многоместных операций. Дисс. докт.физ.-мат. наук, -Киев, 2006.

[65] Смирнов Д.М. Многообразия алгебр. Новосибирск, 1992.

Т.Ивэнсу.[66,67,68,69,70,71,72,73] Однако, многие вопросы и задачи теории многообразий квазигрупп, даже для отдельных классов квазигрупп, не исследованы. В связи с этим представляет интерес исследование многообразия квазигрупп в целом и, в частности, для отдельных классов квазигрупп. Здесь важно отметить *теорему Глухова-Гварамии об R-многообразиях квазигрупп и луп*, где доказана разрешимость алгоритмических проблем равенства слов, изоморфизма и вхождения для некоторых классов квазигрупп и луп, теорему Т.Ивенса о вложении, работы Т.Кепки, П.Немец, Я.Ежек, А.Драпал.[74,75,76,77] Но, как заметил М.М.Глухов в своем докладе на международной конференции, посвященной 100-летию профессора А.Г.Куроша (Москва, 2008 г.), проблема описания свободных квазигрупп даже в многообразиях квазигрупп, изотопных группам, остается открытой.[78]

Все рассуждения, приведенные выше, можно отнести к обоснованию и актуальности выбранной темы диссертации.

Автор данной диссертационной работы благодарит своего научного консультанта, профессора А.В.Михалева, заслуженного профессора МГУ В.Н.Латышева, кандидата физико-математических наук Г.Б.Белявскую и доктора физико-математических наук В.А.Щербакова за постоянное внимание и всестороннюю поддержку.

Цель работы. Цель диссертации заключается в следующем:

- *исследовать линейные, алинейные, односторонние линейные (алинейные) и близкие к ним квазигруппы;*

[66]Глухов М.М., Гварамия А.А. Об алгоритмических проблемах для некоторых классов квазигрупп. - ДАН СССР, 1967, том 177, №1, с.14-16.

[67]Глухов М.М., Гварамия А.А. Решение основных алгоритмических проблем в некоторых классах квазигрупп с тождествами. - Сиб. мат. ж. 1969, том 10, №2, с.297-317.

[68]Глухов М.М. R-многообразия квазигрупп и луп. - Вопросы теории квазигрупп и луп. Кишинев, 1971, с.37-47.

[69]Evans T. The word problem for absract algebras. - J.London Math.Soc., 1951, vol.28, №1, 64-67.

[70]Evans T. On multiplicative systems defined by generators and relations, I.Normal form theorem. - Proc.Cambridge Philos.Soc. 1951, vol. 47, p.637-649.

[71]Evans T. On multiplicative systems defined by generators and relations, II.Monogenic loops. - Proc.Cambridge Philos.Soc. 1953, vol. 49, p.579-589.

[72]Evans T. The isomorphism problem for some classes of multiplicative systems. - Trans. Amer. Math. Soc. 1963, vol. 109, p. 303-312.

[73]Evans T. Abstract mean values. - Duke math. J., 1963, vol.30, p.331-347.

[74]Drapal A On multiplication groups of relatively free quasigroups isotopic to abelian groups. - Czech. Math. Journal, 2005, vol.55(130), p.61-86.

[75]Jezek J. and Kepka T. Quasigroups, isotopic to a group. - Commentationes math.Universitatis Carolinae. 16.1,1975, p.59-76.

[76]Jezek J., Kepka T. and Nemec P. Distributive groupoids, vol.91, sešit 3 of Rozpravy Ceskoslovenske Academie VĚD. Academia, Praha, 1981.

[77]Kepka T. F-quasigroups isotopic to Moufang loops. - Czech. Math. Journal, 1979, vol.29, p.62-83.

[78]М.М.Глухов. О свободных квазигруппах некоторых многообразий и их мультипликативных группах. Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г.Куроша. Тезисы докладов, Москва, 2008, с.68-69.

- *описать тождества, характеризующие все вышеназванные классы квазигрупп;*

- *описать тождества с подстановками, приводящие к различным видам линейности и алинейности квазигрупп;*

- *построить свободные линейные квазигруппы, доказать разрешимость алгоритмической проблемы равенства слов для класса свободных T-квазигрупп и свободных медиальных квазигрупп;*

- *описать строение автотопий, антиавтотопий и эндотопий линейных, алинейных квазигрупп, квазигрупп смешанного типа линейности и T-квазигрупп;*

- *исследовать условия простоты линейных и алинейных квазигрупп;*

- *решить аналог проблемы Брака-Белоусова об условиях нормальности конгруэнций в односторонних группоидах с делением (с сокращением);*

- *найти условия простоты группоидов с делением (с сокращеннием);*

- *исследовать линейные группоиды и группоиды с тождеством Муфанг.*

Методы исследования. В работе применялись алгебраические и комбинаторные методы исследования, а также разработанные автором методы исследования линейных квазигрупп.

Научная новизна. В диссертации получены следующие результаты:

- введены и подробно исследованы новые классы квазигрупп - алинейные квазигруппы, квазигруппы смешанного типа линейности, односторонние линейные (алинейные) квазигруппы, описаны тождества названных классов и всех типов линейных квазигрупп (всего 11 типов, в итоге решена задача В.Д.Белоусова об описании тождеств, характеризующих упомянутые классы);

- описаны тождества с подстановками, приводящие к различным видам линейности квазигрупп;

- построены свободные линейные квазигруппы и доказана разрешимость алгоритмической проблемы равенства слов для класса свободных T-квазигрупп и свободных медиальных квазигрупп;

- решен аналог проблемы Брака-Белоусова об условиях нормальности конгруэнций односторонних группоидов с делением (с сокращением);

- предложен способ получения квазигрупповых тождеств из некоторого многообразия луп;

- найдены уравновешенные и неуравновешенные тождества, характеризующие подмногообразия T-квазигрупп;

- приведены необходимые и достаточные условия простоты линейных (алинейных) квазигрупп, односторонних группоидов с делением (с сокращением);

- описано строение автотопий, антиавтотопий и эндотопий линейных, алинейных квазигрупп, квазигрупп смешанного типа линейности и T-квазигрупп;

Практическая и теоретическая ценность. Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных разделах общей теории квазигрупп и неассоциативных алгебраических систем. Имеются приложения теории квазигрупп, изотопных группам в теории кодирования.

Апробация полученных результатов. Включенные в данную диссертационную работу результаты докладывались на следующих конференциях и научных семинарах:

- Международная конференция по алгебре, посвященная памяти А.И. Ширшова, Барнаул, 1991г.;

- XXVII конференция факультетов физ-мат. и ест. наук, Университет Дружбы Народов им П.Лумумбы, Москва, 13-18 мая 1991 г;

- XXVIII конференция молодых ученых Университета Дружбы Народов им. П.Лумумбы, Москва, 1992г.;

- Международная конференция по теории групп, Тимишоара, Румыния, 1992г.;

- Третья международная конференция по алгебре памяти М.И.Каргаполова (1928-1976), Красноярск, 1993г.;

- Международная конференция Loops'99, Прага, Чехия, 27 июля - 1 августа, 1999г.;

- Международная конференция Loops'2007, Прага, Чехия, 19-25 августа 2007г.;

- VII Международная конференция по алгебре и логике, Югославия, 21-23 сентября 1998г.;

- Конференция молодых ученых Молдовы по математике и информатике, Кишинев, 1998г.;

- Семинары Института математики и информатики АН Республики Молдова, 1988-1993, 1998-2000, 2003-2007гг.;

- Ежегодная конференция молодых ученых и исследователей Республики Таджикистан, Душанбе, 1999-2007гг.;

- Ежегодная научная конференция Таджикского государственного национального университета, 2005-2009гг.;

- Семинары Института математики АН Республики Таджикистан, 2005-2009гг.;

- Международная конференция: Алгебраические системы и их приложения в дифференциальных уравнениях, Кишинев, 21-23 август 2007г.;

- Международная конференция, посвященная 100-летию памяти А.Г.Куроша, МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 27 мая - 3 июня 2008г.;

- Семинар по алгебре на кафедре высшей алгебры МГУ им. М.В.Ломоносова, Москва, 2008г.;

- Международный алгебраический семинар, посвященный 80-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН, профессора А.И.Кострикина, МГУ им.М.В.Ломоносова, Москва, 24-26 февраля 2009г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 35 работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1-35].

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения и пяти глав, разбитых на 32 параграфа, обзора полученных результатов и списка цитированной литературы. Полный объем диссертации 201 страница, библиография включает 183 наименования.

Краткое содержание диссертационной работы.

Диссертация начинается с введения. В нем освещается актуальность выбранной темы диссертации, цель работы, апробация полученных результатов и краткое изложение полученных результатов.

В **главе I "Квазигруппы с условиями линейности"** изучаются все типы линейных, алинейных, односторонних, линейных смешанных типов квазигрупп, устанавливается их взаимосвязь, исследуются новые (обобщенные) группы регулярных подстановок квазигрупп и их изотопов, в частности всех типов линейных квазигрупп, приводятся критерии простоты линейных и алинейных квазигрупп. Кроме того, исследованы эндоморфизмы, автотопии, антиавтотопии и другие виды морфизмов вышеназванных квазигрупп. Часть результатов главы I, II, III и V получена в сотрудничестве с Г.Б.Белявской.

Предложение 1.2.1. *Линейная (алинейная) слева и справа квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *является линейной (алинейной) квазигруппой.*

Следствие 1.2.1. *Линейная слева (справа) квазигруппа* $(Q,\cdot)$ $xy=\varphi x+c+\beta y$ $(xy=\alpha x+c+\psi y)$ *является линейной справа (слева), если и только если подстановка* β (α) *является квазиавтоморфизмом группы* $(Q,+)$.

Квазиавтоморфизм (антиквазиавтоморфизм) квазигруппы $(Q,\cdot)$ - это главная компонента γ автотопии (антиавтотопии) $T=(\alpha,\beta,\gamma)$ квазигруппы $(Q,\cdot)$, то есть $\gamma(xy)=\alpha x\cdot\beta y \quad (\gamma(xy)=\alpha y\cdot\beta x)$.

Любой квазиавтоморфизм группы $(Q,+)$ имеет вид $\gamma = \tilde{R}_s\gamma_0 x = \tilde{L}_s\gamma_0' x$, где γ_0, γ_0' - автоморфизмы группы $(Q,+)$, $\tilde{R}_s x = x+s$, $\tilde{L}_s x = s+x$, $s \in Q$[19].

Следствие 1.2.2. *Алинейная слева (справа) квазигруппа* $(Q,\cdot)$ $xy = \bar{\varphi}x + c + \beta y$ $(xy = \alpha x + c + \bar{\psi}y)$ *является алинейной справа (слева), если и только если подстановка* β (α) *является антиквазиавтоморфизмом группы* $(Q,+)$.

Предложение 1.2.2. *Линейная слева (справа) и алинейная слева (справа) квазигруппа является левой (правой) T-квазигруппой.*

Следствие 1.2.3. *Если квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *одновременно является квазигруппой смешанного типа I и II рода, то есть* $xy = \varphi_1 x + c + \bar{\psi}_1 y$ *и* $xy = \varphi_2 x \oplus c_2 \oplus \bar{\psi}_2 y$, *где* $\varphi_1 \in Aut(Q,+)$, $\bar{\psi}_1$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q,+)$, $\varphi_2 \in Aut(Q,\oplus)$, $\bar{\psi}_2$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q,\oplus)$, *тогда* $(Q,\cdot)$ *является T-квазигруппой.*

Определение 1.3.1. *Подстановка* λ *(соответственно* ρ, φ*) множества* Q *называется левой (соответственно правой, средней) регулярной подстановкой квазигруппы*$(Q,\cdot)$, *если существует такая подстановка* λ^* (ρ^*, φ^*), что $\lambda x \cdot y = \lambda^*(xy)$ $(x \cdot \rho y = \rho^*(xy),\ \varphi x \cdot y = x \cdot \varphi^* y)$ *для всех* $x, y \in Q$[19].

Подстановка λ^* (ρ^*, φ^*) называется *сопряженной* подстановке λ (ρ, φ). Группу, порожденную подстановками λ (ρ, φ), и группу, порожденную сопряженными им подстановками λ^* (ρ^*, φ^*), обозначим соответственно через L (R, Φ) и L^* (R^*, Φ^*). Известно, что $L \cong L^*, R \cong R^*, \Phi \cong \Phi^*$.

Предложение 1.3.1. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- линейная слева (справа) квазигруппа:* $xy = \varphi x + c + \beta y$ $(xy = \alpha x + c + \psi y), \Im, \Re, \mathcal{F}, \mathcal{F}^*$ *- соответственно, группы левых, правых, средних и сопряженных к средним регулярных подстановок группы* $(Q,+)$. *Тогда*

$$L = L^* = \Im,\ \ \Phi = \mathcal{F}\ \ (R = R^* = \Re,\ \ \Phi^* = \mathcal{F}^*).$$

В линейной квазигруппе с группой умножения $G(\cdot)$, *то есть с группой, порожденной левыми и правыми трансляциями квазигруппы* $(Q,\cdot)$,

$$L = L^* = \Im,\ \ R = R^* = \Re,\ \ \Phi = \mathcal{F},\ \ \Phi^* = \mathcal{F}^*,$$

$$\Phi \cap \Phi^* = \Im \cap \Re \lhd G(\cdot).$$

Предложение 1.3.2. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- алинейная квазигруппа:* $xy = \bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}y$. *Тогда*

$$L = R^* = \Re,\ \ R = L^* = \Im, \Phi = \mathcal{F}^*, \Phi^* = \mathcal{F}.$$

Следующая теорема устанавливает критерий нормальности конгруэнции линейной (алинейной) квазигруппы на языке автоморфизмов φ, $\psi \in Aut(Q,+)$ (антиавтоморфизмов $\bar{\varphi}$ и $\bar{\psi}$).

Теорема 1.4.1. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- линейная (алинейная) квазигруппа:* $xy = \varphi x + c + \psi y$ $(xy = \bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}y)$, η *- конгруэнция группы* $(Q,+)$ *и* $\varphi|Ker\eta, \psi|Ker\eta$ $(\bar{\varphi}|Ker\eta, \psi|Ker\eta)$ *- сужение автоморфизмов* φ, ψ *(антиавтоморфизмов* $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$*) на группу* $Ker\eta$ *соответственно. Тогда* η *конгруэнция квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi|Ker\eta, \psi|Ker\eta$ $(\bar{\varphi}|Ker\eta, \bar{\psi}|Ker\eta)$ *- эндоморфизмы (антиэндоморфизмы) группы* $Ker\eta$*. Далее,* η *- нормальная конгруэнция на* $(Q,\cdot)$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi|Ker\eta, \psi|Ker\eta$ $(\bar{\varphi}|Ker\eta,\ \bar{\psi}|Ker\eta)$ *- автоморфизмы (антиавтоморфизмы) группы* $Ker\eta$.

Как известно[45], решетка нормальных конгруэнций квазигруппы содержится в решетке нормальных конгруэнций лупы, главно изотопной квазигруппе, а именно, справедлива

Теорема 1.4.2.[45] *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- квазигруппа,* $(Q,\circ)$ *- ее LP-изотоп:* $x \circ y = R_a^{-1}x \cdot L_b^{-1}y$, $nCon(\cdot)$ $(nCon(\circ))$ *- решетка нормальных конгруэнций квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *(лупы* $(Q,\circ)$*).* Тогда $nCon(\cdot) \subseteq nCon(\circ)$.

Из этого предложения, в частности, следует, что линейная квазигруппа над простой группой является простой. Однако, простой может оказаться и квазигруппа, линейная над группой, не являющейся простой.

Установим необходимое и достаточное условие простоты линейной (алинейной) квазигруппы. Сначала дадим

Определение 1.4.1. *Пусть* φ *- подстановка множества* Q*. Группу* $(Q,+)$ *назовем* φ*-простой, если в* $(Q,+)$ *не существует нетривиальной нормальной подгруппы* H *такой, что* $\varphi H = H$.

Из теоремы 1.4.2 легко вытекает

Следствие 1.4.1. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- линейная (алинейная) квазигруппа:*

$$xy = \varphi x + c + \psi y \quad (xy = \bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}y).$$

Квазигруппа $(Q,\cdot)$ *проста тогда и только тогда, когда группа* $(Q,+)$ φ*-простая или* ψ*-простая* ($\bar{\varphi}$*-простая или* $\bar{\psi}$*-простая).*

Замечание 1. *Если* φ, ψ *- внутренние автоморфизмы группы*$(Q,+)$, то

$$nCon(\cdot) = nCon(\circ).$$

Замечание 2. *Если группа* $(Q,+)$ *имеет нетривиальный центр (коммутант), то любая линейная (алинейная) над ней квазигруппа непростая.*

Существенную информацию о нормальности конгруэнции линейных квазигрупп можно извлечь посредством автоморфизмов φ и ψ. Дело в том, что если автоморфизмы φ, ψ абелевой группы $(Q,+)$ имеют конечные порядки, то всякая конгруэнция Т-квазигруппы $(Q,\cdot): \ xy=\varphi x+c+\psi y$ является нормальной[38]. Этот факт верен также для линейных (алинейных) квазигрупп, а именно

Теорема 1.4.3. *Пусть $(Q,\cdot)$ - линейная (алинейная) квазигруппа: $xy = \varphi x + c + \psi y$ $(xy = \bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}y)$, причем φ, ψ $(\bar{\varphi},\bar{\psi})$ имеют конечные порядки. Тогда всякая конгруэнция на $(Q,\cdot)$ нормальна.*

Предложение 1.6.1. *Полугруппы эндоморфизмов парастрофных квазигрупп совпадают: $End\,(Q,\cdot) = End\,(Q,^{\sigma}(\cdot))$, где $(Q,\cdot)$ - некоторая квазигруппа, $(Q,^{\sigma}(\cdot))$ - ее парастроф, $End\,(Q,\cdot)\,(End\,(Q,^{\sigma}(\cdot)))$ - полугруппа эндоморфизмов квазигруппы (и соответственно полугруппа эндоморфизмов ее парастрофа).*

Следствие 1.6.1. *Группы автоморфизмов парастрофных квазигрупп совпадают: $Aut\,(Q,\cdot) = Aut\,(Q,^{\sigma}(\cdot))$.*

Напомним, что тройка $T=(\alpha,\beta,\gamma)$ отображений квазигруппы $(Q,\cdot)$ в себя называется *эндотопией* квазигруппы $(Q,\cdot)$, если выполняется равенство $\gamma(xy)=\alpha x\cdot\beta y$, для любых $x,y\in Q$. В случае, когда $\alpha=\beta=\gamma$, то тройка $T=(\gamma,\gamma,\gamma)$ называется *эндоморфизмом* квазигруппы $(Q,\cdot)$.

Очевидно, что множество всех эндотопий квазигруппы $(Q,\cdot)$ образуют полугруппу с единицей. Обозначим эту полугруппу через $Ent(Q,\cdot)$.

Теорема 1.6.2. *Если квазигруппы $(Q,\cdot)$ и $(Q,\circ)$ изотопны: $\gamma(x\circ y)=\alpha x\cdot\beta y$, $(\circ)=(\cdot)T$, $T=(\alpha,\beta,\gamma)$, то их полугруппы эндотопий сопряжены:*

$$Ent(Q,\cdot) = T^{-1}Ent(Q,\circ)T.$$

Теорема 1.6.3. *Любой квазиэндоморфизм γ группы $(Q,+)$ имеет вид*

$$\gamma = \tilde{R}_s\gamma_\circ, \tag{2}$$

где $\gamma_\circ\in End(Q,+)$, $s\in Q$, и обратно, отображение γ, определяемое равенством (2), будет квазиэндоморфизмом группы $(Q,+)$.

Следствие 1.6.2.[19] *Любой квазиавтоморфизм γ группы $(Q,+)$ имеет вид*

$$\gamma = \tilde{R}_s\gamma_\circ, \tag{3}$$

где $\gamma_\circ\in Aut(Q,+)$, $s\in Q$, и обратно, отображение γ, определяемое равенством (3), будет квазиавтоморфизмом группы $(Q,+)$.

Следствие 1.6.3. *Пусть γ - квазиэндоморфизм группы $(Q,+)$. Тогда $\gamma\in End(Q,+)\Leftrightarrow \gamma 0=0$, где 0 - нулевой элемент группы $(Q,+)$.*

В следующих утверждениях устанавливается строение эндотопий, автотопий произвольных линейных, алинейных, смешанных линейных квазигрупп и Т-квазигрупп.

Теорема 1.6.4. *Любая эндотопия линейной квазигруппы* $(Q,\cdot)$, $xy=\varphi x+c+\psi y$ *имеет вид:*

$$\mathrm{P}=(\tilde{R}_c\tilde{L}_{\varphi a}\varphi\theta\varphi^{-1}\tilde{R}_{-c},\tilde{R}_{\psi b}\psi\theta\psi^{-1},\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta), \tag{4}$$

где $\varphi,\psi\in Aut(Q,+),\quad \theta\in End(Q,+),\quad a,b,c\in Q.$

Аналогично, любая эндотопия алинейной квазигруппы $(Q,\cdot):\ xy=\bar{\varphi}x+c+\bar{\psi}y$ *имеет вид:*

$$\overline{P}=\left(\tilde{R}_d\overline{\varphi}\theta\overline{\varphi}^{-1}\tilde{R}_{-c},\tilde{L}_{\overline{\psi}b}\overline{\psi}\theta\overline{\psi}^{-1},\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta\right), \tag{5}$$

где $\bar{\varphi},\ \bar{\psi}$ *- антиавтоморфизмы группы* $(Q,+),\ \theta\in End(Q,+),\ a,b,c,d\in Q,$ $d=\bar{\varphi}a+c.$

Следствие 1.6.4. *Любая автотопия линейной квазигруппы* $(Q,\cdot)$, $xy=\varphi x+c+\psi y$ *имеет вид:*

$$\mathrm{P}=(\tilde{R}_c\tilde{L}_{\varphi a}\varphi\theta\varphi^{-1}\tilde{R}_{-c},\tilde{R}_{\psi b}\psi\theta\psi^{-1},\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta), \tag{6}$$

где $\varphi,\psi,\theta\in Aut(Q,+),\quad a,b,c\in Q.$

Аналогично, любая автотопия алинейной квазигруппы $(Q,\cdot):xy=\bar{\varphi}x+c+\bar{\psi}y$ *имеет вид:*

$$\overline{P}=\left(\tilde{R}_d\overline{\varphi}\theta\overline{\varphi}^{-1}\tilde{R}_{-c},\tilde{L}_{\overline{\psi}b}\overline{\psi}\theta\overline{\psi}^{-1},\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta\right). \tag{7}$$

Следствие 1.6.5. *Любой эндоморфизм* γ *Т-квазигруппы* $(Q,\cdot)$, $xy=\varphi x+c+\psi y$ *можно представить в виде*

$$\gamma=\tilde{R}_{c+\varphi a}\varphi\theta\varphi^{-1}\tilde{R}_c=\tilde{R}_{\psi b}\psi\theta\psi^{-1}=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta,$$

где $\left(\tilde{L}_a\theta,\tilde{R}_b\theta,\ \tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta\right)$ *- некоторая эндотопия группы* $(Q,+)$.

Предложение 1.6.2. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- линейные над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы:* $xy=\varphi_1x+c_1+\psi_1y,\ \ x\circ y=\varphi_2x+c_2+\psi_2y$ *и* $\gamma\in End\,(Q,+)$. *Тогда эндоморфизм* γ *группы* $(Q,+)$ *является гомоморфизмом квазигрупп* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\gamma\varphi_1=\varphi_2\gamma,\ \gamma\psi_1=\psi_2\gamma,\ \gamma\,(c_1)=c_2.$$

Предложение 1.6.3. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *и* $(Q,\circ)$ *- линейные над группой* $(Q,+)$ *квазигруппы:* $xy=\varphi_1x+c_1+\psi_1y,\ \ x\circ y=\varphi_2x+c_2+\psi_2y,\gamma$ *- гомоморфизм*

$(Q,\cdot)$ *в* $(Q,\circ)$*:* $\gamma(xy)=\gamma x\circ\gamma y$*. Тогда гомоморфизм* γ *можно представить в виде*

$$\gamma=\varphi_2^{-1}\tilde{R}_{-c_2}\tilde{L}_a\theta\tilde{R}_{-c_1}\varphi_1=\psi_2^{-1}\tilde{R}_b\theta\beta\psi_1=\tilde{L}_a\tilde{R}_b\theta.$$

Предложение 1.6.4. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- T-квазигруппа:* $xy=\varphi x+c+\psi y$*. Квазиэндоморфизм* $\gamma=\tilde{R}_d\theta$ *квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *является эндоморфизмом квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *тогда и только тогда, когда*

$$\theta\in C_{End(Q,+)}<\varphi,\psi>,\quad \theta c-c=\delta d,\quad \delta=\varphi+\psi-\varepsilon.$$

Теорема 1.7.2. *Любая антиавтотопия группы* $(Q,+)$ *имеет вид:*

$$T=(\tilde{L}_a,\tilde{R}_b,\tilde{L}_a\tilde{R}_b)\bar{\theta},\tag{8}$$

где $\bar{\theta}$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q,+)$*,* a,b *- фиксированные элементы из* Q*.*

Глава II "Тождества в различных классах линейных и алинейных" целиком посвящена выполнению тождеств и тождеств с подстановками в квазигруппах.

В пунктах 2.2.1., 2.2.2. рассматриваются ядра и центр в названных и близких к ним классах квазигрупп. Новые понятия ядер и центра квазигрупп, введенные Г.Б.Белявской, позволяют, с одной стороны, раскрыть внутреннюю характеристику квазигрупп, а с другой, дают возможность охарактеризовать линейные и близкие к ним квазигруппы на языке тождеств, что является *решением одной из поставленных задач В.Д.Белоусова (пункт 2.2.3.).* Логическим продолжением известной теоремы Г.Б.Белявской о связи между центром квазигрупп и Т-квазигрупп (описание Т-квазигрупп посредством системы из двух тождеств) явилось то, что как линейные, так и алинейные квазигруппы охарактеризованы одним тождеством (*Теорема 2.4.1., 2.4.2*). В работе продолжается исследование уравновешенных тождеств в квазигруппах, начатое В.Д.Белоусовым; выделяются некоторые многообразия левых (правых) T-квазигрупп (двусторонних) T-квазигрупп, характеризуемые тождествами и зависящие от порядка определяющих автоморфизмов абелевой группы, приводятся критерии выполнения неуравновешенных тождеств в T-квазигруппах.

Теория тождеств в алгебрах имеет два взаимосвязанных аспекта: тождества и алгебра. Соответственно этому имеется два глобальных вопроса:

1) *описать алгебры с тождествами;*

2) *описать тождества в алгебрах.*

Отметим, что именно во второй части вопроса удалось охарактеризовать классы линейных, алинейных, смешанных линейных квазигрупп, односторонних линейных и алинейных квазигрупп, Т-квазигрупп и близких к ним квазигрупп посредством тождества или системы тождеств (теоремы 2.3.1 - 2.3.5, 2.4.1, 2.4.2).

Теорема 2.1.1. *1) В линейной слева (справа) квазигруппе* $(Q,\cdot)$

$$N_l(h) = Q \ \ (N_r(h) = Q).$$

2) *В линейной квазигруппе* $(Q,\cdot)$ $xy = \varphi x + c + \psi y$,

$$N_l(h) = Q = N_r(h), \quad N_m(h) = Z_h = Z + h, \quad \theta_z(\cdot) = \theta_z(+).$$

3) *В алинейной квазигруппе* $xy = \bar{\varphi}x + c + \bar{\psi}y$,

$$N_l(h) = N_r(h) = N_m(h) = Z_h = Z + h, \quad \theta_z(\cdot) = \theta_z(+),$$

где $N_l(h)$, $N_r(h)$, $N_m(h)$, Z_h *- соответственно левое, правое, среднее ядра и* h*-центр квазигруппы* $(Q,\cdot)$, Z *- центр группы* $(Q,+)$, $\theta_z(\cdot)$ *- нормальная конгруэнция* $(Q,\cdot)$, $\theta_z(+)$ *- конгруэнция центра группы* $(Q,+)$.

Теорема 2.1.2. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- квазигруппа,* $(Q,\circ)$ *- главно изотопная ей лупа:* $xy = \varphi x \circ \psi y$, где $\varphi, \psi \in Aut(Q,\circ)$. Тогда

1) $N_l(h) = \tilde{N}_l(h), \quad N_r(h) = \tilde{N}_r(h), \quad$ 2) $\theta_z(\cdot) = \theta_z(\circ)$.

Теорема 2.1.3. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- леводистрибутивная квазигруппа, изотопная группе* $(Q,+)$*. Тогда*

1) $R = R^* = \Re$, $L = \varphi^{-1}\Im\varphi$, $L^* = \Im$, $\Phi = \varphi^{-1}\mathcal{F}\varphi$, $\Phi^* = \mathcal{F}^*$,

2) $N_r(h) = Q$,

3) $N_l(h) = N_m(h) = Z_h = Z + h$, $\theta_z(\cdot) = \theta_z(+)$,

где Z *- центр группы* $(Q,+)$.

Г.Б.Белявской[79] доказано, что квазигруппа $(Q,\cdot)$ тогда и только тогда совпадает со своим центром, когда она является Т-квазигруппой, то есть квазигруппой, линейной над абелевой группой. Оказывается, что аналогичная связь имеет место между совпадением ядер с квазигруппой и ее соответствующей линейностью.

Согласно теореме 2.1.1, если $(Q,\cdot)$ - линейная слева (справа) квазигруппа, то ее левое (правое) h-ядро, а в линейной квазигруппе и левое и правое h-ядра совпадают с Q. Оказывается, что ядра, введенные Г.Б.Белявской, более тесно связаны с линейностью, а именно, квазигруппа $(Q,\cdot)$ является линейной слева (справа) тогда и только тогда, когда совпадает со своим левым (правым) h-ядром; линейна, если и только если она совпадает и с левым и с правым h-ядрами. Совпадение квазигруппы $(Q,\cdot)$ с ее левым, правым и средним h-ядрами эквивалентно тому, что $(Q,\cdot)$ - T-квазигруппа. Другие случаи совпадения ядер с квазигруппой $(Q,\cdot)$ также приводят к некоторым типам линейности $(Q,\cdot)$.

[79]Белявская Г.Б. Т-квазигруппы и центр квазигруппы. - Мат.исследов. Кишинев, Штиинца, 1989, вып.111, с.24-43.

Теорема 2.2.1. *Пусть* $N_l(h)(N_r(h))$ *- левое (правое) h-ядро квазигруппы* $(Q,\cdot)$, *тогда* $N_l(h) = Q \ \ (N_r(h) = Q)$, *если и только если и* $(Q,\cdot)$ *- линейная слева (справа) квазигруппа, а* $N_l(h) = N_r(h) = Q$, *если и только если* $(Q,\cdot)$ *- линейная квазигруппа.*

Следствие 2.2.1. *Если h-ядро* $N_l(h) \ \ (N_r(h))$ *квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *является подквазигруппой, то это линейная слева (справа) подквазигруппа.*

Заметим, что среднее *h-ядро* $N_m(h)$ квазигруппы $(Q,\cdot)$ связано с особым видом линейных квазигрупп, а именно, имеет место следующая

Теорема 2.2.2. *Среднее h-ядро* $N_m(h)$ *квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *совпадает со всей квазигруппой* $(Q,\cdot)$ *тогда и только тогда, когда* $(Q,\cdot)$ *- квазигруппа вида* $xy = \bar{\varphi}\alpha x + c + \alpha y$, *где* $\bar{\varphi}$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q,+), \alpha$ *- подстановка множества* Q, $c \in Q$.

Следствие 2.2.2. *Если среднее h-ядро* $N_m(h)$ *квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *- подквазигруппа, то эта подквазигруппа имеет вид* $xy = \bar{\varphi}\alpha x + c + \alpha y$, где $(Q',+)$ *- группа,* $\bar{\varphi}$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q',+), \alpha$ *- подстановка множества* Q, $Q' \subseteq Q$, $c \in Q$.

Теорема 2.2.3. *Пусть* $N_l(h), N_r(h), N_m(h)$ *- левое (правое) и среднее h-ядра квазигруппы* $(Q,\cdot)$, *соответственно. Тогда* $N_r(h) = N_m(h) = Q$, $(N_l(h) = N_m(h) = Q)$, *если и только если квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *имеет вид:* $xy = \bar{\varphi}x + c + \psi y \ \ (xy = \varphi x + c + \bar{\psi} y)$, *где* $\varphi, \psi \in Aut(Q,+)$, $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ *- антиавтоморфизмы группы* $(Q,+)$.

Теорема 2.2.4. *В квазигруппе* $(Q,\cdot)$ $N_l(h) = N_r(h) = N_m(h) = Q$, *тогда и только тогда, когда* $(Q,\cdot)$ *- T-квазигруппа.*

На основе полученных результатов все упомянутые классы квазигрупп можно охарактеризовать тождествами или системой тождеств.

Теорема 2.3.1. *Класс линейных слева (справа) квазигрупп составляет многообразие, которое характеризуется тождеством*

$$[x(u\backslash y)]\, z = [x(u\backslash u)]\,(u\backslash yz), \tag{9}$$

$$(x\,[(y/u)z] = (xy/u)\,[(u/u)z]). \tag{10}$$

Следствие 2.3.1. *Класс линейных квазигрупп характеризуется системой из двух тождеств (9) и (10).*

Теорема 2.3.2. *Класс квазигрупп вида* $xy = \bar{\varphi}\alpha x + c + \alpha y$, *где* $(Q,+)$ *- группа,* $\bar{\varphi}$ *- антиавтоморфизм группы* $(Q,+)$, α *- подстановка множества* Q, $c \in Q$, *составляет многообразие, харатеризуемое тождеством*

$$[u\backslash((x/u)y)]v = y[u\backslash((u\backslash x)v)]. \tag{11}$$

Г.Б.Белявской[79] класс T-квазигрупп охарактеризован системой из двух тождеств. Из теоремы 2.2.4. вытекает другая характеризация Т-квазигрупп, а именно,

Теорема 2.3.3. *Класс T-квазигрупп можно охарактеризовать следующей системой из трех тождеств:*

$$\left.\begin{array}{l} [x(u\backslash y)]\,z = [x(u\backslash u)]\,(u\backslash yz) \\ x\,[(y/u)z] = (xy/u)\,[(u/u)z] \\ w_1 = w_2 \end{array}\right\}, \qquad (12)$$

где в качестве тождества $w_1 = w_2$ можно взять любое из тождеств 1) -6), характеризующих класс квазигрупп, изотопных коммутативным группам (см. стр.11).

Учитывая теорему 2.2.3, квазигруппы смешанного типа также можно характеризовать системой тождеств

Теорема 2.3.4. *Класс квазигрупп вида $xy = \bar{\varphi}x + c + \psi y$, где $\psi \in Aut(Q,+)$, $\bar{\varphi}$ - антиавтоморфизм группы $(Q,+)$, составляет многообразие, характеризуемое следующей системой из двух тождеств*

$$\left.\begin{array}{l} x\,[(y/u)z] = (xy/u)\,[(u/u)z] \\ [u\backslash((x/u)y)]\,\nu = y\,[u\backslash((u\backslash x)\nu)] \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Теорема 2.3.5. *Класс квазигрупп вида $xy = \varphi x + c + \bar{\psi}y$, где $\varphi \in Aut(Q,+)$, $\bar{\psi}$ - антиавтоморфизм группы $(Q,+)$, составляет многообразие, характеризуемое следующей системой из двух тождеств*

$$\left.\begin{array}{l} [x(u\backslash y)]\,z = [x(u\backslash u)]\,(u/yz) \\ [u\backslash((x/u)y)]\,\nu = y\,[(u/((u\backslash x)\nu)] \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Теорема Г.Б.Белявской[79]. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1). *Квазигруппа $(Q,\cdot)$ является T-квазигруппой.*

2). *В квазигруппе $(Q,\cdot)$ выполняются следующие тождества:*

$$xy \cdot uv = xu \cdot (\alpha_u y \cdot v), \qquad (15)$$

$$xy \cdot uv = (\beta_x v \cdot y) \cdot ux, \qquad (16)$$

где α_u, β_x - отображения Q в Q, зависящие от u и x соответственно, $x, y, u, v \in Q$.

Из (15) и (16) следует, что $\alpha_u y = (u\backslash((u/u)y \cdot u))/(u\backslash u)$,
$\beta_x v = ((x((x/x)v))/x)/(x\backslash x)$, то есть α_u и β_x - подстановки на множестве Q.

Г.Б.Белявской и автором[34] доказано, что тождество (15) ((16)) характеризует многообразие линейных (алинейных) квазигрупп, а именно, верна следующая

Теорема 2.4.1. *Квазигруппа $(Q,\cdot)$ является линейной квазигруппой тогда и только тогда, когда в ней выполняется тождество*

$$xy \cdot uv = xu \cdot (\alpha_u y \cdot v),$$

где $\alpha_u y = (u\backslash((u/u)y \cdot u))/(u\backslash u)$.

Для алинейных квазигрупп справедлива

Теорема 2.4.2. *Квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *является алинейной квазигруппой тогда и только тогда, когда в ней выполняется тождество*

$$xy \cdot uv = (\beta_x v \cdot y) \cdot ux,$$

где $\beta_x v = ((x((x/x)v))/x)/(x\backslash x)$.

Следствие 2.4.1. *Тождества (15) и (16) независимы.*

Следствие 2.4.2. *Многообразие T-квазигрупп является пересечением многообразий линейных и алинейных квазигрупп.*

Параграфы 2.5 и 2.6 диссертации посвящены изучению связи уравновешенных тождеств с линейными квазигруппами.

Тождество $w_1 = w_2$ в квазигруппе $(Q,\cdot)$ называется *уравновешенным*[33], если выполняется следующее условие: если x входит в одну часть тождества один раз, то x входит и в другую часть, причем также один раз. Тождество $(xy \cdot z)t = x(yz \cdot t)$, $(xz \cdot y)t = x(yz \cdot t)$ являются примерами уравновешенных тождеств. Уравновешенные тождества разделяют на два рода: I рода, когда элементы в w_1 и w_2 упорядочены одинаково (например, тождество ассоциативности $xy \cdot z = x \cdot yz$) и II рода - в противном случае (например, коммутативность $xy = yx$).

Основным результатом о квазигруппах с уравновешенными тождествами является следующая

Теорема 2.5.2[33]. *Квазигруппа с несократимым уравновешенным тождеством изотопна группе.*

В дальнейшем, следуя В.Д.Белоусову[33] будем использовать такие выражения

$$w = (u_1 u_2 \cdots u_n) = ((\cdots((u_1 u_2)u_3)\cdots)u_{n-1})u_n,$$

$$w = [u_1 u_2 \cdots u_n] = u_1(u_2(\cdots(u_{n-2}(u_{n-1}u_n))\cdots)).$$

Первое из них называют правым разложением, а второе - левым разложением слова w.

Для квазигрупп с уравновешенными тождествами произвольной длины верна следующая

Теорема 2.5.3[33]. *Пусть в квазигруппе* $(Q,\cdot)$ *выполняется несократимое уравновешенное тождество (I-го или II-го рода). Тогда* $(Q,\cdot)$ *изотопна некоторой группе* $(Q,+)$, *причем изотопия имеет вид* $xy = \alpha x + \beta y$, *где по крайней мере, одна из подстановок* α *или* β *является диавтоморфизмом.*

Напомним, что постановка α называется диавтоморфизмом группы $(Q,+)$, если α либо автоморфизм, либо антиавтоморфизм этой группы.

Из теоремы 2.5.3. (с учетом рассмотренных нами типов линейности) вытекает следующее

Следствие 2.5.1. *В условиях теоремы 2.5.3 квазигруппа* $(Q,\cdot)$ *- одна из следующих:*

1) $xy = \alpha x + c + \psi y$ $(\psi \in Aut(Q,+),$ α*- подстановка) - линейна справа,*
2) $xy = \varphi x + c + \beta y$ $(\varphi \in Aut(Q,+), \beta$ *- подстановка) - линейна слева,*
3) $xy = \varphi x + c + \psi y$ $(\varphi, \psi \in Aut(Q,+))$ *- линейна,*
4) $xy = \alpha x + c + \bar{\psi} y$ ($\bar{\psi}$*- антиавтоморфизм* $(Q,+), \alpha$ *-подстановка) - алинейна справа,*
5) $xy = \bar{\varphi} x + c + \beta y$ ($\bar{\varphi}$ *- антиавтоморфизм* $(Q,+), \beta$ *- подстановка) - алинейна слева,*
6) $xy = \bar{\varphi} x + c + \bar{\psi} y$ ($\bar{\varphi}, \bar{\psi}$ *- антиавтоморфизмы* $(Q,+)$) *- алинейна,*
7) $xy = \varphi x + c + \bar{\psi} y$ $(\varphi \in Aut(Q,+), \bar{\psi}$ *- антиавтоморфизм* $(Q,+))$ *- смешанная линейная I-го рода,*
8) $xy = \bar{\varphi} x + c + \psi y$ $(\psi \in Aut(Q,+), \bar{\varphi}$ *- антиавтоморфизм* $(Q,+))$ *- смешанная линейная II-го рода,*
9) $xy = \alpha x + c + \psi y$ $(\psi \in Aut(Q,+), \alpha$ *- подстановка, группа* $(Q,+)$ *- абелева) правая T-квазигруппа,*
10) $xy = \varphi x + c + \beta y$ $(\varphi \in Aut(Q,+), \beta$ *- подстановка, группа* $(Q,+)$ *- абелева) левая T-квазигруппа,*
11) $xy = \varphi x + c + \psi y$ $(\varphi, \psi \in Aut(Q,+),$ *группа* $(Q,+)$ *- абелева) - T-квазигруппа.*

Оказывается, что класс левых (правых) T-квазигрупп также составляет многообразие, характеризуемое системой из двух тождеств. Как следствие, получим еще одну характеризацию T-квазигрупп системой из трех тождеств II рода.

Теорема 2.6.1. *Класс левых T-квазигрупп составляет многообразие, характеризуемое следующей системой из двух тождеств:*

$$\left.\begin{array}{l} [x(u\backslash y)]\, z = [x(u\backslash u)]\,(u\backslash yz) \\ w_1 = w_2 \end{array}\right\} \tag{17}$$

Класс правых T-квазигрупп составляет многообразие, характеризуемое следующей системой из двух тождеств:

$$\left.\begin{array}{l} x[(y/u)z] = (xy/u)[(u/u)z] \\ w_1 = w_2 \end{array}\right\}, \tag{18}$$

где в качестве тождества $w_1 = w_2$ *можно взять любое из тождеств 1)-6)(см. стр. 11).*

Учитывая, что левая и правая Т-квазигруппа является Т-квазигруппой, верна следующая

Теорема 2.6.2. *Многообразие всех Т-квазигрупп характеризуется следующей системой из трех тождеств:*

$$\left.\begin{array}{l} [x(u\backslash y)]\, z = [x(u\backslash u)]\, (u\backslash yz) \\ x[(y/u)z] = (xy/u)[(u/u)z] \\ w_1 = w_2 \end{array}\right\}, \tag{19}$$

где в качестве тождества $w_1 = w_2$ можно взять любое тождество из следующей системы:

$$\left.\begin{array}{l} (x/u)\cdot(v\backslash yz) = (y(v\backslash x))/u\cdot z, \\ (x/u)\cdot(v\backslash(y(v\backslash z)) = (z/u)\cdot(v\backslash(y(v\backslash x))), \\ (x/u)\cdot(v\backslash yz) = (yz/u)\cdot(v\backslash x), \\ x(v\backslash((y/u)z) = ((xz)/u)\cdot(v\backslash y), \\ x(v\backslash((y/u)\cdot(v\backslash z)) = (z/u)\cdot(v\backslash(x(v\backslash y))), \end{array}\right\}$$

Следствие 2.6.2. *В Т-квазигруппе с определяющими автоморфизмами конечных порядков выполняются некоторые уравновешенные тождества I рода и II рода.*

Введем следующие обозначения:

$\Re_l$ $(\Re_r)$ - класс всех левых (правых) Т-квазигрупп вида

$xy = x + \gamma y$ $(xy = \delta x + y)$;

$\Re_{p,1}$ $(\Re_{1,q})$ - класс всех левых (правых) Т-квазигрупп вида

$xy = \varphi x + \gamma y$, φ - автоморфизм простого порядка p или $xy = x + \gamma y$;

$xy = \delta x + \psi y$, ψ - автоморфизм простого порядка q или $xy = \delta x + y$).

Очевидно, что $\Re_{p,1}$ $(\Re_{1,q})$ - это класс всех левых (правых) Т-квазигрупп вида $xy = \varphi x + \gamma y$, $\varphi^p = \varepsilon$ $(xy = \delta x + \psi y,\ \psi^q = \varepsilon)$.

Пусть p и q - простые числа. Через $\Re_{p,q}$ обозначим класс всех Т-квазигрупп вида $xy = \varphi x + c + \psi y$, где $\varphi^p = \varepsilon$, $\psi^q = \varepsilon$ (т.е. φ (ψ) - автоморфизм порядка p (q) или $\varphi = \varepsilon$ $(\psi = \varepsilon)$). Заметим, что классу $\Re_{p,q}$ принадлежат все Т-квазигруппы каждого из следующих видов:

$$\begin{array}{ll} xy = \varphi x + c + \psi y, & xy = \varphi x + c + y, \\ xy = x + c + \psi y, & xy = x + c + y, \end{array}$$

где φ (ψ) - автоморфизм порядка p (q).

Легко проверить,что $\Re_{p,q} \subseteq \Re_{p,1} \cap \Re_{1,q}$.

Теорема 2.7.1. $\Re_l\,(\Re_r)$ - *многообразие, характеризуемое тождеством*

$$(xy_0y_1) = (xy_1y_0) \quad (\ [y_1y_0x] = [y_0y_1x]\ ). \tag{20}$$

Теорема 2.7.2. *В* $\Re_l$ ($\Re_r$) *выполняется тождество*

$$(xy_0y_1\cdots y_{n-1}y_n) = (xy_ny_1y_2\cdots y_{n-1}y_0), \tag{21}$$

$$(\ [y_ny_{n-1}\cdots y_1y_0x] = [y_0y_{n-1}\cdots y_1y_nx]\ ) \tag{22}$$

для любого натурального n.

Теорема 2.7.3. $\Re_{p,1}$ ($\Re_{1,q}$) *- многообразие, характеризуемое тождеством*

$$(xy_0y_1\cdots y_{p-1}y) = (xyy_1\cdots y_{p-1}y_0) \tag{23}$$

$$([y_qy_{q-1}\cdots y_1y_0x] = [y_0y_{q-1}\cdots y_1y_qx]). \tag{24}$$

Теорема 2.7.4. $\Re_{p,q}$ *- многообразие, характеризуемое двумя тождествами (23) и (24).*

Теорема 2.8.1. *Для квазигруппы* $(Q,\cdot)$ *следующие условия эквивалентны:*
1) $(Q,\cdot)$ *- Т-квазигруппа* $xy = \varphi x + c + \psi y$, *причем* $\varphi\psi\varphi^{-1} = \psi\varphi^{-1}\psi$;
2) в квазигруппе $(Q,\cdot)$ *выполняется тождество*

$$[x(y/u)]z = [x(u/u)](zy/u); \tag{25}$$

3) в квазигруппе $(Q,\cdot)$ *выполняется тождество*

$$x[(u\backslash y)z] = (u\backslash yx)[(u\backslash u)z]. \tag{26}$$

В Главе III "Тождества с подстановками и линейность квазигрупп" продолжается исследование квазигрупп, изотопных группам и абелевым группам. В квазигруппе $(Q,\cdot)$ выделяется один класс тождеств с подстановками, включающих три переменные, каждое из которых обеспечивает изотопию этой квазигруппы группе (абелевой группе). Из этих результатов следует, что в тождестве В.Д. Белоусова, характеризующем квазигруппы, изотопные группам (абелевым группам), две из пяти (одну из четырех) переменных можно зафиксировать произвольным образом. Рассматриваются различные типы линейности квазигрупп (при этом к типам линейности относим полулинейность и линейность, полуалинейность и алинейность, а также линейность смешанного типа), устанавливается ряд тождеств с подстановками в квазигруппе $(Q,\cdot)$, каждое из которых гарантирует тот или иной тип ее линейности над группой или абелевой группой. Полученные результаты дают возможность описать бесконечное число тождеств, приводящих к изотопии квазигруппы $(Q,\cdot)$ или к ее линейности заданного типа.

Пусть $(Q,\cdot)$ - квазигруппа, $x * y = y \cdot x$. Рассмотрим равенства (назовем их тождествами с подстановками, иногда - просто тождествами в квазигруппе $(Q,\cdot)$) вида:

$$\beta_1(\beta_2(\beta_3x \otimes_1 \beta_4y) \otimes_2 \beta_5z) = \beta_6x \otimes_3 \beta_7(\beta_8y \otimes_4 \beta_9z),$$

где x, y, z - переменные, β_i, $i = 1, 2, ..., 9$ (кратко, $i \in \overline{1, 9}$) - подстановки на Q, $(\otimes_k) = (\cdot)$ или $(\otimes_k) = (*)$, $k \in \overline{1, 4}$. Заменой переменных каждое такое тождество можно привести к следующему тождеству с меньшим числом подстановок:

$$\alpha_1(\alpha_2(x \otimes_1 y) \otimes_2 z) = \alpha_3 x \otimes_3 \alpha_4(\alpha_5 y \otimes_4 \alpha_6 z), \tag{27}$$

которое выполняется для всех $x, y, z \in Q$, где α_i, $i \in \overline{1, 6}$, - некоторые подстановки (возможно, и тождественные) множества Q.

Это тождество является частным случаем обобщенного тождества ассоциативности

$$A_1(A_2(x, y), z) = A_3(x, A_4(y, z)),$$

в котором $A_1(u, z) = \alpha_1(u \otimes_2 z)$, $A_2(x, y) = \alpha_2(x \otimes_1 y)$, $A_3(x, v) = \alpha_3 x \otimes_3 v$, $A_4(y, z) = \alpha_4(\alpha_5 y \otimes_4 \alpha_6 z)$. Согласно теореме В.Д.Белусова о 4-х квазигруппах, все эти квазигруппы изотопны одной и той же группе $(Q, +)$.

Частным случаем тождества (27) является тождество вида

$$\alpha_2(x \otimes_1 y) \otimes_2 z = \alpha_3 x \otimes_3 \alpha_4(\alpha_5 y \otimes_4 \alpha_6 z), \tag{28}$$

где обязательно одна из операций $(\otimes_2)$, $(\otimes_3)$ является $(\cdot)$, другая - $(*)$.

Теорема 3.1.3. *Если в квазигруппе $(Q, \cdot)$ выполняется тождество*

$$\alpha_1(\alpha_2(x \otimes_1 y) \otimes_2 z) = \alpha_3 x \otimes_3 \alpha_4(\alpha_5 y \otimes_4 \alpha_6 z),$$

$$(\alpha_2(x \otimes_1 y) \otimes_2 z = \alpha_3 x \otimes_3 \alpha_4(\alpha_5 y \otimes_4 \alpha_6 z))$$

для некоторых подстановок α_i, $i \in \overline{1, 6}$ $\left(\alpha_1, i \in \overline{2, 6}\right)$, то квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе (абелевой группе).

Обратно, если квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе (абелевой группе), то в ней выполняется тождество (27) (тождество (28)) для некоторых подходящих подстановок α_i, $i \in \overline{1, 6}$.

Как следствие можно получить тождества В.Д.Белоусова, характеризующие класс квазигрупп, изотопных группам (абелевым группам).

Следствие 3.1.1. *Квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе (абелевой группе) тогда и только тогда, когда в ней выполняется тождество*

$$\begin{gathered} ((x(y \backslash z))/u)v = x(u \backslash ((z/u)v)) \\ (\, x \backslash (y(u \backslash v)) = u \backslash (y(x \backslash v)) \,) \end{gathered}$$

для произвольно фиксированных элементов $u = a, y = b$, в частности для $u = y = a$ (для произвольного фиксированного элемента $x = a$), $a, b \in Q$.

Ниже будем для краткости обозначать класс всех линейных слева (справа) квазигрупп через $L\mathcal{L}$ $(R\mathcal{L})$, а класс всех линейных квазигрупп - через $\mathcal{L}$. Отметим, что $\mathcal{L} \subset L\mathcal{L}$, $\mathcal{L} \subset R\mathcal{L}$, более того, $\mathcal{L} = L\mathcal{L} \bigcap R\mathcal{L}$.

Теорема 3.2.1. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- квазигруппа, тогда* $(Q,\cdot) \in L\mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется одно из тождеств:*

$$\alpha_1(xy \cdot z) = \alpha_3 x \cdot \alpha_4(\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z), \tag{29}$$

$$xy \cdot z = \alpha_3 x \cdot \alpha_4(\alpha_5 y * \alpha_6 z); \tag{30}$$

$(Q,\cdot) \in R\mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется одно из тождеств:*

$$\alpha_2(xy) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z), \tag{31}$$

$$\alpha_2(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z); \tag{32}$$

$(Q,\cdot) \in \mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется одно из тождеств:*

$$\alpha_1(xy \cdot z) = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z)\,, \tag{33}$$

$$\alpha_1(xy \cdot z) = \alpha_3 x \cdot \alpha_4(y \cdot \alpha_6 z), \tag{34}$$

$$\alpha_2(xy) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (y \cdot \alpha_6 z), \tag{35}$$

где $\alpha_i, i \in \overline{1,6}$ *- некоторые подстановки множества* Q.

Класс всех алинейных слева (справа) квазигрупп обозначим через $LA\mathcal{L}$ ($RA\mathcal{L}$), а класс всех алинейных квазигрупп - через $A\mathcal{L}$. Очевидно, что $A\mathcal{L} \subset LA\mathcal{L}$ и $A\mathcal{L} \subset RA\mathcal{L}$.

Теорема 3.3.1. *Пусть* $(Q,\cdot)$ *- квазигруппа. Тогда* $(Q,\cdot) \in LA\mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется одно из тождеств:*

$$(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot \alpha_4(\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z), \tag{36}$$

$$(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot \alpha_4(\alpha_5 y * \alpha_6 z); \tag{37}$$

$(Q,\cdot) \in RA\mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется одно из тождеств:*

$$\alpha_2(xy) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y * \alpha_6 z), \tag{38}$$

$$\alpha_2(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y * \alpha_6 z); \tag{39}$$

$(Q,\cdot) \in A\mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется тождество:*

$$(x * y) \cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y * \alpha_6 z), \tag{40}$$

где $\alpha_i, i \in \overline{2,6}$ *- некоторые подстановки множества* Q.

Квазигруппы смешанного типа линейности принадлежат классу квазигрупп (обозначим его через $L\mathcal{L} \cap RA\mathcal{L}$), которые являются линейными слева и алинейными справа или классу квазигрупп (обозначим его через $R\mathcal{L} \cap LA\mathcal{L}$), являющихся линейными справа и алинейными слева. Верна следующая

Теорема 3.4.1. Пусть $(Q,\cdot)$ - *квазигруппа. Тогда* $(Q,\cdot) \in L\mathcal{L} \cap RA\mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется тождество:*

$$(xy)\cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y * \alpha_6 z)\,; \tag{41}$$

$(Q,\cdot) \in R\mathcal{L} \cap LA\mathcal{L}$, *если в* $(Q,\cdot)$ *выполняется тождество:*

$$(x*y)\cdot z = \alpha_3 x \cdot (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z)\,, \tag{42}$$

где $\alpha_3, \alpha_5, \alpha_6$ - *некоторые подстановки множества* Q.

Установим некоторые тождества с подстановками, гарантирующие линейность слева (справа) или линейность квазигруппы над абелевой группой. Класс квазигрупп, линейных слева над абелевой группой (кратко, LT-*квазигрупп*), линейных справа над абелевой группой (RT-*квазигрупп*) и линейных над абелевой группой (T-квазигрупп) обозначим соответственно через LT, RT и T. Как известно[34], $T = \mathcal{L} \cap A\mathcal{L}$ и $T = LT \cap RT$.

Теорема 3.5.1. *Пусть* $(Q,\cdot)$ - *квазигруппа. Тогда* $(Q,\cdot) \in LT$, *если* $(Q,\cdot)$ *удовлетворяет одному из следующих тождеств:*

$$(xz)\cdot z = \alpha_3 x * \alpha_4 (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z)\,, \tag{43}$$

$$(xy)\cdot z = \alpha_3 x * \alpha_4 (\alpha_5 y * \alpha_6 z)\,, \tag{44}$$

$$(x*y)\cdot z = \alpha_3 x * \alpha_4 (\alpha_5 y \cdot \alpha_6 z)\,, \tag{45}$$

$$(x*y)\cdot z = \alpha_3 x * \alpha_4 (\alpha_5 y * \alpha_6 z)\,, \tag{46}$$

где $\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ - *некоторые подстановки множества* Q;

$(Q,\cdot) \in RT$, *если* $(Q,*)$ *удовлетворяет одному из тождеств (43)-(46);*

$(Q,\cdot) \in T$, *если:*

$(Q,\cdot)$ *и* $(Q,*)$ *удовлетворяют одному (не обязательно одному и тому же) из тождеств (43)-(46);*

$(Q,\cdot)$ *или* $(Q,*)$ *удовлетворяет тождеству (43) при* $\alpha_3 = \varepsilon$ *или* $\alpha_5 = \varepsilon$;

$(Q,\cdot)$ *или* $(Q,*)$ *удовлетворяет тождеству (44) при* $\alpha_3 = \varepsilon$ *или* $\alpha_6 = \varepsilon$;

$(Q,\cdot)$ *или* $(Q,*)$ *удовлетворяет тождеству (46) при* $\alpha_5 = \varepsilon$ *или* $\alpha_6 = \varepsilon$.

Будем говорить, что тождество (α) в примитивной квазигруппе $(Q,\cdot,\backslash,/)$ имеет *свойство* (A) *относительно тождества с подстановками* (δ) *в квазигруппе* $(Q,\cdot)$, если в (α) можно выделить три переменные (например, x,y,z) такие, что при некоторой фиксации остальных переменных это тождество принимает вид (δ).

Теорема 3.6.1. *Если в квазигруппе* $(Q,\cdot,\backslash,/)$ *выполняется тождество со свойством (A)* *а) относительно тождества (27) (относительно тождества (28), то квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе (абелевой группе);*

б) относительно одного из тождеств теорем 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1 или 3.5.1, то квазигруппа $(Q, \cdot)$ имеет соответствующий тип линейности.

Если квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна группе (абелевой группе), то в примитивной квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$ выполняется некоторое тождество со свойством (А) относительно тождества (27) (относительно тождества (28)).

Теорема 3.6.2. *Пусть в квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$ выполняется тождество, полученное из тождества (27) (из тождества (28)) описанным выше способом, тогда эта квазигруппа изотопна группе (абелевой группе).*

Если при этом вместо тождества (27) использовать любое тождество из теорем 3.2.1, 3.3.1, 3.4.1 или 3.5.1, то квазигруппа $(Q, \cdot)$ имеет соответствующий тип линейности.

Следствие 3.6.1. *Для любого натурального числа $n \geq 4$ существует тождество в сигнатуре $(\cdot, \backslash, /)$, включающее n переменных, выполнение которого в квазигруппе $(Q, \cdot, \backslash, /)$ является достаточным для изотопии квазигруппы $(Q, \cdot)$ группе (абелевой группе) или для ее линейности соответствующего типа.*

В пункте 3.7 развивается точка зрения А.А.Гварамии[61,62] об изотопии между группами и квазигруппами. В этом направлении предложен способ нахождения квазигрупповых тождеств из некоторого многообразия луп, который является обобщением результатов А.А.Гварамии. Например, квазигруппа $(Q, \cdot)$ изотопна лупе Муфанг тогда и только тогда, когда в ней выполняется тождество

$$((x \cdot (v \backslash ((y \cdot (u \backslash zu)))/u) \cdot (u \backslash xu) = (((x \cdot (u \backslash yu))/u)) \cdot (v \backslash (z \cdot (u \backslash xu))).$$

Также предлагаемым способом легко получить тождество В.Д.Белоусова, характеризующее класс квазигрупп, изотопных группам (коммутативным группам).

Глава IV "Свободные квазигруппы в многообразиях линейных и алинейных квазигрупп" занимает важное место в структуре диссертации.

В данной главе по аналогии с построением свободных Т-квазигрупп, осуществляемом Т.Кепкой и П.Немцем[37,38], строится линейная квазигруппа $F[X, x_\circ]$, имеющая нормальную форму $\Lambda = ((F, +), \varphi, \psi, (j, x_\circ))$, где $(F, +)$ - свободная группа, порожденная множеством $B(X) = \{(\alpha, x) | \alpha \in G, x \in X\}, G$ - свободная группа ранга два, X - непустое множество, $\varphi, \psi \in Aut(F, +)$, j - единица группы $G, x_\circ \in X$. Доказывается , что $F[X, x_\circ]$ - свободная квазигруппа, свободно порожденная множеством $C(X) = \{(j, x) | x \in X, x \neq x_\circ\} \cup \{0\}$, где 0 - ноль группы $(F, +)$.

Нормальную форму Λ будем называть *главной нормальной формой* линейной квазигруппы $F[X, x_\circ]$. Очевидно, что если $x_1, x_2 \in X$ - произвольные, то $F[X, x_1] \cong F[X, x_2]$.

Лемма 4.4.2. *Пусть X - непустое множество, $x_\circ$ - произвольный элемент из $X, \Lambda = ((F, +), \varphi, \psi, (j, x_\circ))$ - главная нормальная форма $F[X, x_\circ]$, $C(X) = \{(j, x) | x \in X, x \neq x_\circ\} \cup \{0\}$, где 0 - ноль группы $(F, +)$. Тогда, $F[X, x_\circ] =< C(X) >$, то есть квазигруппа $F[X, x_\circ]$ порождается множеством $C(X)$.*

Теорема 4.4.1. *Пусть X - произвольное непустое множество и $x_\circ$ - произвольный элемент из X. Тогда квазигруппа $F[X, x_\circ]$ - свободная линейная квазигруппа, свободно порожденная множеством $C(X)$* и

$$rangF\left[X, x_\circ\right] = cardX.$$

Определение 4.3.2. *Пусть $(Q, \cdot)$ - линейная квазигруппа и $\Lambda = ((Q, +), \varphi, \psi,\ c)$ - ее нормальная форма. Обозначим через $\mathrm{A}(Q, \Lambda)$ группу, порожденную автоморфизмами φ и $\psi : \mathrm{A}(Q, \Lambda) =< \varphi, \psi >$. Группу $\mathrm{A}(Q, \Lambda)$ назовем характеристической группой квазигруппы $(Q, \cdot)$.*

Теорема 4.4.2. *Пусть $(F, \cdot)$ - свободная линейная квазигруппа, $(F, +)$ - группа, изотопная (соответствующая) квазигруппе $(F, \cdot)$, и $\mathrm{A}(F)$ - характеристическая группа квазигруппы $(F, \cdot)$. Тогда $(F, +)$ - свободная группа, $A(F)$ - свободная группа ранга два.*

Алгоритмическим проблемам в теории квазигрупп посвящены работы Т.Ивенса[69–73], М.М.Глухова и А.А.Гварамии[66,68]. В 1951 году Т.Ивенс доказал общее утверждение о положительной разрешимости проблемы равенства слов для конечно-определенных алгебр всякого многообразия алгебр $V(\Sigma)$, в котором имеет место теорема о вложении каждой конечной частичной Σ-алгебры в алгебру из V.

В 1969-1971 годах М.М.Глухов[68] сформулировал более сильное, чем теорема о вложении, условие R, при выполнении которого в многообразии не только квазигрупп, но универсальных алгебр положительно решаются алгоритмические проблемы равенства слов, изоморфизма и вхождения. Многообразия алгебр, в которых выполняется условие R, были названы R-многообразиями.

Как известно, в общем случае в многообразиях квазигрупп проблема тождественных соотношений не всегда имеет положительное решение. Об этом свидетельствует известный результат А.И. Мальцева[80] о существовании многообразия луп, задаваемого конечной системой тождеств ранга 1 с неразрешимой проблемой распознавания истинности.

[80] Мальцев А.И. Тождественные соотношения на многообразиях квазигрупп. - Мат. сборник, 1966, 69, №1, с.3-12.

Основным результатом данной главы можно считать разрешимость алгоритмической проблемы равенства слов для свободных T-квазигрупп и свободных медиальных квазигрупп.

Теорема 4.5.1. *В многообразии T-квазигрупп разрешима проблема равенства слов для свободных алгебр.*

Доказательство данной основной теоремы опирается на несколько вспомогательных определений, лемм и теорем. Естественным образом определяются понятия слов, ранга и длина слов, несократимые и приведенные слова, тождества, элементарные преобразования, эквивалентные слова, причем при доказательстве основной леммы указывается и сам алгоритм приведения слова к каноническому виду. Следует отметить, что при изучении алгебр одного многообразия иногда бывает полезно использовать алгебры некоторого, связанного с ним другого многообразия. В связи с этим важным моментом можно считать подход о так называемой эквивалентности и рациональной эквивалентности классов алгебр[81], используемой нами при доказательстве основной теоремы.

По аналогии с теоремой 4.5.1. может быть доказана

Теорема 4.5.2. *В многообразии всех медиальных квазигрупп разрешима проблема равенства слов для свободных алгебр.*

В **Главе V "Линейные группоиды, близкие к квазигруппам"** исследованы группоиды с тождеством, определяющим коммутативные лупы Муфанг и так называемые группоиды, тесно связанные с квазигруппами, а именно, левые и правые группоиды с сокращением (делением). Приведены условия замкнутости ("нормальности") конгруэнций левого (правого) группоида с делением, левого (правого) группоида с сокращением. Найдены условия простоты упомянутых выше группоидов. Тем самым *решается аналог проблемы Брака-Белоусова для таких группоидов (проблема 20 из книги В.Д.Белоусова*[19]. Результаты относительно условия замкнутости ("нормальности") конгруэнций левых и правых группоидов с сокращением (делением) получены совместно с В.А.Щербаковым.

По аналогии с линейными слева (справа) квазигруппами над группой определены линейные слева (справа) группоиды, а именно: группоид $(Q, \circ)$ называется *линейным слева (справа)* над группоидом $(Q, \cdot)$, если существует автоморфизм $\varphi\,(\psi)$ и подстановка $\psi\,(\varphi)$ множества Q, такие, что $x \circ y = \varphi x \cdot \psi y$ для всех $x, y \in Q$. Если φ и ψ являются автоморфизмами $(Q, \cdot)$, тогда группоид $(Q, \circ)$ называется *линейным* над $(Q, \cdot)$. В этом случае группоиды являются изотопными.

[81] Csacany B. On the equivalence of certain classes of algebraic systems. (Russian). - Acta Sci.Math.Szeged, 1962, vol.23, p.46-57.

Б.В.Новиков[82] изучает коммутативные группоиды $(Q,\cdot)$ со следующим тождеством Муфанг:

$$xy \cdot zx = (x \cdot yz)x. \tag{47}$$

Нами рассматриваются группоиды со следующим тождеством, характеризующим коммутативные лупы Муфанг:

$$xy \cdot xz = x^2 \cdot yz. \tag{48}$$

Пусть группоид $(Q,\circ)$ изотопен группоиду $(Q,\cdot)$ и $T = (R_0^{-1}, L_0^{-1}, 1)$:

$$x \circ y = R_0^{-1}x \cdot L_0^{-1}y, \quad x \cdot y = R_0 x \circ L_0 y. \tag{49}$$

Предложение 5.1.1. *Всякий группоид $(Q,\cdot)$ с тождеством (48) и с идемпотентным элементом 0, в котором трансляции L_0 и R_0 - подстановки, является линейным справа над группоидом $(Q,\circ)$ с единицей* 0 *из (49), а группоид $(Q,\circ)$ линеен справа над $(Q,\cdot)$.*

Следствие 5.1.1. *Если группоид $(Q,\cdot)$ с тождеством (48) является коммутативным, то группоид $(Q,\circ)$: $x \circ y = R_0^{-1}x \cdot L_0^{-1}y$ является коммутативным группоидом с единицей, удовлетворяющим тождеству (48), $(Q,\cdot)$ - группоид, линейный над $(Q,\circ)$, а $(Q,\circ)$ линеен над $(Q,\cdot)$.*

Теорема 5.1.1. *Если группоид $(Q,\cdot)$ с тождеством (48) имеет единичный элемент, тогда $(Q,\cdot)$ является группоидом с ассоциативными степенями и в нем выполняются следующие тождества:*

$$(xy)^{2^n} = x^{2^n} y^{2^n}, \tag{50}$$

$$(a_1(a_2...(a_{k-1}b)...))^{2^n} = a_1^{2^n}(a_2^{2^n}...(a_{k-1}^{2^n} \cdot b^{2^n})...), \tag{51}$$

$$a^{2n}(bx) = a^n b \cdot a^n x, \tag{52}$$

для произвольных целых $n \geq 1, k \geq 2$.

Пусть $(Q,\cdot)$ - группоид, $\mathbb{T}(Q,\cdot) = \{L_a, R_b \,|\, a, b \in Q\}$. Полугруппу, порожденную произведениями всех левых и правых трансляций группоида $(Q,\cdot)$, будем называть *полугруппой умножений группоида $(Q,\cdot)$ или мультипликативной полугруппой группоида $(Q,\cdot)$*. Обозначим эту полугруппу через $\Pi(Q,\cdot)$.

Лемма 5.4.1. *Эквивалентность θ является конгруэнцией группоида $(Q,\cdot)$, если и только если*

$$\omega\theta(x) \subseteq \theta(\omega x) \tag{53}$$

для всех $\omega \in \mathbb{T}(Q,\cdot) = \{L_a, R_b \,|\, a, b \in Q\}$, $x \in Q$.

[82] Novikov B.V. On decomposition of Moufang groupoids. - Quasigroups and Related Systems, v.16, N1, 2008, p.97-101.

Следствие 5.4.2 *Эквивалентность* θ *является конгруэнцией группоида* $(Q,\cdot)$, *если и только если* $\omega\theta(x) \subseteq \theta(\omega x)$ *для всех* $x \in Q$, $\omega \in \Pi(Q,\cdot)$.

Напомним, что группоид $(Q,\cdot)$ называется строго простым, если его единственными конгруэнциями являются диагональная $\hat{Q} = \{(x,x) \,|\, x \in Q\}$ и универсальная $Q \times Q$ конгруэнции.

Теорема 5.4.1. *Группоид* $(Q,\cdot)$ *строго прост, если и только если мультипликативная полугруппа* $\Pi(Q,\cdot)$ *примитивна.*

Список опубликованных работ автора по теме диссертации: (Публикации [1-11] из официального перечня ВАК РФ)

1. Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Характеристика линейных и алинейных квазигрупп. Дискретная математика, РАН, 1992, т. 4, вып.2, с.142-147.
2. Табаров А.Х. О некоторых многообразиях абелевых квазигрупп. Дискретная математика, РАН, 2000, т.12, вып. 3, с.154-159. (Translation in Discrete Math. Appl(2000) 10, №5, p.529-534).
3. Табаров А.Х. Характеристика абелевых квазигрупп определенного вида. Доклады АН РТ, 2000, т. 43, №3, с.14-20.
4. Табаров А.Х. Л-формы линейных квазигрупп. Доклады АН РТ, 2005, т.XLVIII, №11-12, с.13-21.
5. Табаров А.Х. Построение свободных линейных квазигрупп. Доклады АН РТ, 2005, т.XLVIII, №11-12, с.22-28.
6. Табаров А.Х. Гомоморфизмы и эндоморфизмы линейных и алинейных квазигрупп. Дискретная математика, РАН, 2007, т.19, вып.2, с.67-73. (Translation in Discrete Math.Appl.17 (2007), no.3, p. 253-260).
7. Табаров А.Х. Простые линейные и алинейные квазигруппы. Вестник ТГНУ, №3 (35), серия естественных наук, 2007, с.259-262.
8. Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Тождества с подстановками, приводящие к линейности квазигрупп. Дискретная математика. РАН, 2009, т.21, вып.1, с. 39-54.
9. Табаров А.Х. Автотопии и антиавтотопии линейных квазигрупп. Доклады АН РТ, 2009, т.52, №1, с.10-16.
10. Табаров А.Х. О производных тождествах в квазигруппах. Известия АН РТ. Отделение физико-математических, химических, геологических и технических наук, 2008, 4(133), с.7-16.
11. Табаров А.Х. Разрешимость проблемы равенства слов в свободных алгебрах многообразий T-квазигрупп. - Вестник ТНУ, 2009, №1(49), серия естест. наук, с.23-33.
12. Табаров А.Х. Свободные квазигруппы в многообразиях линейных и алинейных квазигрупп. 13с., Библиограф.: 24 назв. -Рус. -Душанбе, 2008. Деп. в НПИЦентре, №14(1782) от 17.11.2008.
13. Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Ядра и центр линейных квазигрупп. Известия АН РМ, Математика, Кишинев,1991, №3(6),с.37-42.
14. Tabarov A. Kh. Nuclei and center of some quasigroups. VI th Tiraspol symposium on general topology and its applications. Kishinev, 1992, p.92.
15. Belyavskaya G.B., Tabarov A.Kh. Characteristic of linear and alinear quasigroups. International conference on algebra. Barnaul, 1991, p.15.

16. Табаров А.Х. Т-квазигруппы с дополнительными тождествами. - Кишинев, ИМ с ВЦ АН МССР, 1991. - 12с. - Деп. в ВИНИТИ, Москва, 09.01.91, №163-В91.
17. Табаров А.Х. Характеристика некоторых многообразий квазигрупп, изотопных группам. Тезисы докл.XXVII конф.фак.физ-мат.и ест.наук, 13 - 18 мая 1991г., Москва, УДН, с.157.
18. Табаров А.Х. Группы регулярных подстановок и ядра линейных и близких к ним квазигрупп. Известия АН РМ, Математика, Кишинев, 1992, №3(9), с.30-36.
19. Табаров А.Х. О конгруэнции центра некоторых квазигрупп, изотопных группам. Тезисы докл.XXVIII конф.молодых ученых УДН, Москва, 1992.
20. Tabarov A. Kh. Regular mapping groups of linear and alinear quasigroups. International Conference on Group Theory. Timisoara 92. Romania. Abstracts, 1992, p.85-86.
21. Belyavskaya G.B., Tabarov A. Kh. Some varieties of T-quasigroups. Третья межд. конф.по алгебре. Красноярск, 1993. Сборник тезисов, с. 386.
22. Tabarov A. Kh. On variety quasigroups isotopic to groups. Третья межд. конф. по алгебре. Красноярск, 1993.Сборник тезисов, с.445.
23. Belyavskaya G.B., Tabarov A.Kh. One-sided T-quasigroups and irreducible balanced identities. Quasigroups and Related Systems. Kishinev, 1994, №1, p. 8-21.
24. Tabarov A.Kh. On free linear quasigroups. VII International Conference on Algebra and Logik, Novi Sad, Yugoslavia, September 21-23, 1998.
25. Tabarov A.Kh. О линейных и алинейных квазигруппах. Proceeding of the Young Scientists Conference on Applied Mathematics and Computer Science, Chisinau, 1998, p.31-32.
26. Tabarov A.Kh. Characteristics of quasigroups isotopic to Moufand loops. International conference Loops 99. Praha, July 27- August 1. Submitted Abstracts, p.40-41.
27. Табаров А.Х. О связи между типами линейных квазигрупп. Сборник научных трудов Налогово-правового института, вып. №7, ч. 1, Душанбе, 2005, с.182-187.
28. Табаров А.Х. Свободные линейные квазигруппы. Сборник научных трудов Института экономики Таджикистана, вып. №8, ч.I, Душанбе, 2006, с.307-320.
29. Tabarov A. Kh. On endotopisms of linear and alinear quasigroups. Satellite Conference of ICM, 2006.The XIV th conference on applied and industrial mathematics. Chisinau, August 17-19, 2006, p.319-320.

30. Tabarov A.Kh. Identities in linear and alinear quasigroups. International Mathematical Conference Pragua, Crech Republic, August 19 - August 25, 2007, p.26-27.
31. Belyavskaya G.B., Tabarov A.Kh. Identities with permutations providing linearity (alinearity) of quasigroups. International Mathematical Conference. Pragua, Crech Republic, August 19-August 25, 2007, p.7.
32. Shcherbacov V.A., Tabarov A.Kh. On simple groupoids and T-groupoids. International Mathematical Conference Pragua, Crech Republic, August 19-August 25, 2007, p.22.
33. Tabarov A.X. On quasigroups of the mixed type linearity. International Mathematical Conference: Algebraic Systems and their Applications in Differential Equations and other domains of mathematics, Chisinau, August 21- 23, 2007, p.121-122.
34. Щербаков В.А., Табаров А.Х., Пушкашу Д.И. О конгруэнции группоидов, тесно связанных с квазигруппами. Фундаментальная и прикладная математика., 2008, т. 14, вып. 5, с.237-251.
35. Белявская Г.Б., Табаров А.Х. Группоиды с тождеством, определяющим коммутативные лупы Муфанг. Фундаментальная и прикладная математика., 2008, т. 14, вып. 6, с.33-39.

В работе [1] совместной с Г.Б.Белявской, диссертанту принадлежит формулировка и доказательство теоремы 2, характеризующей алинейные квазигруппы тождеством. Г.Б.Белявской принадлежит формулировка теоремы 1 и следствий 1, 2. Тезисы этих результатов опубликованы в совместной работе [15].

В работе [8], совместной с Г.Б.Белявской, диссертанту принадлежат формулировка и доказательство теорем 5, 6, 7, лемм 4, 5, следствий 3, 4, 5. Г.Б.Белявской принадлежат доказательство теорем 3, 4, 8, 9, следствий 1, 2. Тезисы этих результатов опубликованы в совместной работе [31].

В работе [13], совместной с Г.Б.Белявской, диссертанту принадлежат формулировка и доказательство теорем 1, 2, 3, 4, 5 и следствия из них. Г.Б.Белявской принадлежат формулировка и доказательство теорем 6 и 7, а также лемма 1 и ее следствие.

В работе [23], совместной с Г.Б.Белявской, диссертанту принадлежат формулировка и доказательство теорем 1, 3, 4, лемма 1, следствия 1, 2, 3. Соавтору принадлежат доказательство теоремы 5 и леммы 2. Тезисы этих результатов опубликованы в совместной работе [21].

В работе [34] совместной с В.А.Щербаковым и Д.И.Пушкашу, диссертанту принадлежат формулировка и доказательство теоремы 3, следствий 4, 5, 6, 7, замечания 4. В.А.Щербакову принадлежит доказательство теоремы 1, следствия 2, Д.И.Пушкашу принадлежат примеры, приведенные в упомянутой работе. Тезисы этих результатов докладывались на международной конференции -Loops' 2007, в г.Прага (Чехия) [32].

В работе [35], совместной с Г.Б.Белявской, диссертанту принадлежит формулировка и доказательство теореме 2, замечание 2, Г.Б.Белявской принадлежит доказательство теоремы 1.