МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 511.361

Галочкин Александр Иванович

# ОБ АРИФМЕТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ ЗНАЧЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ

Специальнсть 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Москва – 2009

Работа выполнена на кафедре теории чисел
Механико-математического факультета
Московского государственного университета
имени М.В.Ломоносова

Научный консультант – член-корр. РАН, профессор
Нестеренко Юрий Валентинович

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор
Матвеев Евгений Михайлович

доктор физико-математических наук, профессор
Салихов Владислав Хасанович

доктор физико-математических наук, профессор
Сорокин Владимир Николаевич

Ведущая организация:
Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 20 ноября 2009 г. в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: РФ, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 1408.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова
(Гловное здание 14 этаж).

Автореферат разослан 20 октября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Д.501.001.84
при МГУ доктор физико-математических наук, профессор

А.О.Иванов

## Общая характеристика работы

**Актуальность темы.** В 1929–1934 годах сформировались основные методы теории трансцендентных чисел. В 1929 году К.Зигель[1] опубликовал аналитический метод, позволяющий устанавливать алгебраическую независимость и трансцендентность значений в алгебраических точках функций некоторого класса, названного им E-функциями.

**Определение 1.** *Пусть* $\mathbb{K}$ *— алгебраическое числовое поле конечной степени;* $\mathbb{Z}_K$ *— кольцо целых чисел в поле* $\mathbb{K}$. *Функция*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!}, \quad a_\nu \in \mathbb{K},$$

*называется E-функцией, если при любом* $\varepsilon > 0$ *выполняются следующие условия*

$$1) \quad \overline{|a_\nu|} = O\left(\nu^{\varepsilon\nu}\right) \tag{1}$$

*(для числа* $a \in \mathbb{K}$ *через* $\overline{|a|}$ *будем обозначать максимум модулей алгебраических чисел, сопряженных числу* $a$ *в поле* $\mathbb{K}$*);*

2) *существует последовательность* $\{q_n\}$ *натуральных чисел таких, что*

$$q_n a_\nu \in \mathbb{Z}_K, \quad n = 0, 1, \ldots; \quad \nu = \overline{0, n},$$

*и*

$$q_n = O(n^{\varepsilon n}). \tag{2}$$

Множество E-функций является кольцом. Производная E-функции — E-функция.

Пусть совокупность E-функций $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений

$$y_i' = Q_{i0}(z) + \sum_{j=1}^{s} Q_{ij}(z) y_j, \quad i = \overline{1, s}; \quad Q_{ij}(z) \in \mathbb{K}(z). \tag{3}$$

Примеры E-функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям: многочлен с алгебраическими коэффициентами, $e^z$, $\sin z$, $\cos z$, функция Бесселя $J_0(z)$.

[1] Siegel C.L. Über einige Anwendengen Diophantischer Approximationen// Abh. Preuss. Acad. Wiss., Phis.–Math. Kl. — 1929 — №1. — S. 1 – 70

В книге[2] К.Зигель в общей форме установил некоторое достаточное условие алгебраической независимости значений E-функций в алгебраических точках.

А.Б.Шидловский[3] существенно усилил метод Зигеля. Он доказал, что, если E-функции $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ составляют решение системы (3), а $\alpha$ – алгебраическое число, отличное от нуля и от полюсов коэффициентов системы, то алгебраическая независимость чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_s(\alpha)$ эквивалентна алгебраической независимости функций $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ над полем $\mathbb{C}(z)$.

Бывает удобно считать систему (3) однородной — в противном случае ее можно дополнить функцией, тождественно равной 1. Поэтому можно считать, что система имеет вид

$$y_i' = \sum_{j=1}^{s} Q_{ij}(z) y_j, \quad i = \overline{1,\, s}, \quad Q_{ij}(z) \in \mathbb{K}(z). \tag{4}$$

Метод Зигеля-Шидловского позволяет также получать количественные результаты. С. Ленг[4] был первым, кто установил в общем виде оценки многочленов от значений E-функций.

Рассмотрим далее E-функции, в которых на коэффициенты и на их общие знаменатели введены более сильные ограничения по сравнению с определением 1.

**Определение 2.** *Будем говорить, что функция $f(z)$ является E-функцией в узком смысле, если в определении 1 оценки (1) и (2) заменены соответственно на оценки*

$$\overline{|a_\nu|} = e^{O(\nu)} \text{ и } q_n = e^{O(n)}\,. \tag{5}$$

Все известные E-функции, составляющие решения систем линейных дифференциальных уравнений типа (3), являются E-функциями в узком смысле.

Через $\mathbb{I}$ будем обозначать поле рациональных чисел или мнимое квадратичное поле. Наиболее точные количественные результаты получаются, когда поле $\mathbb{K} = \mathbb{I}$.

А.Б. Шидловский[5] доказал следующее утверждение.

[2] Siegel C.L. Transcendental numbers. Princeton: Princeton University Press, 1949

[3] Шидловский А.Б. О критерии алгебраической независимости значений одного класса целых функций // Известия АН СССР. Сер. матем. — 1959 — Т. 23. — №1. — С. 35 — 66

[4] Lang S. A transcendence measure for E-functions // Mathematica. — 1962 —V. 9. — P. 157–161

[5] Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987, стр.411

**Теорема I.** *Пусть совокупность E-функций в узком смысле* $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ *с коэффициентами* $a_{j\nu}$ *из поля* $\mathbb{I}$ *составляет решение системы линейных дифференциальных уравнений (4) и линейно независима над полем* $\mathbb{C}(z)$. *Число* $\alpha \in \mathbb{I}$ *отлично от нуля и от полюсов коэффициентов системы.*

*Тогда для любых чисел* $h_j \in \mathbb{Z}_I$, *при* $H \geq \max_j |h_j| > 0, \quad H \geq 3$, *справедливо неравенство*

$$\left|h_1 f_1(\alpha) + \cdots + h_s f_s(\alpha)\right| > H^{\,1-s-\frac{\gamma}{\sqrt{\ln\ln H}}}\,, \tag{6}$$

*где постоянная* $\gamma$ *не зависит от* $H$.

С помощью принципа Дирихле легко установить, что оценка (6) может быть улучшена только за счет величины $\gamma(\ln\ln H)^{-0,5}$.

К.Зигель указал также, что его метод применим для исследования арифметических свойств значений некоторых функций, ряды Тейлора которых имеет конечный радиус сходимости. Эти функции К.Зигель назвал G-функциями. G-функция задается в виде ряда

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu\,, \quad a_\nu \in \mathbb{K}\,, \tag{7}$$

в котором величины $a_\nu$ и $q_n$ удовлетворяют условиям (5).

Множество G-функций, как и множество E-функций, образует кольцо, производная G-функции — G-функция. Примеры G-функций: $\ln(1+z)$, $(1+z)^r$, $r \in \mathbb{Q}$.

М.С.Нурмагомедов[6] впервые применил метод К.Зигеля для исследования арифметических свойств значений G-функций в алгебраических точках. В частности, он установил, что, если $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ — совокупность G-функций, алгебраически независимых над полем $\mathbb{C}(z)$ и удовлетворяющих системе линейных дифференциальных уравнений (3), $\alpha \neq 0$ — алгебраическое число, $q$, $N$, $H$ натуральные числа,

$$q > q_0(H\,, N\,, \alpha\,, f_1(z), \ldots, f_s(z))\,, \tag{8}$$

а число $\alpha/q$ отлично от полюсов всех функций $Q_{ij}(z)$, то числа $f_1(\alpha/q), \ldots, f_s(\alpha/q)$ не связаны никаким нетривиальным алгебраическим уравнением степени, не превосходящей $N$, с целыми коэффициентами, по модулю, не превосходящими $H$.

[6] Нурмагомедов М. С. Об арифметических свойствах одного класса аналитических функций// Математический сборник. — 1971. — 85(127). — №3. — С. 339–365

Поскольку число $q_0$ зависит от $H,$ то из теорем М.С.Нурмагомедова не следует иррациональность значений G-функций.

Впоследствии арифметические свойства значений $G$-функций исследовались во многих работах, в том числе в монографии Андре[7].

Рассмотрим общую гипергеометрическую функцию

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{[a_1+1,\,\nu]\cdots[a_u+1,\,\nu]}{[b_1+1,\,\nu]\cdots[b_v+1,\,\nu]}\,z^{t\nu}\,,\quad t=v-u>0, \tag{9}$$

где $[\lambda+1,\,\nu]=(\lambda+1)\cdots(\lambda+\nu),\quad [\lambda+1,\,0]=1$, а числа $b_j\neq-1,\,-2,\ldots.$

К.Зигель[8] доказал, что, если все параметры $a_i,\,b_j$ — рациональные числа, то функция (9) является E-функцией и удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению с коэффициентами — рациональными функциями. Он предположил что любая E-функция, удовлетворяющая линейному дифференциальному уравнению с коэффициентами из $\mathbb{C}(z),$ может быть представлена в виде многочлена с алгебраическими коэффициентами от функций вида (9) с возможными заменами $z$ на $\lambda_j z$ с алгебраическими значениями $\lambda_j$ и рациональными параметрами $a_i,\,b_j$. К настоящему времени эта гипотеза не доказана и не опровергнута.

Был неясен даже вопрос, является ли E-функцией функция (9) с алгебраическими параметрами. В.Г.Спринджук[9] доказал, что, если $\lambda$ — такое алгебраическое иррациональное число, что $\mathbb{Q}(\lambda)$ — поле Галуа, то функция

$$\varphi_\lambda(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{z^\nu}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+\nu)}\,,\quad \lambda\neq-1,\,-2,\ldots, \tag{10}$$

не является E-функцией.

В методе Зигеля-Шидловского применяются некоторые построения, использующие принцип Дирихле. Однако со времени классических работ Ш. Эрмита и Ф. Линдемана применялись и явные конструкции, не использующие принцип Дирихле. Если удавалось провести такие построения, то обычно получались более сильные результаты.

В 1932 году К.Малер[10] доказал, что, для любого ненулевого многочлена $P_m(x)$ с целыми коэффициентами по модулю не превосходящими $H$

---

[7] André Y. G-functions and Geometry. Bonn. Braunschweig. 1989

[8] Siegel C.L. Transcendental numbers. Princeton: Princeton University Press, 1949

[9] Спринджук В.Г. К теории гипергеометрических функций Зигеля. // Докл. АН БССР — 1969 — Т. 13. — №5. — С. 389–391

[10] Mahler K. Zur Approximation der Exponentialfunktion und Logarithmus. I.// J. reine und angew. Math. — 1932 — Bd. 166 — S. 118–136

выполняется неравенство

$$|P_m(e)| > H^{-m-\frac{\gamma m^2 \ln(m+1)}{\ln\ln H}}, \quad m = \deg P, \quad H > H_0(m),$$

где $\gamma$ — абсолютная постоянная. Доказательство основывается на явном построении многочлена

$$0 \not\equiv P(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y], \quad \deg_x P \le n, \quad \deg_y P \le m,$$

такого, что функция $P(z, e^z)$ имеет максимально возможный порядок нуля в точке $z = 0$ (так называемая задача аппроксимации типа Паде).

Основные идеи этого метода использовались многими авторами, в частности Н.И. Фельдманом[11] для значений функции (10) $\varphi_\lambda(z)$.

Рассмотрим функцию

$$\psi(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^\nu \left( \prod_{x=1}^{\nu} g(x) \right)^{-1}, \; g(x) = g_m x^m + g_{m-1} x^{m-1} + \cdots + g_0. \quad (11)$$

Функция $\psi(z)$ является решением дифференциального уравнения

$$g(\delta) y = zy + g(0), \quad \delta = z\frac{d}{d\,z}.$$

Заметим, что функция $\psi(z^m)$ с $g_m = 1$ — частный случай функции (9). Если все корни многочлена $g(x)$ — рациональные числа, то она является E-функцией.

Ч. Осгуд[12] доказал следующую теорему о значениях функции (11).

**Теорема II.** *Пусть $g(x) \in \mathbb{I}[x]$, $g(0) = 0$, $g_m = 1$, $r_1, \ldots, r_t$ —различные и отличные от нуля рациональные числа, $mt > 1$.*

*Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любых чисел $h_{ij} \in \mathbb{Z}_I$ при*

$$H = \max_{j=\overline{1,t};\; s=\overline{0,\, m-1}} |h_{js}| > 0$$

*выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{j=1}^{t} \sum_{s=0}^{m-1} h_{js} \psi^{(s)}(r_j) \right| > C_1 H^{1-mt-\varepsilon}$$

[11] Фельдман Н. И. Оценки снизу некоторых линейных форм// Вестн. Моск. ун-та, сер. Математика, механика. — 1967. — №2 — С. 63–72

[12] Osgood C. Some theorems on diophantine approximation// Trans. Amer. Math. Soc. — 1966. — V. 123. — №1. — P. 64–87

*и для любого набора $q$, $p_{js}$ целых чисел из поля $\mathbb{I}$ при любой паре индексов $(u, v)$, $1 \le u \le t$; $0 \le v \le m-1$ с $(s, j) \ne (u, v)$ и при $|q| > 0$ выполняется неравенство*

$$\max_{j=\overline{1,t};\ s=\overline{0,m-1};\ (s,j)\ne(u,v)} \left| \frac{\psi^{(s)}(r_j)}{\psi^{(u)}(r_v)} - \frac{p_{js}}{q} \right| > C_2|q|^{-1-\frac{1}{mt-1}-\varepsilon},$$

*где $C_1$ и $C_2$ — положительные постоянные, зависящие от $\varepsilon$, но не зависящие от $H$.*

В 1981 году А.Н. Коробов[13] в некотором более частном случае получил оценку снизу линейной формы, которая отличалась от соответствующей оценки сверху лишь на постоянный множитель.

**Теорема III.** *Пусть $s$, $a$, $a+b$ — натуральные числа $c \in \mathbb{Z}_I$, $c \ne 0$ и*

$$\psi_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{n+s\nu}}{(as)^{\nu}\nu!} \prod_{x=1}^{n+s\nu} (ax+b)^{-1}.$$

*Тогда для любых чисел $h_0, h_1 \ldots, h_s$ из кольца $\mathbb{Z}_I$ при*

$$H = \max(|h_0|, \ldots, |h_s|) > 3$$

*справедливо неравенство*

$$\left| h_0\psi_0\left(\frac{1}{c}\right) + \cdots + h_s\psi_s\left(\frac{1}{c}\right) \right| > \gamma\, H^{-s} \left(\frac{\ln\ln H}{\ln H}\right)^{\frac{s+1}{2}}.$$

*Положительная постоянная $\gamma$ не зависит от $H$, причем показатель $\dfrac{s+1}{2}$ не может быть уменьшен.*

В 1929 – 1930 годах К. Малер[14,15] опубликовал метод, позволяющий устанавливать трансцендентность и алгебраическую независимость значений функций, удовлетворяющих некоторым функциональным уравнениям.

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu, \quad a_\nu \in \mathbb{K}. \tag{12}$$

[13] Коробов А. Н. Оценки некоторых линейных форм // Вестн. Моск. ун-та, сер. матем, мех. — 1981. — №6. — С. 36–40

[14] Mahler K. Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse Funktionalgleichungen // Math. Ann. — 1929. — Bd. 101 — №4. — S. 342–366

[15] Mahler K. Arithmetische Eigenschaften einer Klasse transzendental-transzendenter Funktionen// Math.Z. — 1930 — Bd. 32 — №4. — S. 545–586

Пусть ряд сходится в круге $|z| < R$ и функция $f(z)$ удовлетворяет уравнению

$$f(z^\rho) = \frac{A_1(z,\, f(z))}{A_2(z,\, f(z))}\,,\ A_j(z,\, y) \in \mathbb{Z}_K[z,\, y], \quad \rho \in \mathbb{N}\,,\ \rho \geq 2\,. \tag{13}$$

Обозначим через $\Delta(z)$ результант многочленов $A_1(z,\, y)$ и $A_2(z,\, y)$.

**Теорема IV.** *Пусть $f(z)$ — трансцендентная функция, удовлетворяющая функциональному уравнению (13), и $\deg_y A_j(z,\, y) < \rho$, $j = 1,\, 2$; $\alpha$ — алгебраическое число, $0 < |\alpha| < \min(1,\, R)$ и $\Delta(\alpha^{\rho^k}) \neq 0$ при $k = 0,\, 1, \ldots$.*

*Тогда число $f(\alpha)$ трансцендентно.*

К.Малер доказал также несколько теорем об алгебраической независимости значений таких функций и распространил свой метод на функции от нескольких переменных.

Приведем примеры функций, удовлетворяющих уравнению Малера (13), для которых справедливо утверждение теоремы IV.

**Пример 1.**

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\rho^\nu}\,, \quad f(z^\rho) = f(z) - z\,. \tag{14}$$

**Пример 2.**

$$f(z) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - z^{2^\nu}\right) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu z^\mu\,, \quad f(z^2) = \frac{f(z)}{1-z}\,, \tag{15}$$

*где числа $a_\mu$ равны $1$ или $-1$, причем $a_\mu = 1$ тогда и только тогда, когда в двоичное разложение числа $\mu$ входит четное число единиц.*

**Пример 3.**

$$f(z) = \prod_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - z^{\rho^\nu}\right)^{q^{-\nu}}\,, \quad f(z^\rho) = \frac{f^{\,q}(z)}{(1-z)^q}\,, \quad q \in \mathbb{N}\,. \tag{16}$$

В приведенных примерах при алгебраическом $\alpha$ $(0 < |\alpha| < 1)$ (в последнем примере при $q < \rho$) по теореме IV числа $f(\alpha)$ трансцендентны.

К настоящему времени опубликовано большое количество работ, связанных с методом Малера, в том числе монография К. Нишиоки[16].

## Содержание диссертации

### Глава 1. Некоторые свойства гипергеометрических функций

Приведем формулировки теорем, доказанных в диссертации.

Пусть $\mathbb{K}$ — алгебраическое числовое поле степени $\varkappa$. Следующее определение обобщает определение E-функции.

**Определение 3.** *Будем говорить, что функция*

$$f(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \frac{z^\nu}{\nu!}\,,\quad a_\nu\in\mathbb{K}\,, \tag{17}$$

*принадлежит классу $E_\tau$, $\tau\geq 0$, если для любого положительного числа $\varepsilon$*

$$1)\quad \overline{|a_\nu|}=O\left(\nu^{\varepsilon\nu}\right);$$

2) *существует последовательность отличных от нуля чисел $q_n\in\mathbb{Z}_K$, такая, что*

$$q_n a_\nu\in\mathbb{Z}_K,\quad n=0,\,1,\ldots;\quad \nu=\overline{0,\,n}\,,$$

*и норма этих чисел*

$$N_{\mathbb{K}}(q_n)=O\left(n^{\varkappa(\tau+\varepsilon)n}\right).$$

**Определение 4.** *Функция (17) в точности принадлежит классу $E_\tau$, если она принадлежит классу $E_\tau$ и не принадлежит никакому классу $E_{\tau_1}$ при $0\leq\tau_1<\tau$.*

Класс $E_0$ совпадает с классом E-функций. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{[\lambda_1+1,\nu]\cdots[\lambda_m+1,\,\nu]}\left(\frac{z}{m}\right)^{m\nu}, \tag{18}$$

$$[\lambda+1,\,\nu]=(\lambda+1)\cdots(\lambda+\nu),\quad [\lambda+1,\,0]=1.$$

Эта функция является решением дифференциального уравнения

$$(\delta+m\lambda_1)\cdots(\delta+m\lambda_m)y=z^m y+m^m\lambda_1\cdots\lambda_m\,,\quad \delta=z\frac{d}{d\,z}\,.$$

[16] Nishioka K. Mahler functions and transcendence// Lect. Notes in Math. 1996. — V. 1631

**Теорема 1.** *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — алгебраические числа, отличные от $-1, -2, \ldots$, степеней соответственно $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$. Тогда функция (18) $\varphi(z)$ в точности принадлежит классу $E_\tau$ при*

$$\tau = 1 - \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{m\varkappa_j}\,. \tag{19}$$

**Следствие 1.** *Если не все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ являются рациональными, то функция $\varphi(z)$ не является E-функцией.*

Исследуется также, к какому классу в точности принадлежит функция Куммера

$$f(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(a_1+1)\cdots(a_1+\nu)}{(a_2+1)\cdots(a_2+\nu)}\,\frac{z^\nu}{\nu!} \tag{20}$$

при условии, что $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(a_1, a_2)$ – квадратичное поле.

Пусть $\omega$ – квадратичная иррациональность, $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\omega)$, $\deg \mathbb{K} = 2$,

$$a_1 = u_1 + v_1\omega, \quad a_2 = u_2 + v_2\omega, \quad u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{Q}.$$

При $v_1 = v_2 = 0$ функция (20) является E-функцией, поэтому будем считать, что $|v_1| + |v_2| > 0$. За счет выбора числа $\omega$ можно обеспечить, чтобы

$$v_1, v_2 \in \mathbb{Z},\ (v_1, v_2) = 1\,.$$

**Теорема 2.** *Функция Куммера* (20) *в точности принадлежит классу $E_{1/2}$ в следующих случаях:*

*1) при $v_1 > v_2 \quad (v_1 > 0)$;*

*2) при $u_1v_2 - u_2v_1 \notin \mathbb{Z}$;*

*3) при $v_1 = v_2 > 0$ и $u_1 - u_2 \notin \mathbb{Z}^+$;*

*4) при $v_1v_2 \le 0, \quad |v_1| + |v_2| > 0$.*

*При $v_2 > v_1 > 0, \quad u_1v_2 - u_2v_1 \in \mathbb{Z}$ функция $f(z)$ в точности принадлежит классу $E_\tau$ при*

$$\tau = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{v_2}\right).$$

*При $v_1 = v_2 > 0, \quad u_1 - u_2 \in \mathbb{Z}^+$, а также при $v_1 = v_2 = 0$ функция $f(z)$ является E-функцией.*

Общий случай при $\deg \mathbb{Q}(a_1, a_2) = 2$ сводится за счет выбора $\omega$ к какому-либо из описанных случаев.

Следующая теорема устанавливает необходимое и достаточное условие того, чтобы общая гипергеометрическая функция являлась E-функцией.

Введем следующее

**Определение 5.** *Будем говорить, что две системы чисел* $(a_1, \ldots, a_u)$ *и* $(b_1, \ldots, b_v)$ *удовлетворяют условию E, если либо все числа* $a_j$, $b_k$ *рациональные, либо существует такое разбиение всех тех из этих чисел, которые не являются рациональными, на пары*

$$(a_{j_1}, b_{k_1}), \ldots, (a_{j_r}, b_{k_r}),$$

*что все разности* $a_{j_s} - b_{k_s}$, $\quad s = \overline{1, r}$, *— неотрицательные целые рациональные числа.*

**Теорема 3.** *Для того, чтобы функция (9) с комплексными параметрами* $a_1, \ldots, a_u;\ b_1, \ldots, b_v$, *отличными от* $-1, -2, \ldots$, *и такими, что*

$$a_j \neq b_k, \quad j = \overline{1, u};\ k = \overline{1, v},$$

*была E-функцией, необходимо и достаточно, чтобы все числа* $a_j, b_k$ *были алгебраическими и чтобы системы чисел* $(a_1, \ldots, a_u)$ *и* $(b_1, \ldots, b_v)$ *удовлетворяли условию E.*

Эта теорема фактически показывает, что во всех "нетривиальных" случаях функция (9) не является E-функцией.

Аналогичное утверждение справедливо для G-функций.

**Теорема 4.** *Пусть* $a_1, \ldots, a_v;\ b_1, \ldots, b_v$, *— комплексные числа, отличные от* $-1, -2, \ldots$, *и такие, что*

$$a_j \neq b_k, \quad j, k = \overline{1, v}.$$

*Тогда для того, чтобы функция*

$$g(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{[a_1 + 1, \nu] \cdots [a_v + 1, \nu]}{[b_1 + 1, \nu] \cdots [b_v + 1, \nu]} z^{\nu}, \quad b_j \neq -1, -2, \ldots,$$

*была G-функцией необходимо и достаточно, чтобы все числа* $a_j$, $b_k$ *были алгебраическими и чтобы системы чисел* $(a_1, \ldots, a_v)$ *и* $(b_1, \ldots, b_v)$ *удовлетворяли условию E.*

Для установления линейной независимости значений функций обычно приходится доказывать линейную независимость самих функций над полем рациональных функций. В следующих двух теоремах устанавливается линейная независимость общих гипергеометрических функций, которые удобно записать в виде

$$\psi_j(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a_j(x)}{b_j(x)}, \quad j = \overline{1,\, t}, \tag{21}$$

где $a_j(x),\ b_j(x)$ — многочлены с комплексными коэффициентами,

$$m_j = \deg b_j(x) \geq \deg a_j(x), \quad m_j \geq 1, \quad b_j(x) \neq 0 \text{ при } x = 1,\, 2, \ldots .$$

Функция $\psi_j(z)$ является решением линейного дифференциального уравнения

$$U_j: \quad b_j(\delta) y_j = a_j(\delta) z y_j + b_j(0), \quad \delta = z\frac{d}{d\,z}\,. \tag{22}$$

**Теорема 5.** *Пусть выполняются следующие условия.*

*(A) Для каждого индекса $j$, $1 \leq j \leq t$, и любого $c \in \mathbb{Z}$ два многочлена $a_j(x)$ и $b_j(x+c)$ взаимно просты.*

*(B) Для любых двух многочленов*

$$a_k(x) b_l(x) = c(x+\lambda_1)\cdots(x+\lambda_N), \quad a_l(x) b_k(x), \quad 1 \leq k < l \leq t,$$

*при любом наборе целых рациональных чисел $c_1, \ldots, c_N$*

$$c(x+\lambda_1+c_1)\cdots(x+\lambda_N+c_N) \not\equiv a_l(x) b_k(x).$$

*Далее, пусть $y_j(z)$ — произвольное решение уравнения $U_j$ из (22) при $j = \overline{1,\, t}$, не принадлежащее кольцу $\mathbb{C}[z,\, z^{-1}]$.*

*Тогда совокупность функций*

$$1,\, y_j^{(s)}(z), \quad j = \overline{1,\, t};\ s = \overline{0,\, m_j - 1},$$

*линейно независима над полем $\mathbb{C}(z)$.*

**Теорема 6.** *Пусть в равенстве (21)*

$$m_j = \deg b_j(x) > \deg a_j(x)\,.$$

*Тогда для того, чтобы функции*

$$1,\, \psi_j^{(s)}(z), \quad j = \overline{1,\, t};\ s = \overline{0,\, m_j - 1}, \tag{23}$$

*были линейно независимы над полем $\mathbb{C}(z)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$1)\ m_j \geq 1, \quad a_j(x)b_j(x) \neq 0 \quad \textit{при} \quad x = 1, 2, \ldots; \quad j = \overline{1,\, t};$$

2) *выполнялось условие (B) теоремы 5;*

3) *выполнялось следующее условие:*

*(C) для каждого индекса $j$, $1 \leq j \leq t$, и любого $c \in \mathbb{Z}^+$ два многочлена $a_j(x)$ и $b_j(x+c)$ взаимно просты.*

Заметим, что в теореме 5 условие (A) нельзя заменить на более слабое условие (C).

**Пример 4.** *Уравнению*

$$\delta(\delta+\lambda)y = (\delta+\lambda-1)zy, \quad \delta = z\frac{d}{d\,z}\,, \quad \lambda \notin \mathbb{Z},$$

*удовлетворяет функция $z^{-\lambda} \notin \mathbb{C}(z)$, однако она линейно зависима со своей производной над $\mathbb{C}(z)$.*

Рассмотрим функции более частного вида, чем (21),

$$\psi_j(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} z^{\nu} \left( \prod_{x=1}^{\nu} g_j(x) \right)^{-1}, \ g_j(x) \in \mathbb{C}[x], \ m_j = \deg g_j(x) \geq 1. \quad (24)$$

Для этих функций сформулируем два следствия из теоремы 6.

**Следствие 2.** *Пусть $\psi_1(z), \ldots, \psi_t(z)$ — функции (24). Тогда функции (23) линейно независимы над полем $\mathbb{C}(z)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие (B).*

**Следствие 3.** *Пусть $\psi(z)$ — функция вида (11) с $g_m = 1$, $\omega_1, \ldots, \omega_t$ — различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда функции*

$$1,\, \psi^{(s)}(\omega_j z), \quad j = \overline{1,\, t};\ s = \overline{0,\, m-1},$$

*линейно независимы над полем $\mathbb{C}(z)$.*

Заметим, что теоремы 1 и 6 этой главы применяются при доказательствах некоторых последующих результатов диссертации.

## Глава 2. Оценки снизу линейных форм

Пусть $\mathbb{I}$ — поле рациональных чисел или мнимое квадратичное поле. В следующих двух теоремах устанавливаются оценки линейных форм от значений функции (11) и ее производных в нескольких точках поля $\mathbb{I}$, а также изучается характер их совместных приближений числами из $\mathbb{I}$.

**Теорема 7.** *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — рациональные числа, отличные от $-1, -2, \ldots$; $\omega_1, \ldots, \omega_t$ — попарно различные и отличные от нуля числа из поля $\mathbb{I}$, $g(x) = (x+\lambda_1)\cdots(x+\lambda_m)$. Пусть $\psi(z)$ — функция (11).*

*Тогда для любого ненулевого набора*

$$h_0,\ h_{js},\quad j=\overline{1,\,t};\ s=\overline{0,\ m-1}\,,$$

*целых чисел из поля $\mathbb{I}$, по модулю не превосходящих $H$, при $H \geq 3$ выполняется неравенство*

$$\left| h_0 + \sum_{j=1}^{t}\sum_{s=0}^{m-1} h_{js}\psi^{(s)}(\omega_j) \right| > H^{\,-mt-\frac{\gamma_1}{\ln\ln H}}, \tag{25}$$

*и для любого набора $q,\ p_{js}$ целых чисел из поля $\mathbb{I}$ при $|q| \geq 3$ выполняется неравенсто*

$$\max_{j=\overline{1,t};\ s=\overline{0,m-1}} \left| \psi^{(s)}(\omega_j) - \frac{p_{js}}{q} \right| > |q|^{\,-1-\frac{1}{mt}-\frac{\gamma_2}{\ln\ln|q|}}\,,$$

*где $\gamma_1$ и $\gamma_2$ — эффективно вычисляемые положительные постоянные, зависящие только от $\lambda_1, \ldots, \lambda_m;\ \omega_1, \ldots, \omega_t$.*

**Теорема 8.** *Пусть $g(x) = x^m + g_{m-1}x^{m-1} + \cdots + g_1 x \in \mathbb{I}[x]$, причем $g(x) \neq 0$ при $x = 1, 2, \ldots$; $\omega_1, \ldots, \omega_t$ — попарно различные и отличные от нуля числа из поля $\mathbb{I}$.*

*Тогда для любого ненулевого набора $h_{js}$, $j=\overline{1,\,t};\ s=\overline{0,\ m-1}$, целых чисел из поля $I$, по модулю не превосходящих $H$, при $H \geq 3$ выполняется неравенство*

$$\left| \sum_{j=1}^{t}\sum_{s=0}^{m-1} h_{js}\psi^{(s)}(\omega_j) \right| > H^{\,1-mt-\frac{\gamma_1}{\ln\ln H}}\,, \tag{26}$$

*и для любого набора $q,\ p_{js}$ целых чисел из поля $\mathbb{I}$ при любой паре индексов $(u,\,v)$, $1 \leq u \leq t;\ 0 \leq v \leq m-1$ с $(s,\,j) \neq (u,\,v)$ и при $|q| \geq 3$ и $mt > 1$*

*выполняется неравенсто*

$$\max_{j=\overline{1,t};\ s=\overline{0,m-1};\ (s,j)\neq(u,v)} \left| \frac{\psi^{(s)}(\omega_j)}{\psi^{(u)}(\omega_v)} - \frac{p_{js}}{q} \right| > |q|^{-1-\frac{1}{mt-1}-\frac{\gamma_2}{\ln\ln|q|}},$$

*где* $\gamma_1$ *и* $\gamma_2$ *— эффективно вычисляемые положительные постоянные, зависящие только от* $g_1, \ldots, g_{m-1};\ \omega_1, \ldots, \omega_t$.

Указанные оценки получены за счет эффективного построения аппроксимаций типа Паде к соответствующим функциям. Эти оценки могут быть улучшены только за счет присутствующих в показателях величин порядков $O\left(\frac{1}{\ln\ln H}\right)$ и $O\left(\frac{1}{\ln\ln|q|}\right)$.

Оценка линейной формы (25) может быть выведена из теоремы Шидловского I, но с остаточным членом порядка $O\left(\frac{1}{\sqrt{\ln\ln H}}\right)$.

Однако теорема I не применима к оценке однородной линейной формы (26), так как по следствию 1 из теоремы 1 функция $\psi(z^m)$ не является E-функцией, если только не все корни многочлена $g(x)$ рациональны.

Линейные формы (26) можно оценить по теореме Осгуда II, но тогда, вместо величины $\frac{\gamma_1}{\ln\ln H}$, будет присутствовать произвольное $\varepsilon > 0$ и все числа $\omega_j$ должны быть рациональными.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — алгебраические числа, отличные от $-1, -2, \ldots$, степеней соответственно $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$, число $\tau$ определено посредством равенства (19). Справедлива следующая

**Теорема 9.** *Пусть* $\mathbb{K}$ *— алгебраическое числовое поле степени* $\varkappa$ *над полем* $\mathbb{I}$ *и в равенстве (11)*

$$g(x) = (x+\lambda_1)\cdots(x+\lambda_m) = x^m + g_{m-1}x^{m-1} + \cdots + g_1 x + g_0 \in \mathbb{K}[x];$$

$\omega_1, \ldots, \omega_t$ *— попарно различные и отличные от нуля числа из поля* $\mathbb{K}$, *причем* $mt > \varkappa + \varkappa\tau - 1$.

*Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Для произвольного* $\varepsilon > 0$ *и любого набора*

$$q,\ p_{j,s}, \quad j = \overline{1,\,t}; \quad s = \overline{0,\,m-1},$$

*целых чисел из поля* $\mathbb{K}$ *при* $q \neq 0$ *и* $P = \max_{j,s}(\overline{|q|},\ \overline{|p_{j,s}|})$ *справедливо неравенство*

$$\max_{j=\overline{1,t},\ s=\overline{0,m-1}} \left| \psi^{(s)}(\omega_j) - \frac{p_{j,s}}{q} \right| > C\left(|q|P^{\varkappa-1}\right)^{-\frac{mt+1+\varepsilon}{mt-\varkappa-\varkappa\tau+1}},$$

*где* $C = C(\varepsilon, \lambda_1, \dots, \lambda_m, \omega_1, \dots, \omega_t) > 0$.

2) *Среди чисел*

$$\psi^{(s)}(\omega_j), \quad j = \overline{1, t}; \quad s = \overline{0, m-1},$$

*существует не менее* $(mt+1)\varkappa^{-1} - \tau - 1$ *чисел, линейно независимых вместе с числом* 1 *над полем* $\mathbb{K}$.

В некоторых случаях удается получить оценки с лучшими остаточными членами по сравнению с теоремами 7 и 8.

**Теорема 10.** *При любых целых числах* $b, p, q$ *из поля* $\mathbb{I}$ *при* $bq \neq 0$ *выполняется неравенство*

$$\left| e^{\frac{1}{b}} - \frac{p}{q} \right| > \frac{0,001 \ln\ln(|q|+2)}{|bq^2| \ln(|q|+2)}\,.$$

При $\mathbb{I} = \mathbb{Q}$ подобная оценка следует из характера разложения числа $e^{\frac{1}{b}}$ в цепную дробь и результатов статьи В. Адамса[17] (лемма 11 и следствие 10).

**Теорема 11.** *Пусть многочлен*

$$g(x) = x^m + g_{m-1}x^{m-1} + \dots + g_1 x \in \mathbb{Z}_I[x],\ g = \max(|g_1|, \dots, |g_{m-1}|),$$

$m \geq 2, \quad g(x) \neq 0$ *при* $x = 1, 2, \dots$.

*Тогда для любого набора* $b, h_1, \dots, h_m$ *целых чисел из поля* $\mathbb{I}$ *при* $b \neq 0$, $0 < \max_{j=\overline{1,m}} |h_j| \leq H$ *и* $H \geq 3$ *справедлива оценка*

$$\left| h_0\psi\left(\frac{1}{b}\right) + h_1\psi'\left(\frac{1}{b}\right) + \dots + h_{m-1}\psi^{(m-1)}\left(\frac{1}{b}\right) \right| >$$
$$> (|b|H)^{1-m}(\ln H)^{-\gamma_1}\,,$$

*и для любых целых чисел* $q, p_1, \dots, p_m;\quad |q| \geq 3$, *из поля* $\mathbb{I}$ *при каждом индексе* $u$, $0 \leq u \leq m-1$, *выполняется неравенство*

$$\max_{s=\overline{1, m-1},\, s\neq u} \left| \frac{\psi^{(s)}(1/b)}{\psi^{(u)}(1/b)} - \frac{p_s}{q} \right| > (|b||q|)^{-1-\frac{1}{m-1}}(\ln H)^{-\gamma_2},$$

*где постоянная* $\gamma_1$ *не зависит от* $b$ *и* $H$, *а постоянная* $\gamma_2$ — *от* $b$ *и* $q$.

[17] Adams W. Asymptotic diphantine approximations and Hurwitz numbers// Amer. J. Math. — 1967 — V. 89. — P. 1083 – 1108

Остаточный член в показателях в теоремах 7 и 8 порядка $O\left((\ln\ln H)^{-1}\right)$ в теореме 11 фактически заменен на величину порядка $O\left((\ln\ln H)(\ln H)^{-1}\right)$ .

## Глава 3. Точные по высоте оценки линейных форм

При некоторых дополнительных условиях удается получить оценки снизу линейных форм от значений гипергеометрических функций, которые лишь на постоянный множитель отличаются от соответствующих оценок сверху. В теореме 11 мы требовали, чтобы $g(x) \in \mathbb{Z}_I[x]$ . В следующей теореме будем предполагать, что все корни $g(x)$ лежат в поле $\mathbb{I}$ .

Пусть $\lambda_j = \alpha_j + i\beta_j \quad (j = \overline{1,\, s};\ \alpha_j,\ \beta_j \in \mathbb{R})$ — числа из поля $\mathbb{I}$, отличные от $-1, -2, \ldots;\quad a \in \mathbb{Z}_I,\ a \neq 0,$ — такое число, что $a\lambda_j \in \mathbb{Z}_I, \quad j = \overline{1,\, s}.$ Обозначим:

$$\begin{aligned}
&[\lambda+1,\,\nu] = (\lambda+1)\cdots(\lambda+\nu), \quad [\lambda+1,\,0] = 1,\\
&\psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{a^{m\nu}(\nu!)[\lambda_1+1,\nu]\cdots[\lambda_s+1,\,\nu]}\,, \quad m = s+1,\\
&\sigma_j = \{\alpha_j\}, \quad \mu_j = \sigma_j + i\beta_j, \quad j = \overline{1,\, s},
\end{aligned} \tag{27}$$

где $\{\alpha\}$ — дробная доля числа $\alpha$. Пусть числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ перенумерованы так, что

$$1 > \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_s \geq 0, \quad \sigma_0 = \sigma_s + 1.$$

Обозначим:

$$\Delta_j = \frac{j-1}{s} + \sigma_j - \frac{\sigma_1 + \cdots + \sigma_s}{s}\,, \quad \Delta = \min_{1\leq j\leq s} \Delta_j\,,\ \Lambda = \max_{1\leq j\leq s} \Delta_j\,.$$

Пусть $K(\mu_j)$ — кратность корня $\mu_j$ многочлена $g(x) = (x-\mu_1)\cdots(x-\mu_s)$,

$$r_l = \max_{\sigma_j=\sigma_l} K(\mu_j), \quad r = \min_{\Delta_l=\Delta} r_l,$$

где максимум берется только по тем индексам $j,\ 1 \leq j \leq s$, для которых $\sigma_j = \sigma_l$, а минимум — по тем $l$, для которых $\Delta_l = \Delta$. Аналогично вводятся величины

$$\begin{aligned}
&p = \max_{\Delta_l=\Delta} r_l, \quad \Delta_0 = \min_{\Delta_j\neq\Delta}(\Delta_j - \Delta), \quad \delta_0 = \min_{\Delta_j=\Delta}(\sigma_{j-1} - \sigma_j),\\
&\eta = \min\left(s\Delta_0\,,\ \delta_0/2\right)\,.
\end{aligned}$$

Легко проверить, что $\eta > 0$ .

**Определение 6.** *Линейную форму*

$$R = h_0\xi_0 + \cdots + h_s\xi_s, \quad h_k \in \mathbb{Z}_I,$$

*будем называть примитивной, если при любом* $c \in \mathbb{I}, \quad 0 < |c| < 1$, *не все числа* $h_k c, \quad k = \overline{0,\, s}$, *будут целыми в поле* $\mathbb{I}$.

**Теорема 12.** *Пусть* $b \in \mathbb{Z}_I, \quad b \neq 0$,

$$R = \sum_{k=0}^{s} h_k \psi^{(k)}\left(\frac{1}{b}\right); \quad h_k \in \mathbb{Z}_I\,; \quad \max_{0\le k\le s} |h_k| = H \ge 3; \tag{28}$$

$$\Phi(x) = x^{-s}(\ln x)^{-s(1-\Delta)}(\ln\ln x)^{s(r-\Delta)}\,,$$

$$\Omega_1(x) = x^{-s}(\ln x)^{-s(1-\Delta)}(\ln\ln x)^{s(p-\Delta)}, \quad \Omega_2(x) = x^{-s}(\ln x)^{\eta-s(1-\Delta)}.$$

*Тогда существуют эффективно вычисляемые положительные постоянные*

$$C_j = C_j(a,\, b,\, \lambda_1, \ldots, \lambda_s),\;\; \gamma = \gamma(\sigma_1, \ldots, \sigma_s,\, \beta_1, \ldots, \beta_s)$$

*такие, что справедливы следующие утверждения:*

1) *Для любой линейной формы вида (28) при любом* $H \ge 3$

$$|R| > C_1\Phi(H).$$

2) *Существует бесконечное количество форм (28), для которых*

$$|R| < C_2\Phi(H).$$

3) *Если* $R$ *— примитивная линейная форма вида (28) и* $|R| > C_3\Omega_1(H)$, *то*

$$|R| > C_4\Omega_2(H)(\ln\ln H)^{-\gamma}\,.$$

Доказательство теоремы 11 было опубликовано раньше, а теоремы 12 — позднее опубликования доказательства теоремы А.Н.Коробова III. Теореме Коробова в теореме 12 соответствует случай равномерного распределения чисел $\lambda_j$ :

$$\lambda_j = \lambda_1 - \frac{j-1}{s}\,,\; j = \overline{1,\, s\,;}\; \lambda_1 = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q}\,.$$

Метод доказательства теоремы 12 существенно отличается от методов доказательств предыдущих теорем. При доказательстве строится "достаточно плотная"последовательность линейных форм с верхними и нижними оценками, отличающимися лишь на постоянный множитель. Затем доказывается, что произвольная "достаточно малая"линейная форма пропорциональна одной из форм последовательности. После чего ее оценки следуют из оценок построенных форм.

Приведем пример на применение теоремы 12.

**Пример 5.** *Пусть*

$$\psi(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^{\nu}}{(\nu!)^{s+1}}\,.$$

*В этом примере*

$$\sigma_1 = \cdots = \sigma_s = 0,\ \Delta_j = \frac{j-1}{s}\,,\ \Delta = 0\,,\ r = s.$$

*Поэтому в теореме 12*

$$\Phi(x) = x^{-s}(\ln x)^{-s}(\ln\ln x)^{s^2}\,.$$

В следующей теореме устанавливаются столь же точные оценки для совместных приближений.

**Теорема 13.** *Пусть числа (27) $\mu_1, \ldots, \mu_s$ попарно различны;*

$$\omega(x) = x^{-1-\frac{1}{s}}\left(\frac{\ln\ln x}{\ln x}\right)^{\frac{1}{s}+\Lambda}, \quad \Lambda = \max_{j=\overline{1,\,s}} \Delta_j.$$

*Тогда существуют эффективно вычисляемые положительные постоянные $C_1$ и $C_2$, зависящие только от чисел $a$, $b$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$, такие, что для каждого индекса $k$, $0 \le k \le s$, справедливы следующие утверждения.*

1) *Для любых целых чисел $p, p_0, \ldots, p_s$ из поля $\mathbb{I}$ при $|p| \ge 3$ выполняется неравенство*

$$\varepsilon(k,\, \overline{p}) = \max_{j=\overline{1,\,s},\, j\ne k} \left|\psi^{(j)}\left(\frac{1}{b}\right) - \frac{p_j}{p}\psi^{(k)}\left(\frac{1}{b}\right)\right| > C_1\omega(|p|)\,.$$

2) *Существует бесконечное количество наборов чисел $p, p_0, \ldots, p_s$ из $\mathbb{Z}_I$, для которых*

$$\varepsilon(k,\, \overline{p}) < C_2\omega(|p|)\,.$$

## Глава 4. Некоторые приложения метода Зигеля-Шидловского (E-функции, G-функции, гипергеометрические функции)

**Теорема 14.** *Пусть $f_1(z), \dots, f_s(z)$ — совокупность E-функций с коэффициентами из алгебраического числового поля $\mathbb{K}$, составляющая решение системы линейных дифференциальных уравнений (3), $\alpha$ — алгебраическое число, отличное от нуля и от полюсов всех коэффициентов $Q_{ij}(z)$ системы (3),*

$$\varkappa = [\mathbb{K}(\alpha) : \mathbb{I}] \geq 2.$$

*Тогда для любого многочлена $P(x_1, \dots, x_s) \in \mathbb{Z}_K[x_1, \dots, x_s]$ или*

$$P(f_1(\alpha), \dots, f_s(\alpha)) = 0,$$

*или выполняется неравенство*

$$\left|P(f_1(\alpha), \dots, f_s(\alpha))\right| > CH^{-\gamma\varkappa^{l+1}d^l}, \tag{29}$$

*где $d$ и $H$ — соответственно степень и максимум модулей коэффициентов и сопряженных им чисел многочлена $P$, $l$ — количество алгебраически независимых над полем $\mathbb{C}(z)$ функций в наборе $f_1(z), \dots, f_s(z)$ $(1 \leq l \leq s)$, $C$ и $\gamma$ — положительные постоянные, причем $C$ зависит только от $d$, $\alpha$, функций $f_1(z), \dots, f_s(z)$, а $\gamma$ — только от функций $f_1(z), \dots, f_s(z)$ (точнее: от характера алгебраических связей между этими функциями).*

Оценка (29) была доказана А.Б. Шидловским[18] в §6 главы 12, однако при более сильном предположении о том, что отличны от нуля все величины, полученные заменами в многочлене $P(f_1(\alpha), \dots, f_s(\alpha))$ всех коэффициентов, числа $\alpha$ и коэффициентов рядов, определяющих E-функции, на сопряженные им числа в поле $\mathbb{K}$. В теореме 9 из той же главы оценка (29) установлена в предположении, что степень трансцендентности функций $f_1(z), \dots, f_s(z)$ над полем $\mathbb{C}(z)$ такая же, как над полем $\mathbb{C}$.

Способ доказательства этой теоремы отличен от ранее известных методов получения количественных результатов.

**Определение 7.** *Высотой многочлена называется максимум модулей его коэффициентов, длиной — сумма модулей коэффициентов. Высотой $h(\theta)$, длиной $l(\theta)$ и степенью $\deg\theta$ алгебраического числа $\theta$ называются соответственно высота, длина и степень его канонического многочлена.*

[18] Шидловский А.Б. Трансцендентные числа. М.: Наука, 1987

**Теорема 15.** *Пусть совокупность E-функций* $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ *составляет решение системы дифференциальных уравнений (3), а* $\zeta$ *— комплексное число, удовлетворяющее уравнению*

$$P(z,\, f_1(z),\, \ldots, f_s(z)) = 0,$$

*где* $P(x_0, x_1, \ldots, x_s)$ *— многочлен с алгебраическими коэффициентами, такой, что*

$$P(z,\, f_1(z),\, \ldots, f_s(z)) \not\equiv 0\,.$$

*Тогда для любых положительных чисел* $\varkappa$ *и* $\varepsilon$ *система неравенств*

$$|\zeta - \theta| < \exp\left(-(h(\theta))^{\varepsilon}\right), \quad \deg\theta \le \varkappa \tag{30}$$

*имеет конечное число решений в алгебраических числах* $\theta$.

Теорема применима, в частности, к алгебраическим точкам E-функций.

Если E-функции $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ алгебраически независимы, то при некоторых естественных условиях из теоремы Шидловского следует, что число $\zeta$ трансцендентно. Однако никаких количественных результатов известно не было.

**Следствие 4.** *Пусть E-функции* $f_1(z), \ldots, f_l(z)$ *алгебраически независимы над полем* $\mathbb{C}(z)$ *и вместе с E-функциями* $f_{l+1}(z), \ldots, f_s(z)$ *составляют решение системы (3),* $\zeta \in \mathbb{C}$, *и при некоторых положительных величинах* $\varepsilon$ *и* $\varkappa$ *система неравенств (30) имеет бесконечное число решений в алгебраических числах* $\theta$.

*Тогда числа* $\zeta,\ f_1(\zeta), \ldots, f_l(\zeta)$ *алгебраически независимы.*

Заметим, что при $l = 1$ условие алгебраической независимости E-функций эквивалентно тому, что E-функция $f_1(z)$ не является многочленом.

**Следствие 5.** *Пусть E-функции* $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ *удовлетворяют условиям теоремы;* $\zeta$ *— такое комплексное число, что при некоторых положительных величинах* $\varepsilon$ *и* $\varkappa$ *система неравенств (30) имеет бесконечное число решений в алгебраических числах* $\theta$. *Пусть* $A(z,\, f_1(z), \ldots, f_s(z))$ *и* $B(z,\, f_1(z), \ldots, f_s(z)) \not\equiv 0$ *— многочлены с алгебраическими коэффициентами от величин* $z,\ f_1(z), \ldots, f_s(z)$, *причем функция*

$$F(z) = \frac{A(z,\, f_1(z), \ldots, f_s(z))}{B(z,\, f_1(z), \ldots, f_s(z))} \notin \mathbb{C}(z).$$

*Тогда числа* $\zeta$ *и* $F(\zeta)$ *алгебраически независимы.*

Пусть функция $\psi(z)$ задана посредством равенства (11). Если не все корни многочлена $g(x)$ — рациональные числа, то по следствию 1 из теоремы 1 функция $\psi(z^m)$ не является E-функцией, и к ней не применима теорема Шидловского I. Тем не менее, при определенных условиях удается использовать некоторые идеи метода Зигеля-Шидловского и получить оценки линейных форм от значений таких функций.

**Теорема 16.** *Пусть в равенствах (24)*

$$\begin{aligned} &g_j(x) = p_j(x)p(x) \in \mathbb{I}[x], \quad g_j(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x = 1, 2, \ldots, \\ &\deg p_1(x) = \cdots = \deg p_t(x) = u, \quad \deg p(x) = v, \quad m = u + v \geq 1\,, \end{aligned}$$

*причем все корни многочленов $p_j(x)$, $\quad j = \overline{1,\,t}$, — рациональные числа и выполняется условие (B) теоремы 5. Далее, пусть*

$$h_0,\, h_{js}, \quad j = \overline{1,\,t};\ s = \overline{0,\,m-1},$$

*— произвольный набор чисел из $\mathbb{Z}_I$ с*

$$H = \max_{j,\,s}(|h_0,\, |h_{js}|) \geq 3.$$

*Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Для любого положительного числа $\varepsilon$ при*

$$H > H_0(\varepsilon,\, g_1(x), \ldots, g_t(x))$$

*выполняется неравенство*

$$\left| h_0 + \sum_{j=1}^{t} \sum_{s=0}^{m-1} h_{js} \psi_j^{(s)}(1) \right| > H^{-\frac{mt+\tau+\varepsilon}{1-\tau}}\,,$$

*где*

$$\tau = \frac{v}{m} - \frac{1}{m\varkappa_1} - \cdots - \frac{1}{m\varkappa_v}\,,$$

*а $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_v$ — степени алгебраических чисел, являющимися корнями многочлена $p(x)$.*

2) *Если $p(0) = 0$, и $mt \geq 2$, то*

$$\left| \sum_{j=1}^{t} \sum_{s=0}^{m-1} h_{js} \psi^{(s)}(1) \right| > H^{\,1-mt-\frac{\gamma}{\sqrt{\ln\ln H}}}\,,$$

*где постоянная $\gamma$ не зависит от $H$.*

Заметим, что число 1 в теореме можно заменить на любое число $\omega \in \mathbb{I}$, $\omega \neq 0$. Для этого достаточно многочлен $p(x)$ заменить на $\omega p(x)$.

**Следствие 6.** *Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — алгебраические числа, отличные от $-1, -2, \ldots,$ степеней соответственно $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$; $\omega_1, \ldots, \omega_t$ — попарно различные и отличные от нуля числа из поля $\mathbb{I}$,*

$$g(x) = (x + \lambda_1) \cdots (x + \lambda_m) \in \mathbb{I}[x].$$

*Пусть $\psi(z)$ — функция (11), а $\tau$ — число, определенное посредством равенства (19).*

*Тогда для любого ненулевого набора*

$$h_0,\ h_{js}, \quad j = \overline{1,\, t};\ s = \overline{0,\ m-1}\,,$$

*целых чисел из поля $\mathbb{I}$, по модулю не превосходящих $H$, при*

$$H > H_0(\varepsilon,\, \lambda_1, \ldots, \lambda_m,\ \omega_1, \ldots, \omega_t)$$

*выполняется неравенство*

$$\left| h_0 + \sum_{j=1}^{t} \sum_{s=0}^{m-1} h_{js} \psi^{(s)}(\omega_j) \right| > H^{-\frac{mt+\tau+\varepsilon}{1-\tau}}.$$

Приведем два примера применения следствия 6.

**Пример 6.** *Пусть $\varphi_\lambda(z)$ — функция (10);*

$$\lambda,\ \omega \in \mathbb{I}; \quad \lambda \neq -1, -2, \ldots; \quad \omega \neq 0.$$

*Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любых чисел $p,\ q \in \mathbb{Z}_I$ при $|q| > q_0(\varepsilon,\, \lambda,\, \omega)$ выполняется неравенство*

$$\left| \varphi_\lambda(\omega) - \frac{p}{q} \right| > |q|^{-4-\varepsilon}.$$

**Пример 7.** *Рассмотрим функцию*

$$f(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{(\lambda + 1^2) \cdots (\lambda + \nu^2)}, \quad \lambda \in \mathbb{Q}, \quad \lambda > 0.$$

*Пусть $\omega \neq 0$ — рациональное число,*

$$H = \max(|h_0|,\, |h_1|,\, |h_2|) > H_0(\varepsilon,\, \lambda,\, \omega)\,.$$

*Тогда выполняется неравенство*

$$\bigl|h_0 + h_1 f(\omega) + h_2 f\,'(\omega)\bigr| > H^{-5-\varepsilon}\,.$$

Ранее не была доказана даже иррациональность чисел $f(\omega)$ и $f\,'(\omega)$.

Далее в диссертации при некоторых дополнительных условиях устанавливаются оценки многочленов от значений G-функций в достаточно малых точках. В этих оценках величина (8) $q_0$ не зависит от $H$, поэтому устанавливается, в частности, иррациональность значений соответствующих G-функций.

Нам понадобится уточнить определение G-функций.

**Определение 8.** *Будем говорить, что совокупность функций*

$$f_i(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{i\,\nu} z^{\nu}\,, \quad i = \overline{1,\, s}\,,$$

*принадлежит классу $G(\mathbb{K}\,, C\,, Q)$, где $C \geq 1$, $Q \geq 1$, если все коэффициенты $a_{i\,\nu}$ принадлежат алгебраическому полю $\mathbb{K}$ конечной степени и для любых чисел $C_1 > C$ и $Q_1 > Q$ существуют постоянные $\gamma_1$ и $\gamma_2$, зависящие только от $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ и соответственно от $C_1$ и $Q_1$, такие, что*

$$1)\ \overline{|a_{i\,\nu}|} < \gamma_1 C_1^{\nu}\,, \quad i = \overline{1,\, s};\ \nu = 0,\, 1, \ldots;$$

2) *существуют натуральные числа $q_n$, $n = 0,\, 1, \ldots$, такие, что все числа*

$$q_n a_{i\,\nu} \in \mathbb{Z}_K\,, \quad i = \overline{1,\, s};\ \nu = \overline{0,\, n},$$

*и*

$$q_n < \gamma_2 Q_1^{n}\,, \quad n = 0,\, 1, \ldots\,.$$

Пусть совокупность G-функций $f_1(z), \ldots, f_s(z)$ удовлетворяет системе линейных дифференциальных уравнений (3). Тогда

$$y_i^{(k)} = Q_{ki0}(z) + \sum_{j=1}^{s} Q_{kij}(z) y_j\,; \quad Q_{kij}(z) \in \mathbb{K}(z)\,;$$
$$i = \overline{1,\, s}; \quad k = 1,\, 2, \ldots\,.$$

**Определение 9.** *Будем говорить, что совокупность $G$-функций $f_1(z),\ldots,f_s(z)$ из класса $G(\mathbb{K}\,,C\,,Q)$, составляющих решение системы линейных дифференциальных уравнений (3), принадлежит подклассу $G(\mathbb{K}\,,C\,,Q\,,\Lambda)$, где $\Lambda\ \ge\ 1$, если существует ненулевой многочлен $T(z)\in\mathbb{Z}_K[z]$ и натуральные числа $a_n$, $n=1,\,2\,,\ldots$, такие, что все функции*

$$\frac{a_n}{k!}(T(z))^kQ_{k\,i\,j}(z)\in\mathbb{Z}_K[z]\,,\quad k=\overline{1,\,n}\,, \tag{31}$$

*и для любого $\Lambda_1>\Lambda$ существует постоянная $\gamma_3$, зависящая только от функций $f_1(z),\ldots,f_s(z)$ и числа $\Lambda_1$, такая, что*

$$a_n<\gamma_3\Lambda_1^n\,,\quad n=1,\,2,\ldots\,. \tag{32}$$

*Условие, заданное соотношениями (31) и (32), будем называть также условием сокращения факториалов.*

**Пример 8.** *Поскольку общее наименьшее кратное чисел $1,\,2,\ldots,n$ растет как $e^{(1+o(1))n}$, то функция $\ln(1\,+\,z)$ принадлежит подклассу $G(\mathbb{Q},\,1,\,e,\,e)$.*

В теоремах 17 и 18 диссертации установлены оценки многочленов от значений функций из подкласса $G(\mathbb{K}\,,C\,,Q\,,\Lambda)$. Однако величины постоянных, присутствующих в формулировках этих теорем, имеют достаточно громоздкие записи. Поэтому приведем только два непосредственных следствия из этих теорем. В диссертации также сформулированы эти следствия.

**Следствие 7.** *Пусть $G$-функции $f_1(z),\ldots,f_s(z)$ алгебраически независимы над полем $\mathbb{C}(z)$, удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений (3) и для них выполняется условие сокращения факториалов, $\alpha$ — не равное нулю алгебраическое число.*

*Тогда существует число $q_0(d,\,\alpha,\,f_1(z),\ldots,f_s(z))$, такое, что при любом натуральном числе $q>q_0$ числа $f_1\,(\alpha/q)\,,\ldots,f_s\,(\alpha/q)$ не связаны никаким алгебраическим уравнением с рациональными коэффициентами степени, не превосходящей $d$.*

**Следствие 8.** *Пусть $G$-функции $f_1(z),\ldots,f_s(z)$ с коэффициентами $a_{i\,\nu}$ из поля $\mathbb{I}$ линейно независимы над полем $\mathbb{C}(z)$, удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений (3) и для них выполняется условие сокращения факториалов, $0\neq\alpha\in\mathbb{I}$.*

*Тогда для любого положительного числа $\varepsilon$ существует такое число $q_0(\varepsilon,\,\alpha)$, что при любом натуральном числе $q > q_0(\varepsilon,\,\alpha)$ и любых числах $h_0, \ldots, h_s$ из $\mathbb{Z}_I$ при*

$$H = \max_j |h_j| > H_0(\varepsilon,\,\alpha,\,q)$$

*выполняется неравенство*

$$\left| h_0 + h_1 f_1\left(\frac{\alpha}{q}\right) + \cdots + h_s f_s\left(\frac{\alpha}{q}\right) \right| > H^{-s-\varepsilon}\,. \qquad (33)$$

Оценка (33) может быть улучшена только за счет числа $\varepsilon$.

**Пример 9.** *Следствия применимы к значениям $G$-функций $\ln(1+\alpha_i z)$, $i = \overline{1,\,s}$, при алгебраических значениях $\alpha_i$. В частности, с их помощью устанавливается, что при любом достаточно большом натуральном $q$ число $\ln(1-1/q)\ln(1+1/q)$ иррационально и линейно независимо над полем $\mathbb{Q}$ с числами $1$, $\ln(1-1/q)$, $\ln(1+1/q)$.*

## Глава 5. Количественные результаты в методе Малера

В следующей теореме устанавливается оценка многочлена от значения функции, удовлетворяющей уравнению Малера.

**Теорема 19.** *Пусть $f(z)$ — трансцендентная функция, представимая в виде ряда (12), сходящегося в круге $|z| < R$, и удовлетворяющая функциональному уравнению (13) с*

$$A_j(z,\,y) = a_{j1}(z)y + a_{j2}(z) \in \mathbb{Z}_K[z,\,y]\,, \quad j = 1,\,2\,.$$

*Пусть далее $\alpha$ — алгебраическое число, такое, что*

$$0 < |\alpha| < \min(1,\,R)\,;\; s = \deg \mathbb{K}(\alpha)\,;\; A_2\left(\alpha^{\rho^k}, f(\alpha^{\rho^k})\right) \neq 0\,,\; k = 0,\,1,\ldots\,.$$

*Тогда для любого положительного числа $\varepsilon$ и любого ненулевого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени, не превосходящей $d$ и высоты, не превосходящей $H$, при $H > H_0(d\,,\alpha,\,f(z))$ справедливо неравенство*

$$|P(f(\alpha))| > H^{-(4\gamma s^2\rho(\rho+1)+1+\varepsilon)d}\,, \quad \gamma = -\frac{\ln(l(\alpha))}{\varkappa_0 \ln|\alpha|}\,,$$

*где $\varkappa_0$ и $l(\alpha)$ — соответственно степень и длина алгебраического числа $\alpha$ (см. определение 7).*

До этого результата никаких оценок многочленов от значений функций, удовлетворяющих уравнениям Малера, известно не было. К.Малер[19], не приводя доказательства, утверждал, что такие значения не являются числами Лиувилля. М.Миньот[20] предполагал, что число

$$\xi = \sum_{\nu=0}^{\infty} 2^{-2^{\nu}},$$

являющееся значением функции (14), не является U-числом в классификации Малера (соответствующие определения можно найти, например, в обзорной статье[21]). Из теоремы 19 следует что числа $f(\alpha)$, удовлетворяющие ее условиям, являются S-числами. Ранее все известные примеры S-чисел были связаны со значениями E-функций в алгебраических точках. Теорема применима, например, к значениям функций (14) и (15).

Некоторые результаты удается получить и в случае, когда многочлены $A_j(x, y)$ нелинейные по $y$.

**Теорема 20.** *Пусть $f(z)$ — трансцендентная функция, представимая в виде ряда (12), сходящегося в круге $|z| < R$, и удовлетворяющая функциональному уравнению (13) с*

$$q = \max_{j=1,2} \deg_y A_j(z, y) < \rho\,.$$

*Пусть далее $\alpha$ $(0 < |\alpha| < \min(1, R))$ — алгебраическое число, такое, что все многочлены*

$$A_2\left(\alpha^{\rho^k}, f(\alpha^{\rho^k})\right) \neq 0\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots\,.$$

*Тогда для любого ненулевого многочлена $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ степени, не превосходящей $d$, и высоты, не превосходящей $H$, при $H > H_0(d)$ справедливо неравенство*

$$|P(f(\alpha))| > \exp\left(-C(\ln H)^{\mu}\right), \quad \mu = \frac{\ln \rho}{\ln \rho - \ln q},$$

*где постоянная $C$ не зависит от $H$.*

[19] Mahler K. Arithmetische Eigenschaften der Lösungen einer Klasse Funktionalgleichungen // Math. Ann. — 1929. — Bd. 101 — №4. — S. 342–366

[20] Micnotte M. Approximation des nombres par certaines suites de rationnels.// Seminare Delange–Pisot–Poiton (Theorie des nombres).— №16 — 1976–77 — pp 1–3

[21] Спринджук В.Г. Достижения и проблемы теории диофантовых приближений.//Успехи матем. наук — 1980 — Т. 35. — Вып. 4(214). — С. 3–68

Теорема применима, в частности, к значениям функции (16).

**Цель работы.** Дальнейшее развитие методов доказательства оценок линейных форм и многочленов от значений аналитических функций. Разработка эффективных конструкций аппроксимаций типа Паде для гипергеометрических функций. Исследования на этой основе арифметической природы значений таких функций. Исследование арифметических свойств значений E-функций и G-функций Зигеля на основе дальнейшего совершенствования и обобщения классического метода Зигеля–Шидловского. Применение развитых средств к исследованию значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами. Получение количественных результатов о мере трансцендентности значений аналитических функций, удовлетворяющих функциональным уравнениям определенного типа.

**Методы исследования.** В диссертации применяются различные методы теории трансцендентных чисел. В первой главе используется теория делимости в алгебраических числовых полях. Во второй и третьей главах используются новые конструкции аппроксимаций типа Паде, идущие от работ К.Малера. В четвертой главе применяется метод Зигеля–Шидловского с рядом усовершенствований, позволяющих в некоторых случаях устанавливать линейную независимость значений гипергеометрических функций с иррациональными параметрами. В пятой главе применяется метод Малера с некоторыми техническими модификациями.

**Научная новизна.** Все результаты диссертации являются новыми. Основные результаты диссертации состоят в следующем:

1. Доказано необходимое и достаточное условие принадлежности гипергеометрических функций классу E-функций .

2. Получены оценки линейных форм от значений гипергеометрических функций с параметрами из мнимого квадратичного поля.

3. Установлены оценки сверху и снизу линейных форм от значений гипергеометрических функций, отличающиеся друг от друга лишь на постоянный множитель.

4. Доказана алгебраическая независимость значений E-функций в некоторых точках, допускающих хорошие приближения алгебраическими числами. Получены оценки снизу многочленов от алгебраических точек E-функций.

5. Впервые получены оценки многочленов от значений G-функций в до-

статочно малой точке, в частности, установлена иррациональность некоторых значений G-функций.

6. Также впервые установлена оценка меры трансцендентности значений функций, возникающих в методе Малера.

**Практическая и теоретическая ценность.** Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты будут способствовать дальнейшему развитию теории диофантовых приближений и трансцендентных чисел.

**Апробация работы.** Результаты диссертации неоднократно докладывались (1974–2009 гг.) на научно-исследовательском семинаре по теории чисел на механико-математическом факультете МГУ, на международных конференциях по диофантовым приближениям в Обервольфахе (Германия) в 1990 и 1993 годах, на международной конференции "Трансцедентные числа"в Москве в 2000 году и на других международных конференциях. Вошедшие в диссертацию результаты излагались в лекционных курсах, которые ее автор читал в университетах городов Йокогама (Япония) в 1994 году и Оулу (Финляндия) в 1997 году.

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[20]. Совместных публикаций нет.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Работа изложена на 165 страницах Библиография включает 72 наименования.

**Работа выполнена при частичной поддержке** Международного научного фонда, грант MHS300.

## Основные публикации по теме диссертации (из официального Перечня ВАК)

1. Галочкин А.И. Оценки снизу многочленов от нескольких логарифмов алгебраических чисел, близких к единице // Успехи матем. наук — 1973 — Т. 29. — Вып. 2(170). — С. 235.

2. Галочкин А.И. Оценки снизу многочленов от значений аналитических функций одного класса // Математический сборник. — 1974. — 95(137). — №3 — С. 396–417.

3. Галочкин А.И. Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций // Сибирсий Математический журнал.

— 1976 — Т. 17. — №6. — С. 1220–1235.

4. Галочкин А.И. Уточнение оценок некоторых линейных форм // Математические заметки — 1976 — Т. 20. — Вып. 1. — С. 35–45.

5. Галочкин А.И. О диофантовых приближениях значений некоторых целых функций с алгебраическими коэффициентами. I // Вестн. Моск. ун-та, сер. Математика, механика. — 1978. — №6 — С. 25–32.

6. Галочкин А.И. О диофантовых приближениях значений некоторых целых функций с алгебраическими коэффициентами. II // Вестн. Моск. ун-та, сер. Математика, механика — 1979 — №1. — С. 26–30.

7. Галочкин А.И. О мере трансцендентности значений функций, удовлетворяющих некоторым функциональным уравнениям // Математические заметки. — 1980 — Т. 27. — Вып. 2. — С. 175–183.

8. Галочкин А.И. О критерии принадлежности гипергеометрических функций Зигеля классу E-функций // Математические заметки — 1981 — Т. 29. — Вып. 1. — С. 3–14.

9. Галочкин А.И. О неулучшаемых по высоте оцеках некоторых линейных форм // Математический сборник — 1984 — Т. 124(166) — №7 — С. 415–430.

10. Галочкин А.И. О некотором аналоге метода Зигеля // Вестн. Моск. ун-та, сер. Математика, механика. — 1986. — №2. — С. 30–34.

11. Галочкин А.И. О решениях некоторых уравнений, содержащих E-функции // Вестн. Моск. ун-та, сер. Математика, механика — 1992 — №3. — С. 22–27.

12. Галочкин А.И. Об аппроксимации алгебраическими числами решений некоторых уравнений, содержащих E-функции// Труды Математического институтата им. В.А.Стеклова — 1994. — Т. 207. — С. 66–69.

13. Галочкин А.И. Оценки линейных форм от значений $G$-функций// Вестн. Моск. ун-та, сер. Математика, механика — 1996 — №3. — С. 23–29.

## Работы, не вошедшие в перечень ВАК РФ

14. Галочкин А.И. Sur des estimations précises par rapport a la hauteur de certaines formes lineaires // Approximations Diophantiennes et Nombres Transcendants. Colloque de Luminy, Birkhäuser — 1982. — P. 95–98.

15. Галочкин А.И. О совместных приближениях значений некоторых целых функций // Диофантовы приближения. Часть I. — 1985. — М.: Изд-во Моск. ун-та. С. 17–25.

16. Галочкин А.И. Галочкин А. И. On effective bounds for certain linear forms // New advances in transcendence theory. Cambridge, Univ. Press. — 1988. — P. 207–214.

17. Галочкин А.И. On certain arithmetical properties of the values of hypergeometrric functions// Diophantische Approximationen 30.09 bis 06.10.1990, Tagungsbericht 42. — Math. Forschungsinstitut Oberwolfach — 1990. — S. 7.

18. Галочкин А.И. On some equations connected with E-function// Diophantische Approximationen 26.09 bis 02.10.1993, Tagungsbericht 43. — Math. Forschungsinstitut Oberwolfach — 1993. — S. 20.

19. Галочкин А.И. Оценки снизу многочленов от значений алгебраически зависимых E-функций// Фундаментальная и прикладная математика. — 1995 — Т. 1. — №1 — С. 305–309.

20. Галочкин А.И. О некоторых арифметических свойствах коэффициентов функции Куммера // Фундаментальная и прикладная математика. — 2005 — Т. 11. — №6. — С. 27–32.