МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.956.2

Сурначёв Михаил Дмитриевич

Асимптотическое поведение решений уравнений типа Эмдена-Фаулера

Специальность: 01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2009

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор В.А. Кондратьев.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор А. И. Назаров,

кандидат физико-математических наук Е. И. Галахов.

Ведущая организация: Российский Университет Дружбы Народов.

Защита диссертации состоится "__2__"__*октября*__ 2009 г. в *16* часов *40* минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан "__2__"__*сентября*__ 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И.Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Эта работа посвящена изучению асимптотического поведения на бесконечности решений полулинейных эллиптических уравнений второго порядка. Модельным примером служит уравнение

$$\triangle u = |x|^p |u|^{\sigma-1} u.$$

Изучается случай, когда $\sigma > 1$.

Уравнения такого типа носят название уравнений типа Эмдена-Фаулера и встречаются в задачах астрофизики[1,2,3], ядерной физики[4,5,6], математической биологии[7,8], теории горения[9,10,11] и иных областях математической физики.

Исследование асимптотического поведения решений уравнений типа Эмдена-Фаулера велось большим числом авторов. Достаточно подробно был исследован случай асимптотического поведения решений в цилиндрических областях[12–16]. Ряд работ посвящён пове-

[1] Eddington A.S., The internal constitution of stars. Cambridge, 1926.

[2] S. Chandrasekhar, Principles of stellar dynamics. London:Constable, 1960.

[3] S. Chandrasekhar, An Introduction to the Study of Stellar Structure. Dover Publ. Inc., 1967.

[4] E.Hille, Some aspects of the Thomas-Fermi equation. Jl. Analyse Math. **23** (1970), p. 147–171.

[5] A. Sommerfeld, Asymptotische integration der Differentialgleichung des Thomas-Fermishen atom. Z. für Phys. **78**, 1932, p. 283–308.

[6] R. Benguria, H. Brezis and E.H. Lieb, The Thomas-Fermi-von Weizsacker theory of atoms and molecules. Comm. Math. Phys. **79**, 1980, p. 167-180.

[7] A.Okubo and S.A. Levin, Diffusion and ecological problems: Modern Prospectives. Springer, New York(2001).

[8] J.D. Murray, Mathematical Biology. Springer, Berlin(1993).

[9] Зельдович Я.Б., Баренблатт Г.И., Либрович В.Б., Махвиладзе Г.Н., Математическая теория горения и взрыва. М., Наука, 1980, 500 стр.

[10] Худяев С.И., Пороговые явления в нелинейных уравнениях. М.: Физматлит, 2003, 272 стр.

[11] Данилов В.Г., Волосов К.А., Маслов В.П., Математическое моделирование процессов тепло-массопереноса, М.: Наука, 1987, 351 стр.

[12] Егоров Ю.В., Кондратьев В.А., Олейник О.А., Асимптотические свойства решений эллиптическихи параболических систем в цилиндрических областях, Мат. Сб., 1998, т. 189, N. 3, стр. 45–68.

[13] Кондратьев В.А., О решениях нелинейных эллиптических уравнений в цилиндрических областях, Фунд. и прикл. матем., 1996, т.2, Вып.3, стр. 863–874.

[14] Кондратьев В.А., Олейник О.А., О поведении на бесконечности решений одного класса нелинейных эллиптических уравнений в цилиндрической области. Докл. РАН, 1995, т. 341, N. 4, стр. 446–449.

[15] Kondratiev V.A., Veron L., Asymptotic behaviour of solutions of some nonlinear parabolic or elliptic equations. Asymptotic Analysis, 1997, v. 14, p. 117–156.

дению решений в окрестности выколотой точки[17–21]. Большое внимание уделялось поведению решений на границе области[22–27]. Вопросам асимптотического поведения решений в окрестности бесконечности были посвящены работы [28,29].

При этом даже для простейшего случая $\triangle u = |u|^{\sigma-1}u$ главный член асимптотики решения получен не для всех значений σ.

Наиболее подробно был исследован случай, когда оператор в главной части либо является оператором Лапласа, либо имеет дивергентную структуру. Случай оператора недивергентной структуры является более сложным и был исследован сравнительно мало. В работе[30] были получены оценки решений. В работе[31] были исследованы решения, имеющие точечную особенность, и изучена их асимптотика. В работе[32] была получена асимптотика решений, стремящих-

[16] Oleinik O.A., Some Asymptotic Problems in the Theory of Partial Differential Equations, 1996, Cambridge Univ. Press, 213 pp.

[17]Кондратьев В.А., Никишкин В.А., Изолированные особенности уравнений типа Эмдена-Фаулера. Диф. Ур., 1993, т. 29, N. 6, стр. 1025–1038.

[18] H. Brezis, L. Veron, Removable singularities for some nonlinear elliptic equations. Arch. Rational Mech. Anal. **75** (1980/81), no. 1, p. 1–6.

[19] J.L. Vazquez, L. Veron, Isolated singularities of some semilinear elliptic equations. J. Differential Equations **60** (1985), no. 3, p. 301–321.

[20] L. Veron, Singular solutions of some nonlinear elliptic equations. Nonlinear Anal. **5** (1981), no. 3, p. 225–242.

[21] Кондратьев В.А., Ландис Е.М., О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка. Мат. Сб., 1988, т. 135, N. 3, стр. 346–359.

[22]Кондратьев В.А., О решениях слабонелинейных эллиптических уравнений в окрестности конической точки границы. Диф. Ур., 1993, т. 29, N. 2., стр. 298-305.

[23] Kondratiev V.A., Nikishkin V.A., On positive solutions of singular boundary value problems for the equation $\triangle u = u^k$. Russian J. Math. Phys. **1** (1993), no. 1, p. 131–135.

[24] A. Gmira, L. Veron, Boundary singularities of solutions of some nonlinear elliptic equations. Duke Math. J., 1991, v. 64, N. 2, p. 271–324.

[25] M. Marcus, L. Veron, The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: the subcritical case. Arch. Rational Mech. Anal., 1998, v. 144, N. 3, p. 201–231.

[26] L. Veron, Semilinear elliptic equations with uniform blow-up on the boundary. J. Anal. Math. **29** (1992), p. 231–250.

[27] M. Marcus, L. Veron, The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: the supercritical case. J. Math. Pures Appl. (9) **77** (1998), no. 5, p. 481—524.

[28]L. Veron, Comportement asymptotique des solutions d'equations elliptique semi-linearies dans $\mathbb{R}^n$. Ann. Mat. Pura Appl., 1981, v. 127, p. 25–50.

[29]X.-Y. Chen, M. Matano, L. Veron, Anisotropic singularities of solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^2$. J. Funct. Anal., 1989, v. 83, N. 1, p. 50–97.

[30]Кондратьев В.А., Ландис Е.М., О качественных свойствах решений одного нелинейного уравнения второго порядка. Мат. Сб., 1988, т. 135, N. 3, стр. 346–359.

[31]Кондратьев В.А., Никишкин В.А., О положительных решениях одного полулинейного уравнения, Тр. сем. им. И.Г. Петровского, 1995, Вып. 18, стр. 157–169.

[32]Кондратьев В.А., Никишкин В.А., Об асимптотике вблизи границы решения сингулярной краевой задачи для полулинейного эллиптического уравнения. Диф. Ур., 1990, т. 26, N.

ся к бесконечности при приближении к границе гладкой области. В работе[33] было исследовано поведение решений, стремящихся к бесконечности при приближении к конической точке границы области или ребру. В серии работ и монографии А. Конькова[34] были получены оценки для решений широкого класса эллиптических уравнений второго порядка с линейной или квазилинейной главной частью и нелинейностью в правой части общего вида. В кандидатской диссертации А. Миразая был получен результат об убывании к нулю на бесконечности решений $Lu = |x|^p |u|^{\sigma-1} u, p \geq -2$, с недивергентным оператором L.

Подробный обзор результатов по поведению решений эллиптических уравнений типа Эмдена-Фаулера и их параболических аналогов содержится в книге Л. Верона[35].

Цель работы. В известной работе Л. Верона[28], посвящённой исследованию асимптотического поведения на бесконечности решений $\triangle u = |u|^{\sigma-1} u$ во внешности единичного шара в $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 3$, была доказана следующая альтернатива:

1. Пусть $\sigma > \frac{n}{n-2}$. Тогда существует конечный предел
$$C = \lim_{x \to \infty} |x|^{n-2} u(x). \tag{1}$$

2. Пусть $\sigma = \frac{n}{n-2}$. Тогда существует предел
$$C = \lim_{x \to \infty} |x|^{n-2} (\ln |x|)^{\frac{n-2}{2}} u(x), \tag{2}$$
причём $C \in \{0, \pm C_1(\sigma, n)\}$.

3. Пусть $\frac{n+1}{n-1} < \sigma < \frac{n}{n-2}$ или $1 < \sigma < \frac{n}{n-2}$ и u знакопостоянна в некоторой окрестности бесконечности. Тогда существует предел $C = \lim_{x \to \infty} |x|^{\frac{2}{\sigma-1}} u(x)$, причём $C \in \{0, \pm C_2(\sigma, n)\}$.

3, стр. 465–468.

[33] Кондратьев В.А., Никишкин В.А., Об асимптотике вблизи кусочно-гладкой границы сингулярных решений полулинейных эллиптических уравнений, Мат. Заметки, 1994, т. 56, Вып. 1, стр. 50–56.

[34] Коньков А.А., Поведение решений квазилинейных эллиптических неравенств. Совр. Матем. Фундам. Напр. **7**, 2004, стр. 3–158.

[35] L. Veron, Singularities of solutions of second order quasilinear equations. Pitman Research Notes, vol. **353**, Longman, Harlow, 1996. viii+377 pp.

Значения C_1, C_2 даны, указана скорость сходимости к пределу. Показатель $\sigma = \sigma_{cr} = \frac{n}{n-2}$ называется "критическим".

Целью настоящей работы является изучение асимптотического поведения в окрестности бесконечности решений уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = |x|^p |u|^{\sigma-1} u, \qquad (3)$$

где матрица $\{a_{ij}\}$ имеет измеримые коэффициенты и удовлетворяет условию равномерной эллиптичности. В большинстве случаев предполагается, что $a_{ij}(x) \to \delta_{ij}$ при $x \to \infty$. Ищутся условия на коэффициенты уравнения, при которых повторяются результаты, полученные Л. Вероном. Рассматривается случай, когда в (1) или (2) имеет место $C = 0$. Ищутся младшие члены асимптотического разложения. Для сферически-симметричного решения $\triangle u = |x|^p |u|^{\sigma-1} u$ изучается асимптотический ряд.

Методы исследования. В работе используются методы качественной теории эллиптических уравнений. При помощи метода суб- и суперрешений получаются априорные оценки на решения. Далее задача рассматривается как линейная с правой частью убывающей на бесконечности как $|x|^{-a}$. Для получения асимптотического представления решения используется метод весовых пространств В.А. Кондратьева[36]. Для доказательства существования решений используется принцип Лерэ-Шаудера. При исследовании случая критического показателя σ задача сводится к исследованию дифференциальных уравнений в проекциях на пространства сферических гармоник. Далее используются методы асимптотического анализа и теории возмущений для решений обыкновенных дифференциальных уравнений[37]. Методы исследования применимы также к изучению асимптотического поведения решений полулинейных уравнений в окрестности проколотой точки, в цилиндрических и конических областях.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новы-

[36] Кондратьев В.А., Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками. Труды ММО, 16, стр. 209–292.

[37] Беллман Р., Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1954.

ми и заключаются в следующем. Для полулинейного эллиптического уравнения типа Эмдена-Фаулера с нелинейным членом, соответствующим поглощению, (уравнения (3))

1. Получены оценки решений при максимально слабых предположениях о скорости стабилизации коэффициентов;

2. Получено асимптотическое представление решений, когда $\sigma \geq \sigma_{cr}$ и коэффициенты эллиптического оператора L стремятся на бесконечности к коэффициентам оператора Лапласа со скоростью $O(|x|^{-\alpha}),\ \alpha > 0$;

3. Изучена асимптотика положительных решений;

4. Получен асимптотический ряд для радиальных решений в случае, когда главная часть уравнения есть оператор Лапласа;

5. Найдены младшие члены асимптотического разложения для положительных решений при $\sigma = \sigma_{cr}$.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть применены при исследованиях в области качественной теории эллиптических уравнений.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

– Семинар кафедры дифференциальных уравнений "Уравнения с частными производными" под руководством профессора Радкевича Е.В., профессора Кондратьева В.А., неоднократно, 2005–2008 г.;

– Семинар „Глобальная теория нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных“ под руководством профессора В.А. Кондратьева и член-корреспондента РАН С.И. Похожаева, неоднократно, 2008–2009 г.;

– Конференция им. И.Г. Петровского "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы Москва, 2007 г.;

– Nonlinear Analysis and Geometric PDE, Tsaghkadzor,Armenia, June 2008;

– Семинар им. В.И. Смирнова по математической физике (ПОМИ РАН) под руководством профессора Г.А. Серёгина и профессора Н.Н. Уральцевой в апреле 2009 года;

– Семинар отдела математической физики в Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН под руководством д.ф.-м.н. Гущина А.К., д.ф.-м.н. Михайлова В.П. в марте 2009 года;

– Семинар по дифференциальным и функционально–дифференциальным уравнениям под руководством профессора Скубачевского А.Л. в РУДН в декабре 2008 года;

– All-Wales mathematical colloquim, Gregynog,Wales, UK, May 2008;

– Международная научная конференция "Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования г. Воронеж, декабрь 2005 г;

– XXXIII Международная молодежная научная конференция "Гагаринские чтения" (Москва, апрель 2007 г.).

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 6 работах, список которых приведен в конце автореферата. Центральный результат работы в полной общности опубликован в [**1**]. Короткая заметка [**3**] содержит схематичное доказательство этого результата в модельном случае. В статье [**2**] априорные оценки решений, используемые в данной работе, получены для решений широкого класса эллиптических неравенств.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из шести глав и списка цитированной литературы. Глава 1 вводная. Общий объём текста – 128 страниц. Список литературы содержит 111 наименований.

Содержание диссертации

Глава 1. Во внешности компакта K в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, рассматривается полулинейное эллиптическое уравнение второго порядка в недивергентной форме

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = |x|^p |u|^{\sigma-1}u. \tag{4}$$

Здесь

$$\sigma = const > 1,\ p = const \geq -2.$$

Под решением уравнения (4) в области Ω понимается функция из класса $W^{2,n}_{loc}(\Omega)$, удовлетворяющая этому уравнению почти всюду (п.в.) в Ω. Коэффициенты $a_{ij}(x)$ полагаются измеримыми ограниченными функциями, удовлетворяющими условию равномерной эллиптичности: найдутся такие положительные константы ν_1 и ν_2, что для всех $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$

$$\nu_1|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \nu_2|\xi|^2.$$

Будем считать, что $a_{ij} = a_{ji}$. Предполагается, что $a_{ij}(x)$ стабилизируются на бесконечности к коэффициентам оператора Лапласа

$$\phi(r) := \sup_{|x|=r} \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x) - \delta_{ij}| = o(1) \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{5}$$

Асимптотические свойства решений уравнения (4) при этом изучаются в соответствии с различными значениями параметров (σ, p, n) и скоростью стабилизации в (5).

В большинстве случаев требуется выполнение либо условия Дини на бесконечности:

$$\int^{+\infty} \frac{\phi(r)}{r}\, dr < +\infty, \tag{6}$$

либо "непрерывности коэффициентов по Гёльдёру" на бесконечности:

$$\phi(r) \leq C_h r^{-\alpha}, \tag{7}$$

где $\alpha > 0, C_h \geq 0$ — постоянные.

Модельным уравнением служит

$$\triangle u = |x|^p |u|^{\sigma-1} u. \tag{8}$$

Введём некоторые обозначения. Через $\mathbf{S}$ обозначим единичную сферу в $\mathbb{R}^n$. Через $\triangle_\theta$ обозначается оператор Лапласа-Бельтрами на $\mathbf{S}$. Пусть $\{\beta_j\}_{j=0}^{\infty}$ — собственные числа $\triangle_\theta$. Как известно, $\beta_j = -j(n-2+j)$. Обозначим через $\mathfrak{S}_k$ пространство собственных функций $\triangle_\theta$ на $\mathbf{S}$, соответствующих собственному значению β_k. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ обозначим

$$\varepsilon_k = (2-n-k)(1-\sigma) - 2 - p.$$

Ключевую роль в теории уравнений рассматриваемого вида играет параметр

$$\sigma_{cr} = \frac{n+p}{n-2}.$$

Это значение показателя σ называется "критическим". В случае $\sigma = \sigma_{cr}$ понадобятся величины

$$d_k = n - 2 + 2k, \quad C_{cr} = \left(\frac{2-n}{1-\sigma_{cr}}\right)^{\frac{1}{\sigma_{cr}-1}},$$

$$\delta_k = \frac{\sigma_{cr} C_{cr}^{\sigma-1}}{d_k} = \frac{(n+p)(n-2)}{(2+p)(n-2+2k)}.$$

Для случая $1 < \sigma < \sigma_{cr}$ обозначается

$$C_{scr} = \left(\frac{2+p}{1-\sigma}\left(\frac{2+p}{1-\sigma} + n - 2\right)\right)^{\frac{1}{\sigma-1}}.$$

Также введём следующие константы:

$$A = \frac{2+p}{1-\sigma}\left(\frac{2+p}{1-\sigma} + n - 2\right), \quad B = 2\frac{2+p}{1-\sigma} + n - 2.$$

Как видно, три области параметра $\sigma : \sigma > \sigma_{cr}, \sigma = \sigma_{cr}, \sigma < \sigma_{cr}$ отвечают значениям $A < 0, A = 0, A > 0$, соответственно.

Для оператора L, коэффициенты которого удовлетворяют условию (7)("непрерывны по Гёльдеру на бесконечности") вводятся аналоги гармонических полиномов. Через $\mathcal{P}[r^{2-n-m}\Psi], \Psi \in \mathfrak{S}_m$, обозначается решение $Lu = 0$ в некоторой окрестности бесконечности,

такое что $|\mathcal{P}[r^{2-n-m}\Psi] - r^{2-n-m}\Psi| = O(r^{2-n-m-\gamma})$ при $x \to \infty$ для всех $\gamma < \alpha$.
Через Z обозначается набор параметров $\nu_1, \nu_2, \alpha, \sigma, p, n, C_h$.
Перейдём к формулировкам теорем.

Теорема 1. *Пусть u — решение уравнения* (4) *в* $\mathbb{R}^n \setminus B_\rho$.

1) Для $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2\rho}$ выполняется

$$|u(x)| \le C|x|^{\frac{2+p}{1-\sigma}},$$

где C зависит только от $n, p, \sigma, \nu_1, \nu_2$.

2) Если $p = -2$, то для $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2\rho}$ выполняется

$$|u(x)| \le C\left(\ln\frac{|x|}{\rho}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}},$$

где C зависит только от n, σ, ν_1, ν_2.

3) Если коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям (5), (6), *то для $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2\rho}$ выполняется*

$$|u(x)| \le C\rho^{\frac{2+p}{1-\sigma}}\left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{2-n}\exp\left(\int_\rho^\infty \frac{\phi(s)}{s}ds\right),$$

где C зависит только от $n, p, \sigma, \nu_1, \nu_2$.

4) Если $\sigma = \sigma_{cr}$ и коэффициенты уравнения удовлетворяют условиям (5), (6), *то для $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{2\rho}$ выполняется*

$$|u(x)| \le C|x|^{2-n}\left(\ln\frac{|x|}{\rho}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\exp\left(\int_\rho^\infty \frac{\phi(s)}{s}ds\right),$$

где C зависит только от $n, p, \sigma, \nu_1, \nu_2$ и от $\exp\left(\int_\rho^\infty \frac{\phi(s)}{s}ds\right)$.

Доказательству этих оценок посвящена Секция 2.1 Главы 2. В пунктах 1 и 2 никаких условий на стабилизацию коэффициентов не накладывается. Оценка пункта 1 верна при любом p.

Следующие две теоремы дают описание решений с асимптотиками типа фундаментального решения или его производных.

Теорема 2. *Пусть u — решение уравнения* (4) *в* $\mathbb{R}^n \setminus K$ *и коэффициенты уравнения удовлетворяют условию* (7). *Пусть* $u = O(|x|^\beta)$

при $x \to \infty$, причём $\beta < (2+p)/(1-\sigma)$. Тогда имеет место следующая альтернатива.

I. Или найдутся целое число m, удовлетворяющее $2-n-m \leq \beta$, и сферические гармоники $\Phi_m \in \mathfrak{S}_m, \dots, \Phi_{m'} \in \mathfrak{S}_{m'}$, где m' - наибольшее целое число, удовлетворяющее $2-n-m' > (2-n-m)\sigma + p + 2$, такие что при $x \to \infty$ выполняется

$$u(x) = \sum_{j=m}^{m'} \mathcal{P}[|x|^{2-n-j}\Phi_j] + O(|x|^{2-n-m-\gamma}) \tag{9}$$

с любым $\gamma < \varepsilon_m$, причём $\Phi_m \neq 0$.

II. Или для всех $m \in \mathbb{N}$ выполняется $u(x) = O(|x|^{-m})$ при $x \to \infty$.

Замечание. Если $L = \triangle$, то вторая альтернатива Теоремы 2 может иметь место только для тривиального решения. Это есть простое следствие доказываемого варианта теоремы о сильном нуле (Теорема 13).

Теорема 3. *Пусть в $\mathbb{R}^n \setminus K$ задано уравнение (4), коэффициенты которого удовлетворяют условию (7). Пусть задано целое неотрицательное число m, удовлетворяющее $2-n-m < \frac{2+p}{1-\sigma}$, и сферические гармоники $\Phi_m \in \mathfrak{S}_m, \dots, \Phi_{m'} \in \mathfrak{S}_{m'}$, где m' - наибольшее целое число, удовлетворяющее $2-n-m' > (2-n-m)\sigma + p + 2$. Тогда найдётся такое R, зависящее от $\sum_{j=m}^{m'} \|\Phi_j\|_{L^\infty(S)}, Z, m$, что в $\mathbb{R}^n \setminus B_R$ существует решение (4), имеющее при $x \to \infty$ асимптотику*

$$u(x) = \sum_{j=m}^{m'} \mathcal{P}[|x|^{2-n-j}\Phi_j] + O(|x|^{2-n-m-\gamma})$$

для всех $\gamma \in (0, \varepsilon_m)$.

В случае $\sigma > \sigma_{cr}$ выполнено $2-n < \frac{2+p}{1-\sigma}$. Используя этот факт и оценки Теоремы 1 получаем

Следствие 4. *Пусть u — решение (4) в $\mathbb{R}^n \setminus K$. Пусть $\sigma > \sigma_{cr}$ и выполнено условие (7). Тогда для u имеет место асимптотика, гарантированная теоремой 2.*

Существование решений с такой асимптотикой следует из Теоремы 3. Перейдём к описанию "критического случая" ($\sigma = \sigma_{cr}$).

Теорема 5. *Пусть u — решение (4) в $\mathbb{R}^n \setminus K$ и $\sigma = \sigma_{cr}$. Пусть коэффициенты уравнения удовлетворяют условию (7). Тогда найдётся такое сферически-симметричное решение (8) $u_{rad}(r)$, что*

$$u(x) = u_{rad}(|x|) + O(|x|^{2-n-\gamma}) \tag{10}$$

при $x \to \infty$ для всех $\gamma < \min(1, \alpha)$.

Замечание. Если оказалось, что $u_{rad}(r) \equiv 0$, то легко видеть, что решение удовлетворяет условиям Теоремы 2 и имеет асимптотику описанную там.

В следующей теореме строится решение, близкое к заданному радиальному решению (8).

Теорема 6. *Пусть $\sigma = \sigma_{cr}$ и коэффициенты оператора L удовлетворяют условию (7). Пусть $R(r)$ — радиальное решение уравнения (8), и $\gamma < \alpha$. Тогда найдётся такое ρ, что в $K_{\rho,\infty}$ существует решение уравнения (4) $u(x)$, удовлетворяющее*

$$u(x) - R(|x|) = O(|x|^{2-n-\gamma}) \quad \text{при} \quad x \to \infty.$$

Это решение будет обозначаться как $\mathcal{P}[R]$.

Для положительных решений доказано следуюшее уточнение результата теоремы 5.

Теорема 7. *Пусть u — положительное решение (4) в $\mathbb{R}^n \setminus K$ и $\sigma = \sigma_{cr}$. Пусть коэффициенты уравнения удовлетворяют условию (7). Пусть $u_{rad}(r)$ — радиальное решение (8), найденное в Теореме 5. Тогда имеет место следующая альтернатива.*
I. Или найдутся целое число $m > 0$ и набор сферических гармоник $\Phi_j \in \mathfrak{S}_j$, $m \le j < m + \delta_m$, такие, что при $x \to \infty$ выполняется

$$u(x) = \mathcal{P}[u_{rad}] + \sum_{m \le j < m+\delta_m} |x|^{2-n} v_{j,1}(|x|)\Phi_j(\theta) + O(|x|^{2-n-m-\delta_m+\varepsilon}),$$

где ε - любое произвольно малое число, $\delta_m = \min(m, \alpha)$. Функции $v_{j,1}(r) \sim r^{-j}(\ln r)^{-\delta_j}$ есть решения некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом $\Phi_m \ne 0$.
II. Или для любого $m \in \mathbb{N}$ выполняется $u(x) = \mathcal{P}[u_{rad}] + O(|x|^{-m})$ при $x \to \infty$.

Замечание. Уравнения на $v_{j,1}(r)$ получаются методом разделения переменных из уравнения $\triangle v = \sigma|x|^p(u_{rad})^{\sigma-1}v$, при подстановке $v = r^{2-n}v_j(r)\Phi_j$, где $\Phi_j \in \mathfrak{S}_j$. Выбирается решение, убывающее к нулю на бесконечности.

Замечание. Если $L = \triangle$, то вторая альтернатива Теоремы 7 имеет место только если $u = u_{rad}$. Это есть простое следствие Теоремы 13.

Для анализа поведения положительных решений применяется техника суб- и суперрешений, что позволяет описать их поведение при меньших предположениях о скорости стабилизации коэффициентов.

Теорема 8. *Пусть коэффициенты* (4) *удовлетворяют условиям* (5), (6). *Пусть* u — *положительное решение* (4) *в* $\mathbb{R}^n \setminus K$. *Пусть* $\sigma > \sigma_{cr}$. *Тогда* $u(x) = c|x|^{2-n}(1+o(1))$ *при* $x \to \infty$, *причём величина* c *может принимать различные значения.*

Теорема 9. *Пусть коэффициенты* (4) *удовлетворяют условиям* (5), (6). *Пусть* u — *положительное решение* (4) *в* $\mathbb{R}^n \setminus K$. *Пусть* $\sigma = \sigma_{cr}$. *Тогда* $u(x) = C_{cr}|x|^{2-n}\left(\ln|x|\right)^{\frac{2-n}{2+p}}\left(1+o(1)\right)$ *при* $x \to \infty$.

Теорема 10. *Пусть* u — *положительное решение* (4) *в* $\mathbb{R}^n \setminus K$, *и коэффициенты уравнения удовлетворяют* (5). *Пусть* $\sigma \in (1, \sigma_{cr})$. *Тогда* $u(x) = C_{scr}|x|^{\frac{2+p}{1-\sigma}}(1+o(1))$ *при* $x \to \infty$.

Для радиальных решений уравнения (8) получено полное асимптотическое представление.

Теорема 11. *Пусть* $u(r)$ — *нетривиальное радиальное решение* (8) *в* $\mathbb{R}^n \setminus K$.
1. Пусть $\sigma > \sigma_{cr}$. *Тогда* $u(r) \sim \sum_{j=0}^{\infty} c_j r^{2-n-j\varepsilon_0}$ *при* $r \to \infty$. *Здесь* $c_1, c_2, \ldots$ *вычисляются через* c_0 *по рекуррентным формулам, а* c_0 *изменяется от решения к решению.*
2. Пусть $\sigma = \sigma_{cr}$. *Тогда при* $r \to \infty$ *выполняется*

$$u(r) \sim C_{cr}r^{2-n}\left(\ln r\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k} c_{kj}\left(\ln\ln r\right)^j\left(\ln r\right)^{-k}\right),$$

где c_{kk} *зависят только от параметров уравнения, а остальные коэффициенты меняются от решения к решению. В частности,* $c_{11} = \frac{\sigma}{(n-2)(\sigma-1)^2}$.

3. Пусть $\sigma < \sigma_{cr}$. Тогда $u(r) \sim C_{scr} r^{(2+p)/(1-\sigma)} \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^{\mu k}\right]$ при $r \to \infty$. Здесь μ есть отрицательный корень уравнения $\mu^2 + B\mu + A(1-\sigma) = 0$, постоянная c_1 зависит от решения, а $c_2, c_3, \dots$ вычисляются через c_1 по рекуррентным формулам.

Глава 2. Вторая глава носит вспомогательный характер. В этой главе доказываются априорные оценки решений (теорема 1) и факты из теории линейных уравнений. Также в этой главе содержатся доказательства следующих двух утверждений.

Теорема 12. *Пусть коэффициенты оператора L удовлетворяют условиям (5) и (6). Тогда в некоторой окрестности бесконечности существует решение уравнения $Lu = 0$ с асимптотикой $u(x) \sim |x|^{2-n}$ при $x \to \infty$.*

Теорема 13. *Пусть в области $K_{R,\infty}$ задано $u \in W^{2,2}_{loc}(K_{R,\infty})$, удовлетворяющее неравенству $|\triangle u| \le C_1|x|^{-1}|\nabla u| + C_2|x|^{-2}|u|$, где C_1, C_2 - константы, причём C_1 достаточно мало (ограничено константой, зависящей от n). Пусть известно, что $|u(x)| \le C_N|x|^{-N}$ для всех $N \in \mathbb{N}$. Тогда $u \equiv 0$ в $K_{R,\infty}$.*

Глава 3. В этой главе приведены доказательства теорем 2 и 3. Эти доказательства основаны на применении техники весовых пространств В.А. Кондратьева и стандартных оценок теории эллиптических уравнений.

Глава 4. Глава посвящена случаю $\sigma > \sigma_{cr}$. Асимптотика радиального решения уравнения (8) изучается при помощи техники весовых пространств В.А. Кондратьева. Далее изучается положительное решение уравнения (4) в случае, если выполнены условия (5), (6) на коэффициенты. Вначале с помощью метода барьеров доказывается, что $C_1|x|^{2-n} \le u(x) \le C_2|x|^{2-n}$. Строится решение уравнения $Lw = |x|^p|u|^{\sigma-1}u$, которое есть $O(|x|^{2-n-\varepsilon})$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Разность $u - w$ удовлетворяет в некоторой окрестности бесконечности уравнению $L(u-w) = 0$, положительна и сравнима с $|x|^{2-n}$. У однородного уравнения $Lz = 0$ в некоторой окрестности бесконечности есть решение $z(x) \sim |x|^{2-n}$. Рассуждения, основанные на применении принципа максимума и неравенства Харнака, показывают, что $u(x) \sim cz(x)$ с некоторой постоянной $c > 0$.

Глава 5. Глава посвящена исследованию случая $\sigma = \sigma_{cr}$. С помошью методов асимптотического анализа получен асимптотический ряд для радиального решения уравнения (8). Далее, "методом стрельб" строятся суб- и суперрешения уравнения (4), что позволяет изучить асимптотическое поведение положительных решений, если коэффициенты удовлетворяют условиям (5), (6). Если же коэффициенты удовлетворяют условию (7), то оказывается возможным изучить поведение решений вне зависимости от знака. Ключевую роль играет следующая лемма для решений ОДУ:

Лемма 14. *Пусть* $v(t)$ *удовлетворяет уравнению* $\ddot{v} + (2-n)\dot{v} = v^\sigma + f(t)$ *на интервале* $t \in (t_0, \infty)$. *Пусть* $v(t) = O(t^{\frac{1}{1-\sigma}})$ *и для некоторого* $\varepsilon > 0$ *выполнено* $\left(\int_t^\infty |f(s)|^2 ds\right)^{1/2} = O(e^{-\varepsilon t})$ *при* $t \to \infty$. *Тогда найдутся* $t_1 \geq t_0$ *и* $R(t)$ *– решение уравнения* $\ddot{R} + (2-n)\dot{R} = R^\sigma$ *на интервале* (t_1, ∞), *такие, что* $v - R = O(e^{-\varepsilon t}) \quad$ *при* $\quad t \to \infty$.

Далее, проводится анализ младших членов асимптотического разложения положительного решения. Для этого изучаются проекции решения на пространства сферических гармоник.

Глава 6. Глава посвящена изучению "субкритического случая" $\sigma < \sigma_{cr}$. Строится асимптотический ряд для радиального решения уравнения (8). С помошью метода суб- и суперрешений изучаются положительные решения уравнения (4), коэффициенты которого удовлетворяют условию (5).

Автор искренне благодарит своего научного руководителя доктора физико–математических наук, профессора Владимира Александровича Кондратьева за постановку интересных задач и постоянное внимание к работе.

Публикации по теме диссертации

1. Сурначёв М.Д., „Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнения типа Эмдена-Фаулера“.// Дифференциальные уравнения, 2009, т. 45, N.8., стр. 1150–1165.

2. Surnachev M.D., „Estimates for Emden-Fowler type inequalities with absorption term“.// J. Math. Anal. Appl., vol. 348, N. 2, 2008, pp. 996–1011.

3. Сурначёв М.Д., „Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнения типа Эмдена-Фаулера“.// Вестник МГУ, Сер. 1 Мат. Мех., 2009, N.2, стр. 56–59.

4. Сурначёв М.Д., „Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнений типа Эмдена-Фаулера“.// Материалы международной конференции посвящённой памяти И.Г. Петровского „Дифференциальные уравнения и смежные вопросы“, стр. 310–311, Москва, 2007.

5. Сурначёв М.Д., „Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнения типа Эмдена-Фаулера“.// Материалы международной конференции „XXXIII Гагаринские чтения“, т.5, стр. 70–71, Москва, 2007.

6. Сурначёв М.Д., „Асимптотическое поведение на бесконечности решений уравнения типа Эмдена-Фаулера“.// Материалы международной конференции „Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования“, Воронеж, 2005.