МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 519.716

Михайлович Анна Витальевна

О ЗАМКНУТЫХ КЛАССАХ ФУНКЦИЙ МНОГОЗНАЧНОЙ ЛОГИКИ, ПОРОЖДЕННЫХ СИММЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена на кафедре дискретной математики Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор А. Б. Угольников.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор В. Б. Алексеев; кандидат физико-математических наук, доцент В. А. Стеценко.
Ведущая организация:	Казанский государственный университет.

Защита диссертации состоится 2 октября 2009 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российскаф Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 2 сентября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к теории функциональных систем — одному из важных разделов дискретной математики и математической кибернетики. В ней изучаются свойства замкнутых классов функций многозначной логики. Рассматривается задача о существовании базисов для некоторых семейств замкнутых классов.

Э. Л. Пост[1] описал все замкнутые (относительно операции суперпозиции) классы булевых функций и показал, что множество замкнутых классов в P_2 счетно, при этом каждый такой класс имеет конечный базис.

Многозначные логики во многом похожи на двузначную логику. В них сохраняются многие результаты, имеющие место в двузначной логике. Можно, например, отметить решения проблемы функциональной полноты и задачи описания предполных классов. В то же время имеются существенные различия между P_2 и P_k при $k \geq 3$. К их числу относятся примеры[2] Ю. И. Янова о существовании замкнутых классов в P_k, не имеющих базиса, и А. А. Мучника о существовании замкнутых классов в P_k со счетным базисом ($k \geq 3$). Из этих результатов следует, что мощность семейства замкнутых классов в P_k при всех $k \geq 3$ континуальна. Это делает труднообозримой структуру данного множества.

Поскольку при $k \geq 3$ изучение замкнутых классов k-значной логики наталкивается на значительные трудности, то, с одной стороны, многие авторы стали рассматривать задачу изучения классов, замкнутых относительно более сильных операций замыкания, которые позволили бы получить множество замкнутых классов конечной или счетной мощности. С другой стороны, изучались отдельные семейства замкнутых классов функций k-значной логики, содержащих конечное, счетное или континуальное множество подклассов. К настоящему времени получено описание свойств некоторых семейств замкнутых классов. Отметим некоторые из этих результатов.

Наиболее хорошо изучены свойства предполных классов функций k-значной логики. Конечность числа предполных классов в P_k установил

[1] *Post E. L.* Introduction to a general theory of elementary propositions // Amer. J. Math. 1921. **43**, 3. 163 – 185.

Post E. L. The two-valued iterative systems of mathematical logic. Annals of Math. Studies 5, Princeton Univ. Press. 1941. 122 p.

[2] *Янов Ю. И., Мучник А. А.* О существовании k-значных замкнутых классов, не имеющих конечного базиса // ДАН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 44 – 46.

А. В. Кузнецов[3]. Все предполные классы функций трехзначной логики описал С. В. Яблонский[4]. Полное описание предполных классов в P_k при всех $k \geq 3$ было дано И. Розенбергом[5]. Асимптотически точная формула для числа $\pi(k)$ всех предполных классов в P_k найдена в работе[6] Е. Ю. Захаровой, В. Б. Кудрявцева и С. В. Яблонского. Конечная порожденность всех предполных классов при $k \leq 7$ доказана Д. Лау[7]. Пример предполного класса в P_8 типа $\mathbb{O}$ (замкнутого класса функций, монотонных относительно частичного порядка специального вида), не имеющего конечной порождающей системы, приведен Г. Тардошем[8]. Необходимые и достаточные условия конечной порожденности предполных классов функций в P_k $(k \geq 3)$, монотонных относительно частично упорядоченных множеств ширины 2, получены О. С. Дудаковой[9].

В ряде работ изучались свойства минимальных классов и минимальных клонов в решетке $\mathfrak{M}_k$ (семействе замкнутых классов функций k-значной логики, упорядоченных по включению). В книге[10] Р. Пешеля и Л. А Калужнина приведена формула для числа минимальных классов функций k-значной логики, $k \geq 3$, и дано описание свойств функций, порождающих эти классы. Все минимальные клоны в P_3 описаны Б. Чаканем[11]. И. Розенберг[12] установил конечность множества минимальных клонов в P_k при всех $k \geq 3$ и привел классификацию функций, определяющих минимальные клоны в решетке $\mathfrak{M}_k$.

В задаче изучения свойств замкнутых классов в P_k, содержащих заданное множество функций одной переменной, можно отметить следую-

---

[3] Математика в СССР за 40 лет. М.: 1959. Т. 1. С. 102 – 108.

[4] *Яблонский С. В.* О функциональной полноте в трехзначном исчислении // Доклады АН СССР. 1954. Т. 95, № 6. С. 1152 – 1156.

[5] *Rosenberg I. G.* La structure des functions de plusieurs variables sur un ensemble fini // C. R. Acad. Sci. Paris, Group 5. 1965. **260**. 3817 – 3819.

Rosenberg I. G. Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Rozpr. ČSAV Řada Mat. Přiv. Věd., Praha. 1970. **80**. 3 – 93.

[6] *Захарова Е. Ю., Кудрявцев В. Б., Яблонский С. В.* О предполных классах в k-значных логиках // ДАН СССР. 1969. Т. 186, № 3. С. 509 – 512.

[7] *Lau D.* Bestimmung der Ordnung maximaler Klassen von Funktionen der k-wertigen Logik // Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen. d. Math. 1978. **24**. 79 – 96.

[8] *Tardos G.* A not finitely generated maximal clone of monotone operations // Order. 1986. **3**. 211 – 218.

[9] *Дудакова О. С.* О конечной порожденности предполных классов монотонных функций многозначной логики // Математические вопросы кибернетики. М.: Физматлит, 2008. Вып. 17. С. 13 – 104.

[10] *Pöschel R., Kaluznin L. A.* Funktionen- und Relationenalgebren. Berlin. 1979. 260 p.

[11] *Csákany B.* All minimal clones on the three-element set // Acta Cybernetica. 1983. **6**, 3. 227 – 238.

[12] *Rosenberg I. G.* Minimal clones I: The five types. Lectures in Universal Algebra (L. Szabo, Á. Szendrei eds.) // Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 43, North Holland. 1986. 405 – 427.

щие результаты. Е. Слупецкий[13] предложил критерий полноты для систем функций в P_k, содержащих множество $P_k(1)$ всех функций k-значной логики, зависящих от одной переменной, $k \geq 3$. Все замкнутые классы в P_k, содержащие множество $P_k(1)$, перечислены Г. А. Бурле[14]. С. В. Яблонский[15] получил критерий полноты для систем функций в P_k при $k \geq 3$, содержащих множество всех функций из $P_k(1)$, принимающих не более $k-1$ значения. Некоторое усиление этого результата получено А. И. Мальцевым[16]. Критерии полноты для систем функций k-значной логики при $k \geq 5$, содержащих группу $\mathfrak{S}_k$ всех подстановок на множестве $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, получены А. Саломаа[17]. В работах С. С. Марченкова[18] и Нгуен Ван Хоа[19] получено описание семейства замкнутых классов, содержащих группу $\mathfrak{S}_k$, при всех $k \geq 3$; изучены свойства семейств замкнутых классов в P_k, содержащих некоторые подгруппы группы $\mathfrak{S}_k$.

В работах В. Б. Кудрявцева[20] изучаются свойства систем функций

---

[13] *Słupecki J.* Kriterium pełnosci wielowartosciowych systemow logiki zdań // C. R. Séanc. Soc. Sci. Varsovie, Cl. III. 1939. **32**. 102 – 109.

[14] *Бурле Г. А.* Классы k-значной логики, содержащие все функции одной переменной // Дискретный анализ. 1967. Вып. 10. С. 3 – 7.

[15] *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды матем. ин-та АН СССР им. Стеклова. 1958. Т. 51. С. 5 – 142.

[16] *Мальцев А. И.* Об одном усилении теорем Слупецкого и Яблонского // Алгебра и логика. 1967. Т. 6, № 3. С. 61 – 74.

[17] *Salomaa A.* Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain I // Ann. Univ. Turkuensis, Ser. AI. 1962. 53. 9 p.

Salomaa A. Some completeness criteria for sets of functions over a finite domain II // Ann. Univ. Turkuensis, Ser. AI. 1963. 63. 19 p.

[18] *Марченков С. С.* S-классификация функций многозначной логики // Дискретная математика. 1997. Т. 9, вып. 3. С. 125 – 152.

Марченков С. С. G-предполные классы многозначной логики // Дискретный анализ и исследование операций. 1996. Т. 3, № 3. С. 47 – 70.

Марченков С. С. A-классификация функций многозначной логики // Докл. РАН. 1999. Т. 366, № 4. С. 455 – 457.

[19] *Нгуен Ван Хоа.* О структуре самодвойственных замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми внутренними автоморфизмами // Дискретная математика. 1993. Т. 5, вып. 4. С. 87 – 108.

Нгуен Ван Хоа. Описание замкнутых классов k-значной логики, сохраняемых всеми автоморфизмами // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 3. С. 16 – 19.

Нгуен Ван Хоа. К описанию семейства G-полных замкнутых классов k-значной логики // Кибернетика. 1990. № 5. С. 9 – 12.

Нгуен Ван Хоа. Структура симметрических замкнутых классов k-значной логики. Докт. диссертация. Минск, 1995.

[20] *Кудрявцев В. Б.* Относительно S-систем функций k-значной логики // ДАН СССР. 1971. Т. 199, № 1. С. 20 – 22.

Кудрявцев В. Б. О свойствах S-систем функций k-значной логики // Дискретный анализ. 1971. Вып. 19. С. 15 – 47.

Кудрявцев В. Б. Функциональные системы. М.: Изд-во МГУ, 1982. 158 с.

k-значной логики, состоящих только из функций, принимающих все значения из множества E_k (такие системы называются S-системами); приводятся критерии S-полноты для рассматриваемых систем функций, устанавливается асимптотическое поведение числа S-предполных S-множеств и их типов.

Свойства замкнутых классов из множества $P_{k,l}$ всех функций k-значной логики, принимающих значения только из множества E_l, $2 \leq l < k$, изучаются в работах Г. Буроша[21] и других исследователей. Рассматривается отображение замкнутых классов из $P_{k,l}$ в замкнутые классы P_l и для каждого класса $B \subseteq P_l$ описывается семейство $\mathfrak{N}_{k,l}(B)$ замкнутых классов из $P_{k,l}$, состоящих из функций, ограничение которых на множестве E_l определяет функции из класса B. В работах Н. Грюнвальда[22] и Д. Лау[23] изучен ряд важных свойств замкнутых классов из $P_{3,2}$; в частности, для каждого замкнутого класса B булевых функций установлена мощность семейства $\mathfrak{N}_{3,2}(B)$, для некоторых классов $B \subseteq P_2$ приведено описание фрагментов решетки $\mathfrak{M}_3$, содержащих классы из диаграммы включений, соответствующих семейству $\mathfrak{N}_{3,2}(B)$.

Ряд работ посвящен изучению семейств замкнутых классов в P_k, содержащихся в заданных предполных классах. Этот вопрос рассматривался в работах[24] С. С. Марченкова, Я. Деметровича, Л. Ханнака, Я. Багинского, Д. Лау, А. Саломаа и других авторов. Показано, что предпол-

---

[21] *Burosch G.* Über die Ordnung der prëvollständigen Klassen in Algebren von Prädikaten. Preprint, WPU Rostock. 1973.

Burosch G. Über Algebren von Prädikaten. Preprint Univ. Rostock. 1974.

[22] *Grünwald N.* Bestimmung sämtlicher abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^n ist // Rostock, Math. Kolloq. 1983. **23**. 5 – 26.

Grünwald N. Beschreibung aller abgeschlossenen Mengen aus $P_{3,2}$, deren Projektion F_8^n ist, mit Hilfe von Relationen // Rostock, Math. Kolloq. 1983. **23**. 27 – 34.

Grünwald N. Strukturaussagen über den Verband der abgeschlossenen Mengen von $P_{k,2}$, insbesondere von $P_{3,2}$. Dissertation A, Universität Rostock. 1984.

[23] *Lau D.* Über abgeschlossene Teilmengen von $P_{3,2}$ // J. Inform. Process Cybern. EIK. 1988. **24**, 11/12. 561 – 572.

[24] *Марченков С. С.* О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики // Проблемы кибернетики. М.: Наука, 1979. Вып 36. С. 5 – 22.

Марченков С. С. О замкнутых классах самодвойственных функций многозначной логики II // Проблемы кибернетики. 1983. Вып 40. С. 261 – 266.

Марченков С. С., Деметрович Я., Ханнак Л. О замкнутых классах самодвойственных функций в P_3 // Методы дискретного анализа и решение комбинаторных задач. 1980. Вып. 34. С. 38 – 73.

Bagyinszki J., Demetrovics J. Lineáris osztályok szerkezete primszám értékü logikában // MTA SZTAKI. 1976. **16**. 25 – 52.

Bagyinszki J., Demetrovics J. The lattice of linear classes in prime-valued logics // Banach Center Publications (Warszawa). 1982. 7. 105 – 123.

Demetrovics J., Hannák L. The cardinality of closed sets in precomplete classes in k-valued logics // Acta Cybernetica. 1979. **4**, 3. 273 – 277.

ный класс в P_k при $k \geq 3$ содержит континуальное множество замкнутых классов тогда и только тогда, когда он не является классом типа $\mathbb{L}$ (классом линейных функций). Все предмаксимальные классы в P_3 найдены в работах Д. Лау[25], С. С. Марченкова, А. Саломаа и других исследователей. В работе[26] А. А. Булатова, Д. Лау и Б. Штрауха для каждого предмаксимального класса в P_3 установлена мощность семейства замкнутых классов, содержащихся в рассматриваемом классе. Все максимальные классы для предполных классов типа $\mathbb{P}$ (классов самодвойственных функций) при всех $k \geq 3$ найдены в работах С. С. Марченкова, Я. Деметровича и Л. Ханнака.

Существование континуального семейства классов в P_k ($k \geq 3$), содержащих цепи неограниченной длины, установлено в работах А. Саломаа[27]. Примеры цепей и антицепей в $\mathfrak{M}_k$ ($k \geq 3$) континуальной мощности приведены работе[28] Я. Деметровича и Л. Ханнака. Достаточные условия того, что заданный класс функций в P_k ($k \geq 3$) содержит не более чем счетное семейство подклассов, приведены в работах Д. Лау[29], приведены также примеры классов, удовлетворяющих этим условиям. Ряд свойств решетки $\mathfrak{M}_k$ изучен в работах А. А. Булатова, И. А. Мальцева и других авторов. Верхние и нижние окрестности замкнутых классов различного вида в решетке $\mathfrak{M}_k$ описаны в работах С. В. Яблонского[30] и Е. А. Михеевой[31]. Примеры замкнутых классов в P_k ($k \geq 3$), не явля-

---

Demetrovics J., Hannák L., Marchenkov, S. S. Some remarks on the structure of P_3 // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 1980. **2**. 215 – 219.

Lau D. Über die Anzahl von abgeschlossenen Mengen linearer Funktionen der n-wertigen Logik // Elektron. Informationsverarb. Kybernet. EIK. 1978. **14**, 11. 561 – 563.

Salomaa A. On infinitely generated sets of operations in finite algebras // Ann. Univ. Turkuensis, Ser. AI. 1964. 74. 12 p.

[25] *Lau D.* Submaximale Klassen von P_3 // J. Inform. Process Cybern. EIK. 1982. **18**, 4/5. 227 – 243.

[26] *Bulatov A. A., Lau D., Strauch B.* The cardinalities of sublattices of depth 2 in the lattices of clones on a 3-elementary set. Preprint Univ. Rostock. 1996.

[27] *Salomaa A.* On the heights of closed sets of operations in finite algebras // Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. AI. 1965. 363. 12 p.

Salomaa A. On some algebraic notions in the theory of truth-functions // Acta Philos. Fennicae. 1965. **18**. 193 – 201.

[28] *Demetrovics J., Hannák L.* Construction of large sets of clones // Zeitschr. f. Math. Logik und Grundlagen. d. Math. 1987. 33. 127 — 133.

[29] *Lau D.* Ein Kriterium für den Nachweis der Abzählbarkeit gewisser Teilverbände des Verbandes der abgeschlossenen Mengen von Funktionen der k-wertigen Logik // Rostock, Math. Kolloq. 1986. **30**. 11 – 18.

Lau D. Function Algebras on Finite Sets. Berlin, Heidelberg: Springer, 2006. 668 p.

[30] *Яблонский С. В.* Строение верхней окрестностей для предикатно-описуемых классов в P_k // Доклады АН СССР. 1974. Т. 218, № 2. С. 304 – 307.

[31] *Михеева Е. А.* Классификация нижних окрестностей замкнутых классов из решетки $\mathfrak{L}_k$ // Дискретная математика. 1991. Т. 3, вып. 4. С. 3 – 15.

ющихся конечно порожденными, в которых каждый предполный класс имеет конечный базис, приведены в работе Е. А. Михеевой[32]; показано также, что мощность семейства таких классов не более чем счетная.

Таким образом, было проведено значительное число исследований, направленных на изучение свойств замкнутых классов функций многозначной логики. Вместе с тем, в настоящее время недостаточно информации, которая позволяла бы для классов из заданного континуального семейства определять, имеют ли эти классы базисы и являются ли они конечно порожденными. В связи с этим представляется важным получение необходимых и достаточных условий, позволяющих отвечать на поставленные вопросы для континуальных семейств замкнутых классов в P_k.

Как уже говорилось, семейство замкнутых классов из работы Ю. И. Янова и А. А. Мучника является первым примером континуального семейства замкнутых классов функций k-значной логики ($k \geq 3$). Следует отметить, что функции из этих примеров обладают следующими свойствами: каждая функция является симметрической, принадлежит множеству $P_{k,2}$ (то есть принимает значения только из множества $\{0, 1\}$), принимает значение 0 на единичном наборе и на всех наборах, содержащих хотя бы одну нулевую компоненту, и, кроме того, замыкание произвольного множества F этих функций совпадает с множеством $\cup[\{f\}]$, где объединение берется по всем функциям из F. В диссертации рассматриваются семейства замкнутых классов в P_k, порожденных функциями, которые обладают аналогичными свойствами.

Цель работы

Получить для рассматриваемых замкнутых классов критерии базируемости и конечной порожденности, установить другие свойства этих классов.

Основные методы исследования

В диссертации используются методы дискретной математики, методы теории функциональных систем, в частности, критерии выразимости и представимости функций над конечными системами в P_k.

[32] *Михеева Е. А.* Построение в P_k максимальных классов, не имеющих конечных базисов // Дискретная математика. 1998. Т. 10, вып. 2. С. 137 – 159.

Научная новизна

Все результаты работы являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты.

1. Для замкнутых классов, порожденных однослойными симметрическими функциями получены критерии базируемости и конечной порожденности.

2. Показано, что замыкание множества однослойных симметрических функций относительно операций суперпозиции и добавления несущественной переменной совпадает с замыканием множества однослойных симметрических функций относительно операций отождествления, переименования переменных и добавления несущественной переменной.

3. Найдены критерии базируемости и конечной порожденности для замкнутых классов, порожденных монотонными симметрическими функциями. Для этих классов приведены также аналогичные критерии в терминах свойств множеств точек плоскости, соответствующих порождающим системам рассматриваемых классов.

4. Доказаны необходимые и достаточные условия базируемости для семейств замкнутых классов, порождающие системы которых обладают некоторыми специальными свойствами. Приведены примеры семейств замкнутых классов, обладающих этими свойствами.

Теоретическая и практическая ценность

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут найти применение в исследованиях в теории функциональных систем и в теории синтеза и сложности управляющих систем.

Апробация результатов

Результаты диссертации докладывались на семинаре “Функции многозначной логики и смежные вопросы” под руководством профессоров А. Б. Угольникова, С. Б. Гашкова и Р. М. Колпакова (2007, 2008 гг.), на семинаре “Математические вопросы кибернетики” под руководством профессора О. М. Касим-Заде (2009 г.), на IX Международном семинаре “Дискретная математика и ее приложения” (Москва, МГУ, 18 – 23 июня 2007 г.), на XV Международной конференции “Проблемы теоретической кибернетики” (Казань, 2 – 7 июня 2008 г.), на XVII Международной школе-семинаре “Синтез и сложность управляющих систем” (Новосибирск, 27 октября – 1 ноября 2008 г.), на Международной конференции “Современные проблемы математики, механики и их приложений” (Москва, 30 марта – 2 апреля 2009 года), на VIII Международной научная конференция “Дискретные модели в теории управляющих систем” (Москва, 6 – 9 апреля 2009).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, список которых приведен в конце автореферата [1 – 6].

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Полный объем диссертации — 111 страниц, список литературы содержит 165 наименований.

Содержание работы

Пусть $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$, E_k^n — множество всех наборов вида $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in E_k$, F — замкнутый (относительной операции суперпозиции и введения фиктивной переменной) класс функций k-значной логики, $k \geq 2$, $n \geq 1$. Множество функций $\mathfrak{A} \subseteq F$ называется базисом класса F, если $[\mathfrak{A}] = F$ и для любого множества $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}$ выполняется неравенство $[\mathfrak{B}] \neq F$. Замкнутый класс F называется базируемым, если существует множество $\mathfrak{A}$, такое, что $\mathfrak{A}$ — базис класса F. Класс F называется конечно порожденным, если он имеет конечный базис.

Пусть $\mathfrak{A} \subseteq P_k$, $k \geq 2$. Множество всех функций, которые могут быть получены из функций системы $\mathfrak{A}$ применением операций переименования, отождествления переменных и введения фиктивной переменной, будем называть p-замыканием множества $\mathfrak{A}$ (обозначение $< \mathfrak{A} >$). Множество $\mathfrak{A}$ называется p-замкнутым, если $\mathfrak{A} = < \mathfrak{A} >$; p-замкнутые множества называются также p-замкнутыми классами.

Обозначим через R_k множество всех функций k-значной логики, $k \geq 3$, принимающих значения только из множества $\{0, 1\}$ и равных нулю на единичном наборе и на всех наборах, содержащих хотя бы одну нулевую компоненту. Множество всех наборов из E_k^n, которые получаются друг из друга перестановкой компонент, называется слоем. Функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из R_k будем называть симметрической, если для любого слоя $L \subseteq E_k^n$ и любых двух наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in L$ выполняется равенство $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta})$. Множество всех симметрических функций из R_k будем обозначать через S_k. Функция из R_k называется m-слойной симметрической, если существуют m слоев, $m \geq 1$, таких, что эта функция равна единице на всех наборах из этих слоев и равна нулю на всех остальных наборах. Множество всех m-слойных симметрических функций из R_k будем обозначать через S_k^m, $m \geq 1$. Множество всех однослойных симметрических функций из R_k, равных нулю на всех наборах, все компоненты которых совпадают, будем обозначать через NS_k^1, $k \geq 3$.

Пусть[33] $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha \geq 0$, а $f(x_1, \ldots, x_n)$ — однослойная симметрическая функция. Будем говорить, что f является функцией типа σ (тип функции f равен σ), если отношение числа единиц к числу двоек в слое, на наборах которого эта функция равна единице, равно σ. Множество всех функций из S_3^1, тип которых равен σ, будем обозначать через F_σ, $\sigma \in \mathbb{Q}$, $\sigma \geq 0$. Функцию из P_3 будем называть монотонной, если она монотонна относительно порядка $0 < 1 < 2$ на множестве E_3. Множество всех монотонных функций из R_3 будем обозначать через MS. Пусть f — монотонная симметрическая функция из R_3. Обозначим через e_f и d_f число единиц и двоек соответственно в слое с наибольшим числом единиц, на котором функция f принимает значение 1. Пусть $G \subseteq \mathrm{MS}$, $k \in \mathbb{Z}^+$. Будем называть множество G k-ограниченным, если для любой функции $f \in G$ выполняется неравенство $e_f \leq k$ и найдется функция $g \in G$, такая, что $e_g = k$. Пусть G — k-ограниченное множество. Положим $\mathcal{K}(G) = \{g \in G | e_g = k\}$.

Пусть $\mathrm{A} \subseteq P_k$, $k \geq 3$. Будем говорить, что множество A обладает свойством $(*)$, если для любого $G \subseteq \mathrm{A}$ выполняется равенство $(\cup[\{g\}]) \cap \mathrm{A} = [\cup\{g\}] \cap \mathrm{A}$, где объединение берется по всем функциям g из множества G. Таким образом, если функция f из множества A выражается некоторой формулой над G, то найдется функция g из G, такая, что $f \in [\{g\}]$. Будем говорить, что функция f не превосходит функцию

[33] Через $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{N}$ обозначаем множество всех рациональных и множество всех натуральных чисел соответственно, $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

g относительно отношения $\preceq$ (обозначение $f \preceq g$), если $f \in [\{g\}]$. Функции f и g называются эквивалентными (обозначение $f \sim g$), если $f \preceq g$ и $g \preceq f$. Будем говорить, что функция f не превосходит функцию g относительно отношения $\trianglelefteq_{\mathrm{A}}$ (обозначение $f \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$), если существует формула Φ над A, реализующая функцию f и содержащая подформулу вида $g(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m)$, где $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ — формулы[34] над A. Будем говорить, что множество A обладает свойством $(**)$, если для любых $f, g \in \mathrm{A}$, таких, что $f \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$ и $g \trianglelefteq_{\mathrm{A}} f$, выполняется соотношение $f \sim g$ и для любых функций $f, g, h \in \mathrm{A}$, таких, что $f \trianglelefteq_{\mathrm{A}} g$, $g \trianglelefteq_{\mathrm{A}} h$, $f \preceq h$, выполняется по крайней мере одно из следующих соотношений: $f \preceq g$, $g \preceq h$.

Во **введении** содержится обзор результатов, связанных с темой диссертации, приводится постановка задачи, дается краткое изложение основных результатов диссертации.

В **главе 1** приводятся основные определения, обозначения и вспомогательные утверждения.

В **главе 2** изучаются замкнутые классы, порожденные однослойными симметрическими функциями. Вводится специальное отношение порядка на множестве S_3^1. В параграфе 2.1 доказывается, что класс F, порожденный множеством G, $G \subseteq \mathrm{NS}_3^1$, имеет базис тогда и только тогда, когда каждая функция из G содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G относительно введенного отношения порядка; при этом F имеет конечный базис тогда и только тогда, когда множество G конечно (теорема 2.1). В параграфе 2.2 сопоставляются замкнутые классы и p-замкнутые классы, порожденные однослойными симметрическими функциями. Показывается, что замыкание множества S_3^1 совпадает с p-замыканием этого множества (теорема 2.2). Далее, для любой функции f из NS_3^1 и любого $\sigma \in \mathbb{Q}$, $\sigma > 0$, приводятся необходимые и достаточные условия выполнения соотношения $[\{f\}] \subseteq < F_\sigma \cup \{f\} >$ (теорема 2.3). Наконец, доказывается, что замкнутый класс, порожденный функциями из множества S_3^1, является конечно порожденным тогда и только тогда, когда существуют рациональные числа $\sigma_1, \dots, \sigma_t$, $t \geq 1$, такие, что каждая функция из этого класса принадлежит множеству $< F >$, где $F = F_{\sigma_1} \cup \dots \cup F_{\sigma_t}$ (теорема 2.4).

В **главе 3** изучаются замкнутые классы, порожденные монотонными симметрическими функциями. Приводятся критерии базируемости и конечной порожденности для рассматриваемых классов. В параграфе 3.1

[34] Символы переменных являются тривиальными формулами.

рассматривается отношение порядка $\preceq_{\mathrm{MS}}$ на множестве MS. Показывается, что класс F, порожденный множеством G, $G \subseteq \mathrm{MS}$, имеет базис тогда и только тогда, когда каждая функция из G содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G относительно введенного отношения порядка; при этом F имеет конечный базис тогда и только тогда, когда множество G является k-ограниченным и множество $\mathcal{K}(G)$ конечно (теорема 3.1). В параграфе 3.2 рассматривается представление монотонных симметрических функций точками на плоскости из множества $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{N}$. Каждой функции f из MS ставится в соответствие точка на плоскости с координатами (e_f, d_f) и указываются все точки плоскости, соответствующие функциям g и h из MS, таким, что $g \preceq_{\mathrm{MS}} f \preceq_{\mathrm{MS}} h$ (следствие 3.2.3). В параграфе 3.3 приводятся критерии базируемости и конечной порожденности замкнутых классов, порожденных монотонными симметрическими функциями, в терминах свойств множеств точек из $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{N}$, соответствующих порождающим системам этих классов (теоремы 3.2 и 3.3).

В **главе 4** изучаются множества, обладающие свойствами $(*)$ и $(**)$. Доказывается критерий базируемости для классов, порождающие системы которых содержатся в множествах, обладающих этими свойствами. Приводятся также примеры множеств, обладающих свойствами $(*)$ и $(**)$. В параграфе 4.1 доказывается критерий базируемости для замкнутых классов, порождающие системы которых состоят из попарно неэквивалентных функций и содержатся в множествах, обладающих свойствами $(*)$ и $(**)$. Показано, что каждый такой класс F имеет базис тогда и только тогда, когда всякая функция из системы G, порождающей класс F, содержится в некоторой ограниченной максимальной цепи множества G относительно порядка $\preceq$ (теорема 4.1). Этот критерий является обобщением критерия базируемости для однослойных симметрических функций, полученного в параграфе 2.1. Кроме того, показывается, что если класс F имеет базис, то существует базис класса F, состоящий из всех верхних граней ограниченных максимальных цепей множества G (следствие 4.1.1). В параграфе 4.2 приводятся примеры множеств функций, удовлетворяющих условиям полученных критериев (теоремы 4.2 – 4.4). Показывается, что свойствами $(*)$ и $(**)$ обладают следующие множества функций: множество всех немонотонных функций из S_3^m, $m \geq 1$, множество NS_k^1, $k \geq 3$, а также некоторые подмножества множества S_3, обладающие рядом дополнительных свойств.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору А. Б. Угольникову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Публикации автора по теме диссертации

1. *Михайлович А. В.* О замкнутых классах трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2008. № 4. С. 54 – 57.

2. *Михайлович А. В.* О классах функций трехзначной логики, порожденных монотонными симметрическими функциями // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 1. С. 33 – 37.

3. *Михайлович А. В.* О некоторых свойствах симметрических функций трехзначной логики // Материалы IX междунар. семинара "Дискретная математика и ее приложения" (Москва, МГУ, 18 – 23 июня 2007 г.). М.: Изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007. С. 165 – 167.

4. *Михайлович А. В.* О замкнутых классах в P_3, порожденных монотонными симметрическими функциями // Тезисы докладов XV междунар. конференции "Проблемы теоретической кибернетики" (Казань, 2 – 7 июня 2008 г.). Казань, 2008. С. 83.

5. *Михайлович А. В.* О замкнутых классах многозначной логики, порожденных функциями со специальными свойствами // Материалы XVII междунар. школы-семинара "Синтез и сложность управляющих систем" (Новосибирск, 27 октября – 1 ноября 2008 г.). Новосибирск, Изд-во Института математики, 2008. С. 117 – 122.

6. *Михайлович А. В.* О свойствах классов трехзначной логики, порожденных симметрическими функциями // Материалы междунар. конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений" (Москва, МГУ, 30 марта – 2 апреля 2009 г.). М.: Издательство "Университетская книга", 2009. С. 396.