Московский Государственный Университет
имени М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.21

Устинов Филипп Александрович

ЗАДАЧА О РАЗЛАДКЕ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ЛЕВИ В ОБОБЩЕННОЙ БАЙЕСОВСКОЙ ПОСТАНОВКЕ

Специальность: 01.01.05 - Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва - 2009 г.

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета в Московском Государственном Университете имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель: член-корреспондент РАН,
профессор
Ширяев Альберт Николаевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор
Мазалов Владимир Викторович,

доктор физико-математических наук,
профессор
Николаев Михаил Леонидович.

Ведущая организация: Институт системного анализа РАН.

Защита диссертации состоится 2 октября 2009 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 2 сентября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор

И.Н. Сергеев

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы

В настоящей работе рассматривается задача о разладке в обобщенной байесовской постановке для процессов Леви. Задача о разладке состоит в скорейшем обнаружении изменения вероятностных характеристик процесса (в данном случае триплета характеристик). Впервые проблема скорейшего обнаружения изменения сноса винеровского процесса была поставлена в докладе А.Н. Колмогорова и А.Н. Ширяева на VI совещании по теории вероятностей и математической статистике (Вильнюс, 5-10 сентября 1960 г). Представленные в этом докладе новые подходы получили развитие в работах А.Н. Ширяева[1,2,3].

Некоторые частные случаи пуассоновской задачи о разладке были рассмотрены в работах[4,5]. Пешкир и Ширяев представили полное решение этой задачи (в байесовской постановке)[6]. Заметим, что пуассоновская задача заметно отличается от винеровской по методам исследования.

Дальнейшая деятельность развивалась в нескольких направлениях. Одно из них - поиск классов процессов, допускающих решение при помощи тщательного анализа возникающих уравнений. В этом направлении Гапеев нашел специальный случай, когда пуассоновская задача с экспоненциальными скачками допускает аналитическое изучение[7] (см. также[8]).

В работах[9,10] рассматриваются задачи о разладке для составного пуассоновского процесса и для многомерного процесса, координаты которого

---

[1] Ширяев А.Н. Обнаружение спонтанно возникающих эффектов // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138, вып. 4. С. 799-801.

[2] Ширяев А.Н. Задача скорейшего обнаружения нарушения стационарного режима // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138, вып. 5. С. 1039-1042.

[3] Ширяев А.Н. Об оптимальных методах в задачах скорейшего обнаружения // Теория вероятностей и ее применения. 1963. Т. VIII, вып. 1. С. 26-51.

[4] Davis, M. H. A. (1976). A note on the Poisson disorder problem. Banach Center Publ. 1 65-72.

[5] Galchuk, L. I. and Rozovskii, B. L. (1971). The disorder problem for a Poisson process. Theory Probab. Appl. 16 712-716.

[6] Peskir, G. and Shiryaev, A. N. (2002). Solving the Poisson disorder problem. In Advances in Finance and Stochastics. Essays in Honour of Dieter Sondermann (K. Sandmann and P. Schцnbucher, eds.) 295-312. Springer, Berlin.

[7] Pavel V. Gapeev, The disorder problem for compound Poisson processes with exponential jumps, Ann. Appl. Probab. 15 (2005), no. 1A, 487-499.

[8] E. Bayraktar and S. Sezer. Quickest detection for a Poisson process with a phase - type changetime distribution. Technical report, University of Michigan, 2006.

[9] Dayanik, S. and Sezer, S. O. (2006). Compound Poisson disorder problem. Math. Oper. Res. 31, 4, 649-672.

[10] Savas Dayanik, H. Vincent Poor and Semih O. Sezer (2006). Multisource Bayesian Sequential Change Detecion, Annals of Applied Probability, 18:2, 552-590.

- составной пуассоновский или винеровский процессы, однако аналитическое изучение решения затруднено. В этих работах при помощи вероятностных соображений возникающие уравнения заменяются более простыми, которые, однако, не дают точное решение, а лишь приближение к нему. Основная идея состоит в рассмотрении оператора «сдвига на прыжок», т.е. сначала решается задача оптимальной остановки до первого прыжка, найденная функция

$$u(x) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} E_\infty^x \int\limits_0^{\tau \wedge \sigma_1} \psi_s ds$$

появляется в правой части следующей задачи - рассматриваемой до второго прыжка и т.д. Этот метод применим только для процессов с конечным числом скачков на конечном временном интервале.

В работе[11] впервые вводится обобщенный байесовский подход для винеровской задачи о разладке. Представлено решение этой задаче о разладке. Также получена асимптотика функции риска. Решение обобщенной байесовской задачи о разладки для некоторого пуассоновского процесса и сходимость к винеровскому случаю (при частотах скачков, стремящихся к бесконечности) рассмотрено в работе[12].

В последние десятилетия резко возросла потребность в решении практических задач, требующих быстрого обнаружения разладки в той или иной форме. Важные применения задачи о разладке - сейсмология, скорейшее обнаружение сбоев промышленного оборудования (во время контроля качества), изменение рискованности различных финансовых инструментов, раннее обнаружение начала эпидемий, военные применения, радиолокация, охрана ценных ресурсов, обеспечение безопасности сложных технических систем (самолетов, судов, космических кораблей, ядерных электростанций, компьютерных сетей). В последнее время проявляется значительный интерес к задачам о разладке в связи с такими явлениями, как биотерроризм, компьютерные атаки.

Многие практические задачи можно описать как поток некоторых событий или данных (запросов, сбоев, цен и т.п.). Соответственно, естественно моделировать эти потоки с помощью случайных процессов или цепей. Во многих из этих задач данные собираются разнородные или

[11] Feinberg, E.A. and Shiryaev, A.N. (2006). Quickest detection of drift change for Brownian motion in generalized Bayesian and minimax settings, Statistics and Decisions 24, Issue 4, 445-470.

[12] E. V. Burnaev, Disorder problem for a Poisson process in the generalized Bayesian setting, UMN, 2007, 62:4(376), 151-152.

из нескольких источников, чтобы обнаружить сбой как можно раньше. К примеру, можно следить за непрерывно меняющимся уровнем масла, температурой, давлением, и периодически измерять число и тип частиц-примесей (см.[13]). Поэтому полезно рассматривать наряду с непрерывной составляющей разнораспределенные скачки. Во многих моделях естественным оказывается рассматривать процессы с независимыми приращениями.

Многочисленны применения в финансовой математике - к примеру, для расчета финансовых рисков контрактов на поставки электроэнергии используются модели с диффузиями с прыжками (см.[14,15]). Тартаковский А.Г., Розовский Б.Л. и др. применили теоретические методы для обеспечения безопасности сетей; Basseville M., Benveniste A., Никифоров И.В. и другие использовали их для разработки эффективных алгоритмов обнаружения неисправностей в сложных технических устройствах и т.п. В последнее время все большую популярность приобретают модели с процессами Леви, являющиеся естественным обобщением моделей, основанных на винеровском и пуассоновском процессах.

Заметим, что в будущем потребность в решении задач быстрого обнаружения разладки будет только возрастать. Это связано с технологическим и экономическим развитием, а также с сопутствующим ростом ущерба экологии. С развитием инфраструктуры и возникновением все большего числа сложных технических объектов возрастают риски различных техногенных катастроф, соответственно возрастает необходимость точного учета и управление этими рисками. В связи с этим ожидается дальнейшее развитие математических моделей задач о разладке в направлении усложнения. Можно предвидеть введение неклассических постановок (других способов оценки риска) и расширение рассматриваемых классов процессов.

В настоящей работе получены обобщения части результатов работ[11,12] - они распространены на процессы Леви. Найден оптимальный момент остановки. Задача о разладке изучается в обобщенной байесовской постановке.

В классической байесовской постановке считается известным распре-

[13] Byington, C. S. and Garga, A. K. (2001). Handbook of Multisensor Data Fusion. Press, Chapter Data fusion for developing predictive diagnostics for electromechanical systems.

[14] Weron, R., Bierbrauer, M., and Truck, S. (2004). Modeling electricity prices: jump diffusion and regime switching. Physica A Statistical Mechanics and its Applications 336, 39-48.

[15] Cartea, I. and Figueroa, M. (2005). Pricing in electricity markets: A mean reverting jump diffusion model with seasonality. Applied Mathematical Finance 12, 4 (December), 313-335.

деление момента сбоя. В приложениях зачастую удобнее использовать постановку задачи, в которой момент разладки представляет собой детерминированный неизвестный параметр.

В данной работе также получены асимптотические оценки для функции риска. Они, в частности, оказываются полезными оценками в задаче о разладке в минимаксной постановке, при поиске асимптотически оптимальных правил остановки. Минимаксная постановка весьма естественна как с практической, так и с теоретической точки зрения, но ее точное решение пока неизвестно.

Итак, в настоящей работе проводится развитие современных теоретических моделей. Таким образом, ее тематика является актуальной как с точки зрения развития теории, так и с точки зрения практических применений.

Цель работы

Целью данной работы является развитие теории задач о разладке в направлении расширения изучаемых классов процессов и способов оценки риска. В соответствии с этой целью, были поставлены следующие задачи исследования:

1. Исследовать задачу о разладке для процессов Леви в случае, когда момент разладки является неизвестным детерминированным параметром, а среднее время запаздывания оценивается с помощью обобщенной байесовской функцией риска.

2. Изучить асимптотическое поведение функции риска при стремлении к бесконечности среднего времени до ложной тревоги.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Найден оптимальный момент в задаче о разладке для произвольных процессов Леви в обобщенной байесовской постановке.

2. Установлена связь асимптотики функции риска при стремлении к бесконечности среднего времени до ложной тревоги в случае базисных процессов Леви со средним временем объявления тревоги.

3. В некоторых случаях асимптотика из предыдущего пункта найдена в виде явной формулы.

Методы исследования

В работе применяются методы теории вероятностей, в частности методы теории случайных процессов и теории задач об оптимальной остановке марковских процессов, а также некоторые методы функционального анализа.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в дальнейших исследованиях задач об оптимальной остановке. Развиты подходы, которые полезны для дальнейших обобщений, таких как рассмотрение минимаксной постановки задачи о разладке для процессов Леви, а также расширение на многомерный случай. Результаты работы также могут быть использованы при построении математических моделей реальных процессов с разладкой. Найденные асимптотические оценки также полезны (как для качественной оценки на практике, так и для новых теоретических построений).

Апробация работы

1. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на научно-исследовательском семинаре отдела теории вероятностей МИАН им. Стеклова «Стохастический анализ: теория и приложения» под руководством член-корр. РАН А. Н. Ширяева, д.ф.-м.н. А. А. Гущина (2007-2008).

2. На семинаре кафедры теории вероятностей МГУ им. М. В. Ломоносова «Стохастический анализ и мартингальные методы» под руководством член-корр. РАН А. Н. Ширяева (2007-2008).

3. На Большом семинаре кафедры теории вероятностей МГУ им. М. В. Ломоносова (2008).

4. На русско-японском симпозиуме «Сложные статистические модели» в МИАН им. Стеклова (2007).

5. На Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» в 2009 году.

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 3 работах автора, 2 из которых - статьи в ведущих рецензируемых научных журналах. Список приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, двух глав, включающих 12 параграфов, и списка литературы из 65 наименований. Общий объем диссертации составляет 76 страниц.

2 Краткое содержание диссертации

Во введении обоснована актуальность задачи скорейшего обнаружения, рассказано об истории развития теоретических подходов к решению этой задачи, приведен обзор современных работ по теории и применениям задачи о разладке. Также приведено краткое содержание диссертации. Далее приведены основные утверждения, доказанные в диссертации, по главам.

Глава 1.

В этой главе ставится и исследуется задача о разладке для процессов Леви в обобщенной байесовской постановке. Задача сводится к задаче об оптимальной остановке некоторого процесса ψ. Эта задача с ограничениями на момент остановки сводится к решению серии задач без ограничений. Кратко описываются свойства процесса, необходимые при поиске оптимальной стратегии остановки. Найдена оптимальная стратегия во вспомогательной задаче. Каждое решение вспомогательной задаче доставляет решение исходной задаче при некотором T - среднем времени до ложной тревоги. Далее показывается, что все решения серии вспомогательных задач дадут решения исходной задачи при всех допустимых T.

Обобщенная байесовская постановка заключается в следующем. На некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ наблюдается процесс Леви $X = (X_t)_{t\geq 0}$, с триплетом характеристик (B_0, C, ν_0). Предположим, что в неизвестный и ненаблюдаемый момент времени θ момент времени этот триплет характеристик меняется на (B_1, C, ν_1). Неслучайный момент $\theta \in [0, +\infty]$ называется моментом разладки, или моментом смены режима. Обозначим P_{θ_0} - распределение процесса X в предположении, что момент разладки $\theta = \theta_0$. При распределении P_∞ разладка не происходит никогда, при P_0 - разладка происходит мгновенно, в момент времени 0. Момент подачи сигнала тревоги об обнаружении разладки обозначим τ. Это марковский момент относительно фильтрации $\mathcal{F}_t^X$, порожденной процессом X. Будем искать наилучший момент в классе $\mathcal{M}_T = \{\tau : E^0_\infty \tau \geq T\}$, т.е. среди правил остановки, для которых среднее время до подачи (ложной) тревоги в случае отсутствия разладки не меньше T. Момент τ^* будем называть *оптимальным* в классе $\mathcal{M}_T$, если величина

$$B(T) := \frac{1}{T} \inf_{\tau \in \mathcal{M}_\mathcal{T}} \int\limits_0^\infty E_\theta(\tau - \theta)^+ d\theta,$$

называемая функцией потерь, достигает минимума на τ^*.

Для нахождения оптимального момента рассмотрим процесс ψ_t:

$$\psi_t = \psi_0 L_t + \int\limits_0^t \frac{L_t}{L_s} ds,$$

где $L_t = \frac{d(P_0|\mathcal{F}^X_t)}{d(P_\infty|\mathcal{F}^X_t)}$ - производная Радона-Никодима сужения меры P_0 на сигма-алгебру, порожденную процессом X до момента t, по сужению меры P_∞ на ту же сигма-алгебру. $B(T)$ удается представить в виде

$$B(T) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} E_\infty \int_0^\tau \psi_u du.$$

Таким образом, задача о разладке сводится к задаче об оптимальной остановке для процесса ψ. Для дальнейшего проводится изучение свойств этого процесса. Описаны свойства процесса плотности L_t. Показано, что этот процесс является стохастической экспонентой (экспонентой Долеан-Дэд) некоторого процесса N_t.

Изучаются свойства траекторий процесса ψ. Для этого вводится

Определение 1. *Множество A называется регулярным для процесса ψ_t, если для любой точки $\boldsymbol{x}$ из A,*

$$\inf\{t > 0 : \psi_t \in A | \psi_0 = \boldsymbol{x}\} = 0.$$

Регулярность множества $[A, +\infty]$ для процесса ψ_t зависит от триплетов характеристик начального и измененного(после разладки) процесса.

Вернемся к задаче об оптимальной остановке процесса ψ с ограничением на математическое ожидание момента разладки (искомый момент должен принадлежать классу $\mathcal{M}_T$). Чтобы перейти к задаче без ограничений, воспользуемся методом множителей Лагранжа. Рассмотрим семейство задач

$$v^{(c)}(x) = \inf_{\tau} E^x_\infty \int\limits_0^{\tau} (\psi_u - c) du. \qquad (*)$$

Как показывается ниже, решения задач этого семейства при различных c соответствует оптимальным моментам в классах M_T при различных T.

Утверждение 1. *Оптимальное правило остановки в задаче* $(*)$ - $\tau_{A(c)} = \inf\{t : \psi_t \geq A(c)\}$ *для некоторого* $A(c)$.

Это утверждение является следствием следующего свойства траекторий процесса ψ

$$E^x_\infty \int_0^\tau \psi_s ds \leq E^y_\infty \int_0^\tau \psi_s ds,$$

если $x \leq y$. При помощи следующей вспомогательной леммы доказывается, что множество продолжения наблюдений имеет вид $[0, A]$, $A \in [0, \infty]$.

Лемма 1. *Рассматривается марковский процесс* Y_t *и задача*

$$H(T) = \inf_{\tau} E^0_\infty \int\limits_0^{\tau} f(Y_s) ds.$$

Пусть функция f *монотонно возрастает и* $f(0) \leq 0$. *Пусть выполнено условие*

$$E^a_\infty \int\limits_0^t f(Y_s) ds < E^b_\infty \int\limits_0^t f(Y_s) ds$$

для любого t, *если* $a < b$. *Тогда оптимальный момент имеет вид*

$$\tau^* = \tau_A = \inf\{t : Y_t \geq A\}$$

или

$$\sigma_A = \inf\{t : Y_t > A\}.$$

Итак, оптимальный момент в задаче для $v(c)$ найден - это $\tau_{A(c)}$.

Обозначим

$$T' = T'(c) = E\tau_{A(c)}.$$

Несложно показать, что $\tau_{A(c)}$ будет оптимальным в классе $M_{E\tau_{A(c)}}$ для нашей исходной задачи. Действительно,

$$E^{(x)}_\infty \int\limits_0^{\tau_A(c)} (\psi_s - c) ds \leq E^{(x)}_\infty \int\limits_0^{\tau} (\psi_s - c) ds,$$

полагая $x = 0$ и пользуясь $\int\limits_0^{\tau_{A(c)}} cds = \tau_{A(c)}c$, получаем

$$E^0_\infty \int\limits_0^{\tau_A(c)} \psi_s ds \le E^0_\infty \int\limits_0^{\tau} \psi_s ds + cE^0_\infty(\tau_{A(c)} - \tau).$$

Второе слагаемое в последнем выражении неотрицательное, так как момент $\tau_{A(c)}$ принадлежит классу $M_{E\tau_{A(c)}}$. Таким образом, мы нашли оптимальный момент в исходной задаче для $T = E\tau_{A(c)}$. Остается только установить, что для каждого T найдется такое $c(T)$, что $E_{A(c(T))} = T$. Для этого достаточно доказать 2 следующих утвержения.

Утверждение 2. *Функция $A(c)$ возрастает к бесконечности и непрерывна.*

Утверждение 3. *Функция $f(A) = E^0_\infty \tau_A$ возрастает к бесконечности и непрерывна.*

Эти утверждения доказываются при помощи анализа траекторий процесса ψ. Итогом первой главы является следующая теорема.

Теорема 1. *В задаче о разладке для произвольного процесса Леви в обобщенной байесовской постановке для любого T найдется оптимальный момент в классе $\mathcal{M}_T$. Это момент выхода процесса ψ на некоторый уровень A:*

$$\tau^* = \tau_A = \inf_{[0,+\infty)} \{t : \psi_t \ge A\}.$$

Уровень A определяется из соотношения

$$E^0_\infty \tau_A = T.$$

Глава 2.

Во второй главе рассматривается вопрос об асимптотическом поведении введенной выше функции $B(T)$ при T (среднем времени до ложной тревоги), стремящемся к бесконечности (для случая процессов Леви, имеющих конечное число скачков на конечных интервалах).

Исследуемая функция является решением некоторого уравнения. С целью поиска асимптотики доказана теорема о единственности этого уравнения для процессов Леви. Основываясь на результатах для броуновского движения (для которого известно точное решение), находится приближенное решение уравнеия. При помощи теоремы единственности доказывается, что это приближенное решение будет близко к истинному решению, так что асимптотическое поведение их будет совпадать.

Это асимптотическое поведение оказывается связанным с математическим ожиданием среднего времени выхода процесса ψ на некоторый уровень. Далее рассмотрены различные подклассы процессов Леви, допускающие явные формулы для асимптотики (т.е. те, для которых среднее время выхода процесса ψ на заданный уровень удается выразить через характеристики исходный процессов). Эта асимптотика интересна как сама по себе, так и в качестве оценки для функции потерь в задаче о разладке в минимаксной постановке. Дело в том, что для $C(T)$ - минимаксной функции потерь,

$$C(T) = \inf_{\sigma \in \mathcal{M}_T^*} \sup_{\theta \geq 0} E_\theta(\sigma - \theta | \sigma \geq \theta),$$

сложно найти оптимальный момент остановки, но верна оценка:

$$C(T) \geq B(T).$$

Задача рассматривается для так называемых базисных процессов Леви, а именно для процессов имеющих конечное число скачков на конечном интервале времени (процессы Левы конечной активности) или, иначе говоря, с конечной мерой Леви. При помощи теории задач об оптимальной остановке, получим, что $B(T)$ связано с решением задачи

$$\begin{cases} \mathcal{L}u(x) = -x, 0 \leq x \leq A, \\ u(x) = 0, x > A \end{cases}$$

соотношением $TB(T) = u(0)$ (здесь $\mathcal{L}$ - инфинитезимальный оператор процесса ψ). Заметим, что этот оператор является инегральнодифференциальным (из-за наличия у процессов Леви скачков), поэтому найти явное выражение для решения удается только в исключительных случаях. Однако этот оператор обладает свойствами, позволяющими найти приближенное решение последней задачи. Оказывается возможным установить единственность решения для этой задачи, а так же аналог непрерывной зависимости от начальных условий. При наличии диффузионной компоненты у рассматриваемых процессов Леви в выражении для инфинитезимального оператора будет присутствовать оператор взятия второй производной. Этот случай мы будем называть диффузионным и рассматривать отдельно от недиффузионного случая. Для нахождения асимптотики доказывается следующая теорема.

Теорема 2. *Решение задачи*

$$\begin{cases} \mathfrak{L}v(x) = 0, 0 \le x \le A, \\ v(x) = 0, x > A \end{cases}$$

единственно.

Используя явный вид оператора $\mathfrak{L}$, можно показать, что в нашей задаче верен сильный принцип максимума. Из теоремы о единственности решения однородного уравнения следует единственность решения соответствующего неоднородного уравнения (приведенного выше).

Теорема о единственности неоднородного уравнения позволяет получать аппроксимации для $B(T)$. Общая схема такова. Подбирается функция $u_a(x)$, удовлетворяющая уравнению

$$\begin{cases} \mathfrak{L}u_a(x) = -x + O(\ln x), 0 \le x \le A, \\ u_a(x) = 0, x \ge A. \end{cases}$$

Доказывается, что функция $u_a(x)$ близка к $u(x)$. Более точно, верно следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть для функций h, v, g выполнена система уравнений*

$$\begin{cases} \mathfrak{L}h(x) = v(x), 0 \le x \le A, \\ h(x) = 0, x > A, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathfrak{L}g(x) = o(v(x)), 0 \le x \le A, \\ g(x) = 0, x > A. \end{cases}$$

Тогда $g(0) = o(\max\{h(0), E^0_\infty \tau_A\})$.

Применим эту теорему, взяв в качестве $h(x)$ истинное решение, соответственно, $v(x)$ равно $-x$, а $g(x)$ есть разность истинного и приближенного решения. Получим искомую оценку на $g(x)$. Таким образом, задача сводится к нахождению функции $u_a(x)$.

В аналитически вычислимом случае разладки для броуновского движения получается функция $x \log x$. Для произвольного случая, где решение невозможно вычислить аналитически, получается, что главный член имеет такой же порядок. Используя набор функций $x \log x, x, logx$ с различными коэффициентами, удается найти приближение для $u(x)$.

Для случая наличия у ψ_t только направленных вниз скачков получено точное выражение главного члена асимптотики(т.е., он выражен через триплет характеристик). Имеет место следующее

Утверждение 4. *В случае отсутствия диффузионной компоненты у процесса ψ имеет место $B(T) \sim -C_1 \ln T$, точнее*

$$B(T) = \frac{\ln T}{\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} f(r) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} f(r) dP_0(r)} + O(1).$$

В диффузионном случае верно $B(T) \sim -D_1 \ln T$, точнее

$$B(T) = \frac{\ln T}{1 + \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} f(r) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} f(r) dP_0(r)} + O(1).$$

Здесь λ_0, λ_1 - интенсивности прыжков до и после разладки, соответственно.

Для случая произвольных скачков, найдена связь главного члена асимптотики и математического ожидания времени выхода на уровень A.

Теорема 3. *В недиффузионном случае*

$$B(T) = \frac{E_\infty \tau_A}{T} \cdot \frac{\ln T}{\lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} f(r) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} f(r) dP_0(r)} + O(1).$$

В диффузионном случае

$$B(T) = \frac{E_\infty \tau_A}{T} \cdot \frac{\ln T}{1 + \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\lambda_1}{\lambda_0} f(r) \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} f(r) dP_0(r)} + O(1).$$

Два предыдущих утверждения являются следствием из этой теоремы.

Автор выражает глубокую благодарность члену-корреспонденту РАН, профессору Альберту Николаевичу Ширяеву, под руководством которого проходила работа над диссертацией, за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Основные публикации автора по теме диссертации

1. Ф. А. Устинов, «Асимптотика среднего времени запаздывания в задаче о разладке для базисных процессов Леви в обобщенной байесовской постановке», УМН, 64:1(385) (2009), 161-162.

2. Ф.А. Устинов,«Задача скорейшего обнаружения смены режима для процессов Леви», Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2009 год, 2, 72-74.

3. Ф.А. Устинов, «Задача о разладке в обобщенной байесовской постановке», деп. в ВИНИТИ 24.03.2009, №153-В2009, 53 страницы.