МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.938.5

Логачев Александр Александрович

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ ПОТОКИ ИНВАРИАНТНЫХ МЕТРИК НА ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГРУПП ЛИ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, профессор Анатолий Михайлович Степин
	кандидат физико-математических наук Сергей Викторович Тихонов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Александр Николаевич Старков
	кандидат физико-математических наук Михаил Сергеевич Куликов
Ведущая организация:	Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 30 октября 2009 г. в 16 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 29 сентября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

И. Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Изучение вопроса о лиувиллевой интегрируемости гамильтоновых систем, и в частности геодезических потоков, имеет давнюю историю. Интегрируемость означает, что существует максимальный набор функционально независимых интегралов движения, попарные скобки Пуассона которых обращаются в нуль. Одним из наиболее известных примеров интегрируемых систем является геодезический поток инвариантной метрики на $SO(3)$, связанный с задачей о вращении твердого тела; эта задача впервые была рассмотрена Эйлером в 1758 году[1]. С появлением метода (L, A)-пары в теории гамильтоновых систем, список интегрируемых геодезических потоков был существенно расширен[2,3].

Полная классификация вполне интегрируемых G-инвариантных гамильтоновых систем с транзитивной простой группой Ли G конфигурационных симметрий получена И. В. Микитюком и А. М. Степиным (см. УМН, 1987, 42:4 и работу[4]). Динамические системы, исследованные в упомянутых выше работах, обладают полным инволютивным набором аналитических интегралов движения.

Проблема топологических препятствий к интегрируемости была поставлена В. В. Козловым[5,6]; он также обнаружил первое известное препятствие, доказав, что если на ориентированном замкнутом двумерном многообразии существует аналитически

[1] П. Уиттекер. Аналитическая механика. Москва, “Мир”, 1966.

[2] С. В. Манаков. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах // ЖЭТФ, 1974, 67(2), 543–555.

[3] А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко. Интегрируемость уравнений Эйлера на полупростых алгебрах Ли.// Труды семинара по векторному и тензорному анализу, 1979, 19, 3–94.

[4] I. V. Mikytyuk, A. M. Stepin. Classification of almost spherical pairs of compact simple lie groups.// Poisson Geometry, Banach Center Publications, 2000, 21, 231–241

[5] В. В. Козлов. Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем.// ДАН СССР, 1979, 249(6), 1299–1302.

[6] В. В. Козлов. Интегрируемость и неинтегрируемость в гамильтоновой механике.// Успехи Мат. Наук, 1983, 38(1), 1–76.

интегрируемый геодезический поток, то это многообразие гомеоморфно либо сфере, либо тору. Как было показано В. Н. Колокольцовым[7], это верно также для геодезических потоков на двумерных многообразиях, интегрируемых при помощи гладких интегралов, являющихся вещественно-аналитическими функциями от импульсов. Обобщение теоремы Козлова на многообразия большей размерности было получено И. А. Таймановым[8,9]. Ряд работ Г. П. Патернайна[10,11] посвящен изучению топологической энтропии интегрируемых геодезических потоков. Патернайн доказал, что если геодезический поток на гладком компактном римановом многообразии интегрируем, то фундаментальная группа такого многообразия имеет субэкспоненциальный рост.

Патернайн предложил использовать топологическую энтропию для поиска топологических препятствий к интегрируемости, разделив задачу на две: 1) доказательство обращения в нуль топологической энтропии интегрируемых геодезических потоков и 2) нахождение топологических препятствий для обращения в нуль топологической энтропии потока. По второй задаче уже имелись результаты М. Л. Громова[12] и И. Н. Иомдина[13], а также Е. И. Динабурга[14], который доказал, что если фундаментальная группа многообразия имеет экспоненциальный рост, то топологи-

[7] В. Н. Колокольцов. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом.// Изв. АН СССР, 1982, 46(5), 994–1010.

[8] И. А. Тайманов. Топологические препятсвия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвязных многообразиях.// Изв. АН СССР. Сер. мат.,1987, 51(2), 429–435.

[9] И. А. Тайманов. Топология римановых многообразий с интегрируемыми геодезическими потоками.// Тр. МИАН, 1994, 205, 150–163.

[10] G. P. Paternain. On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows.// Ergodic Theory and Dinamical Systems, 1992, 12, 109–121.

[11] G. P. Paternain. On the topology of manifolds with completely integrable geodesic flows, ii.// J. Geom. and Phys, 1994, 13, 289–298.

[12] M. Gromov. Entropy, homology and semialgebraic geometry. //Séminaire Bourbaki 38ème année, 1985-86, 663, 225–240.

[13] Y. Yomdin. Volume growth and entropy.// Israel J. Mathematics, 1987, 57, 287–300.

[14] Е. И. Динабург. Связь между различными энтропийными характеристиками динамических систем.// Известия АН СССР, 1971, 35(2), 324–366.

ческая энтропия геодезического потока любой гладкой метрики на многообразии положительна.

Другое направление — это построение полного набора интегралов для гамильтоновых систем и, в частности для геодезических потоков. А. Тимм[15] предложил метод нахождения набора интегралов в инволюции, используя инвариантность гамильтоновой системы под действием группы G. Серия примеров интегрируемых геодезических потоков на однородных нильмногообразиях с нулевой топологической энтропией была построена Л. Т. Батлером[16]. Используя "трюк" Батлера, А. В. Болсинов и И. А. Тайманов[17] опровергли гипотезу Патернайна и построили первый пример интегрируемого геодезического потока с положительной топологической энтропией. В работе[18] приведена серия таких потоков для некоторых метрик и групп Ли любой размерности. Батлер[19] расширил класс нильпотентных примеров и рассмотрел n-ступенно нильпотентные группы вида $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^n$, также доказав обращение в нуль топологической энтропии. В работе[20] были построены примеры геодезических потоков на нильмногообразиях с положительной топологической энтропией, которые, однако, не являются интегрируемыми.

В связи с этим отметим, что Степин высказал предположение о связи положительности топологической энтропии интегрируемых геодезических потоков на однородных пространствах групп Ли с существованием гиперболической компоненты присоеди-

---

[15] A. Thimm. Integrable geodesic flows on homogeneous spaces.// Ergodic Theory and Dynamical Systems, 1981, 1, 495–517.

[16] L. T. Butler. A new class of homogeneous manifolds with Liouville-integrable geodesic flows.// C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can., 1999, 21(4), 127–131.

[17] A. V. Bolsinov and I. A. Taimanov. Integrable geodesic flow with positive topological entropy.// Invent. Math, 2000, 140, 639–650.

[18] А. В. Болсинов and И. А. Тайманов. Интегрируемые геодезические потоки на надстройках автоморфизмов торов.// Труды Математического Института им. В.А. Стеклова, 2000, 231, 46–63.

[19] L. T. Butler. Integrable geodesic flows on n-step nilmanifolds.// Journal of Geometry and Physics, 2000, 36, 315–323.

[20] L. T. Butler. Invariant metrics on nilmanifolds with positive topological entropy.// Geometriae Dedicata, 2003, 100, 173–185.

ненного представления группы Ли.

Цель работы

Данная диссертация посвящена изучению геодезических потоков на однородных пространствах групп Ли с точки зрения интегрируемости и энтропийной теории. Также изучается свойство батлеровской интегрируемости. Основная цель данной работы - исследовать свойства геодезических потоков на трех- и четырехмерных однородных пространствах.

Научная новизна

В работе получен ряд новых результатов, основными из которых являются следующие:

1. Разработана техника обнаружения гладкой интегрируемости гамильтоновых систем.

2. Исследован вопрос об интегрируемости (неинтегрируемости) потоков геодезических на однородных пространствах групп Ли размерности 3 и 4.

3. Найдены пример интегрируемой системы с многозначным интегралом движения, а также случай неинтегрируемости по Батлеру.

Основные методы исследования

В работе были использованы метод редукции гамильтоновых систем с симметриями, подход Батлера для изучения интегрируемости и соображения Болсинова и Тайманова при доказательстве положительности топологической энтропии, а также другие методы и результаты теории гамильтоновых систем и энтропийной теории.

Практическая и теоретическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Ее методы и результаты могут найти применение в дальнейшем исследовании связи вопросов интегрируемости и топологической энтропии, нахождении препятствий к интегрируемости, а также в теории гамильтоновых систем.

Апробация результатов

Основные результаты работы неоднократно докладывались на семинаре “Динамические системы и эргодическая теория” кафедры теории функций и функционального анализа механико-математического факультета МГУ под руководством акад. РАН, проф. Д. В. Аносова, д. ф.-м. н., проф. А. М. Степина (2007, 2008 гг. и ранее). А также на III международной конференции “Математические идеи П. Л. Чебышева и их приложения к современным проблемам естествознания”, Обнинск, 2006 и на XXVII конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ, 2005.

Публикации

Результаты опубликованы в 3 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из оглавления, введения, двух частей и списка литературы, который включает 38 наименований. Общий объем диссертации - 100 страниц.

Краткое содержание работы

Работа состоит из двух частей и введения. Во введении дан обзор работ, в которых изучаются препятствия к интегрируемости гамильтоновых систем, приведены основные определения, а также излагаются основные результаты. Первая часть посвящена изучению геодезических потоков на однородных пространствах трехмерных групп Ли. Во второй части исследуются геодезические потоки на однородных пространствах четырехмерных групп Ли. Использовано описание трехмерных и четырехмерных групп и их дискретных подгрупп из источников [21,22].

В параграфе 1.1 дан перечень рассматриваемых трехмерных групп Ли и соответствующих дискретных кокомпактных подгрупп Γ в них. Случай 1 — нильпотентная группа Гейзенберга H_1. Случай 2 — разрешимая группа $S_1 = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{R}$ действует гиперболическими поворотами на $\mathbb{R}^2$. Случай 3 — разрешимая группа $S_2 = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^2$, где $\mathbb{R}$ действует поворотами на $\mathbb{R}^2$. И, наконец, случай 4 — $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Далее приводится описание левоинвариантных римановых метрик на этих группах. Во всех случаях кроме $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ приводится описание всех левоинвариантных метрик, а для $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ доказывается следующее утверждение.

Утверждение 1.1.2 Для случая $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ левоинвариантные метрики, имеющие однопараметрическую группу присоединенных симметрий, состоят из метрик, инвариантных относительно правых сдвигов на элементы подгруппы сопряженной с $\mathbb{S}^1 = SO(2, \mathbb{R})$.

В параграфе 1.2 исследуется интегрируемость соответствующих геодезических потоков. Геодезическому потоку на TG соответствует гамильтонова система на T^*G с функцией Гамильтона H, получаемая с помощью преобразования Лежандра. Приводятся нетеровские интегралы для действия группы G левыми сдвигами на самой себе, из них строятся наборы интегралов движения $I_1, I_2, I_3 = H$ для гамильтоновых систем на T^*G. Также доказывается для всех случаев, кроме $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, что гамильтоновы системы и, следовательно, геодезические потоки интегрируемы на TG.

---

[21] Л. Ауслендер, Л. Грин, Ф. Хан. Потоки на однородных пространствах. Москва, “Мир”, 1966.

[22] А. В. Сафонов. Группы преобразований и G-индуцированные потоки. Диссертация, 1982.

Определение 1.2.1(Butler[23]) Пусть (L^{2n}, ω) симплектическое многообразие и X_H — гамильтоново векторное поле на L^{2n} с гладкой функцией Гамильтона H. Пусть $(\tilde{L}^{2n}, \tilde{\omega})$ — накрытие L такое, что: (1) $\tilde{\omega} = \pi^*\omega$, где π — проектор; (2) на $\tilde{L}$ задано пуассоновское действие группы Ли S. Пусть $P : \tilde{L} \to \mathcal{S}^*$ отображение момента для действия S. Предположим, что функция $\tilde{H} = \pi^* H$ является S-инвариантной. Если существует инволютивный набор $n-1$ функционально независимых функций $f_1, \ldots, f_{n-1} \in C^\infty(\mathcal{S}^*)$ такой, что $f_1 \circ P, \ldots, f_{n-1} \circ P$ "опускается" на L^{2n} и вместе с функцией Гамильтона H является функционально независимым набором на всюду плотном, открытом подмножестве L^{2n}, тогда говорят, что векторное поле X_H почти полностью совместно интегрируемо (almost completely collectively integrable[ACCI]). Мы будем называть данное свойство батлеровской интегрируемостью.

Приводится модифицированный алгоритм изучения батлеровской интегрируемости с использованием конструкции фундаментальной области действия Γ на пространстве интегралов движения.

Определение 1.2.2 Фундаментальной областью для действия Γ в $\mathbb{R}^k$ мы будем называть такую область U, что $\Gamma U \cup U' = \mathbb{R}^k$, где мера U' равна нулю, и $\gamma_1 U \cap \gamma_2 U = \varnothing$ для $\forall \gamma_1 \neq \gamma_2 \in \Gamma$.

Для доказательства интегрируемости геодезических потоков на $T\Gamma \backslash G$ строятся интегралы движения соответствующих гамильтоновых систем на T^*G, инвариантные относительно действия Γ, и описываются критические множества для этих интегралов (множества точек, где нарушается условие функциональной независимости первых интегралов), тем самым устанавливается интегрируемость гамильтоновых систем на $T^*\Gamma\backslash G$. В доказательстве интегрируемости для произвольной дискретной кокомпактной подгруппы используется следующее следствие.

Следствие 1.2.7 Пусть $I_1, I_2, \ldots I_{n-1}$ инвариантный относительно Γ набор первых интегралов в инволюции такой, что для любой левоинвариантной метрики соответствующая ей га-

[23] L. T. Butler. A new class of homogeneous manifolds with liouville integrable geodesic flows. Preprint, 8, November 1998.

мильтонова система с функцией Гамильтона H интегрируема и $I_1, I_2, \ldots, I_{n-1}, H$ — полный набор интегралов в инволюции. Тогда для произвольного автоморфизма $\varphi : G \to G$ существует набор интегралов в инволюции $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \ldots, \tilde{I}_{n-1}$ инвариантный относительно $\varphi^{-1}(\Gamma)$ такой, что для любой левоинвариантной метрики соответствующая ей гамильтонова система интегрируема и $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \ldots, \tilde{I}_{n-1}, H$ - полный набор интегралов в инволюции.

Утверждение 1.2.9 Рассмотрим

$$\begin{array}{rll} \tilde{I}_1 = f(p_z)\sin\left(2\pi(\frac{p_y+xp_z}{p_z} - x)\right); & \tilde{I}_2 = I_2 = p_z; & \tilde{I}_3 = I_3 = H, \\ \tilde{I}_1 = f(p_xp_y)\sin\left(2\pi\frac{\ln|p_x|}{-k}\right); & \tilde{I}_2 = I_2 = p_xp_y; & \tilde{I}_3 = I_3 = H, \\ \tilde{I}_1 = p_x^2(p_x^2 - \frac{3}{4}(p_x^2+p_y^2))^2; & \tilde{I}_2 = I_2 = p_x^2+p_y^2; & \tilde{I}_3 = I_3 = H, \end{array}$$

где $f(x) = \exp -\frac{1}{x^2}$. Для любой левоинвариантной метрики и дискретной кокомпактной подгруппы Γ специального вида группы G в случаях 1, 2 и 3 (соответственно) функции $\tilde{I}_1$, $\tilde{I}_2$, $\tilde{I}_3$ являются интегралами движения в инволюции гамильтоновых систем соответственно и инвариантны относительно естественного действия подгруппы $\Gamma \subset G$ в пространстве интегралов.

Под специальным видом Γ в данном утверждении имеется в виду такие подгруппы, что для любой дискретной кокомпактной подгруппы существует автоморфизм группы, переводящий ее в специальный вид.

Для случаев 1 и 2 имеет место интегрируемость в классе C^∞-функций, а геодезический поток в случае 3 интегрируем в классе аналитических функций.

Утверждение 1.2.10 Множества критических точек для интегралов движения $\tilde{\psi} = (\tilde{I}_1,\ \tilde{I}_2,\ \tilde{I}_3)$ таковы

$$crit(\tilde{\psi}) = \{H'_{p_x} = 0,\ H'_x = 0\} \cup \{p_z = 0\} \cup \{\cos 2\pi\frac{p_y}{p_z} = 0\} \text{ — случай 1},$$

$$crit(\tilde{\psi}) \subset \{H'_{p_z} = 0\} \cup \{p_xp_y = 0\} \cup \{\cos\left(2\pi\frac{\ln p_x}{-k}\right) = 0\} \text{ — случай 2},$$

$$\begin{aligned} crit(\tilde{\psi}) \subset \{H'_{p_z} = 0\} \cup \{p_x = 0\} \cup \{p_y = 0\} \cup \\ \cup \{p_x^2 = 3p_y^2\} \cup \{p_x^2 = 3p_y^2\} \text{ — случай 3.} \end{aligned}$$

В параграфе 1.3 вычисляется топологическая энтропия для геодезических потоков, а также исследуются геодезические потоки на однородных пространствах $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$. Здесь и в дальнейшем под $S(\Gamma\backslash G)$ понимается пространство единичных линейных элементов на $\Gamma\backslash G$.

Утверждение 1.3.1 Для каждой левоинвариантной римановой метрики на H_1 и произвольной кокомпактной дискретной подгруппы $\Gamma \subset H_1$ соответствующий геодезический поток на $S(\Gamma\backslash H_1)$ интегрируем в классе C^∞-функций и имеет нулевую топологическую энтропию.

Для доказательства положительности топологической энтропии достаточно найти инвариантное подмножество, на котором поток обладает положительной топологической энтропией, в то время как для доказательства нулевой топологической энтропии необходимо рассмотреть что происходит с потоком на всем критическом множестве (в силу компактности конфигурационного пространства из теоремы Лиувилля следует, что вне критического множества топологическая энтропия нулевая).

Утверждение 1.3.2 Для каждой левоинвариантной римановой метрики на S_1 и произвольной кокомпактной дискретной подгруппы $\Gamma \subset S_1$ соответствующий геодезический поток на $S(\Gamma\backslash S_1)$ интегрируем в классе C^∞-функций и имеет положительную топологическую энтропию.

Утверждение 1.3.3 Для каждой левоинвариантной римановой метрики на S_2 и произвольной кокомпактной дискретной подгруппы $\Gamma \subset S_2$ соответствующий геодезический поток на $S(\Gamma\backslash S_2)$ интегрируем в классе аналитических функций и имеет нулевую топологическую энтропию.

Утверждение 1.3.5 Существует левоинвариантная метрика на $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ такая, что для каждой равномерной решетки $\Gamma \subset \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ соответствующий геодезический поток на $S(\Gamma\backslash\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}))$ имеет положительную топологическую энтропию и не является интегрируемым в классе C^∞-функций.

В параграфе 2.1 приводится перечень четырехмерных групп Ли G и их дискретных кокомпактных подгрупп Γ. Случай 1 — разрешимая группа $G_6^1 = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$, где три собственных значения действия $\mathbb{R}$ вещественные. Случай 2 — разрешимая группа

$G_6^2(k) = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$, где одно собственное значение для действия $\mathbb{R}$ вещественное, а два — комплексно сопряженных. Случай 3 — разрешимая группа $G_1^0 = \mathbb{R} \ltimes H_1$, где действие $\mathbb{R}$ гиперболическое. Случай 4 — разрешимая группа $G_3 = \mathbb{R} \ltimes H_1$, где действие $\mathbb{R}$ эллиптическое. Случай 5 и 5' — нильпотентные группы G_6^3 и G_6^4 — $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{R}^3$. Случай 6 — $\mathbb{R} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$.

В параграфе 2.2 дано описание левоинвариантных метрик и выписаны дифференциальные уравнения задающие соответствующие геодезические потоки.

В параграфе 2.3 исследуется интегрируемость соответствующих гамильтоновых потоков на T^*G и $T^*\Gamma\backslash G$. Приводятся нетеровские интегралы для всех случаев, кроме случая 6 (рассмотрен отдельно). Строятся функции от них и устанавливается интегрируемость потоков на T^*G (параграф 2.3.1). Затем для случаев 1, 2(при $k = 0$), 4, 5 и 5' строятся интегралы $\tilde{I}_1, \tilde{I}_2, \tilde{I}_3$ такие, что они инварианты относительно естественного действия специальных подгрупп Γ и устанавливается интегрируемость в классе C^∞-функций на $T^*\Gamma\backslash G$ (параграф 2.3.2).

Под подгруппами Γ специального вида, как и в трехмерных случаях, имеются в виду такие подгруппы, что для любой дискретной кокомпактной подгруппы существует автоморфизм группы, переводящий ее в специальный вид.

Исследована многозначная интегрируемость в случае 2 (параграф 2.3.3).

Утверждение 2.3.11 Для каждой левоинвариантной метрики на $G_6^2(k)$, $k \neq 0$ соответствующая гамильтонова система на $T^*G_6^2(k)$ аналитически интегрируема, а для дискретных кокомпактных подгрупп Γ специального вида гамильтонова система на $T^*\Gamma\backslash G_6^2(k)$ обладает многозначным C^∞-интегралом и интегрируема на открытой непустой части фазового пространства.

Там же приведен пример неинтегрируемости по Батлеру.

Утверждение 2.3.13 Для каждой левоинвариантной метрики на G_1^0, соответствующая гамильтонова система на $T^*G_1^0$ аналитически интегрируема, а для дискретных кокомпактных подгрупп Γ специального вида гамильтонова система на $T^*\Gamma\backslash G_1^0$ не является интегрируемой по Батлеру (для группы симметрий G_1^0).

В параграфе 2.4 исследуется топологическая энтропия гамильтоновых потоков на $T^*\Gamma\backslash G$.

Утверждение 2.4.1 Для каждой левоинвариантной римановой метрики на G_6^1 и произвольной кокомпактной дискретной подгруппы $\Gamma \subset G_6^1$ соответствующий геодезический поток на $S(\Gamma\backslash G_6^1)$ интегрируем в классе C^∞-функций и имеет положительную топологическую энтропию.

Утверждение 2.4.2 Для каждой левоинвариантной римановой метрики на $G_6^2(k)$, $k \neq 0$ и произвольной кокомпактной дискретной подгруппы $\Gamma \subset G_6^2(k)$ соответствующий геодезический поток на $S(\Gamma\backslash G_6^2(k))$ обладает многозначным C^∞-интегралом, интегрируем на открытой части фазового пространства и имеет положительную топологическую энтропию.

Утверждение 2.4.3 Для каждой левоинвариантной римановой метрики на $G_6^2(0)$ и произвольной кокомпактной дискретной подгруппы $\Gamma \subset G_6^2(0)$ соответствующий геодезический поток на $S(\Gamma\backslash G_6^2(0))$ аналитически интегрируем и имеет нулевую топологическую энтропию.

Утверждение 2.4.4 Для каждой левоинвариантной римановой метрики на G_1^0 и произвольной кокомпактной дискретной подгруппы $\Gamma \subset G_1^0$ соответствующий геодезический поток на $S(\Gamma\backslash G_1^0)$ не интегрируем по Батлеру (для группы симметрий G_1^0) и имеет положительную топологическую энтропию.

Утверждение 2.4.5 Для левоинвариантной римановой метрики $ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dz - xdy)^2 + d\tau^2$ на G_3 и некоторых кокомпактных дискретных подгрупп $\Gamma \subset G_3$ соответствующий геодезический поток на $S(\Gamma\backslash G_3)$ интегрируем в классе C^∞-функций и имеет нулевую топологическую энтропию.

Утверждение 2.4.6 Для каждой левоинвариантной римановой метрики на G_6^3 и произвольной кокомпактной дискретной подгруппы $\Gamma \subset G_6^3$ соответствующий геодезический поток на $S(\Gamma\backslash G_6^3)$ интегрируем в классе C^∞-функций и имеет нулевую топологическую энтропию.

Утверждение 2.4.7 Для каждой левоинвариантной римановой метрики на G_6^4 и произвольной кокомпактной дискретной подгруппы $\Gamma \subset G_6^4$ соответствующий геодезический поток на $S(\Gamma\backslash G_6^4)$ интегрируем в классе C^∞-функций и имеет нулевую топологическую энтропию.

Утверждение 2.4.8 Для каждой левоинвариантной метрики на $G = \mathbb{R} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ и произвольной равномерной решетки $\Gamma \subset G$ соответствующий геодезический поток на $S(\Gamma \backslash G)$ не интегрируем в классе аналитических функций.

Утверждение 2.4.9 Существует левоинвариантная риманова метрика на $G = \mathbb{R} \times \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ и существует дискретная кокомпактная подгруппа $\Gamma \subset G$ такие, что соответствующий геодезический поток на $S(\Gamma \backslash G)$ имеет положительную топологическую энтропию и не является интегрируемым в классе C^∞-функций.

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям — доктору физико-математических наук, профессору Анатолию Михайловичу Степину за постановку задач, ценные обсуждения и постоянное внимание к работе, и кандидату физико-математических наук Сергею Викторовичу Тихонову за полезные обсуждения и содействие в научной работе.

Работы автора по теме диссертации

1. А. А. Логачев, “О геодезических потоках инвариантных метрик на группах Ли размерности 3”, Вестник МГУ. Сер.1. Математика, механика., 2006, N2, стр. 54-56.

2. А. А. Логачев, “Энтропия геодезических потоков на однородных пространствах групп Ли”, Деп. в ВИНИТИ 09.12.08, №934-B2008.

3. А. А. Логачев, “О трюке Батлера и редукции для геодезических потоков”, Труды XXVII конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, 2005, стр. 85-90.