Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.552.4

Гордиенко Алексей Сергеевич

Коразмерности и кохарактеры полиномиальных тождеств и их обобщений

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Зайцев Михаил Владимирович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Михалев Александр Александрович
	доктор физико-математических наук, профессор Пчелинцев Сергей Валентинович
Ведущая организация:	Ульяновский государственный университет

Защита диссертации состоится 6 ноября 2009 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 6 октября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Одним из важных аспектов исследования алгебраических систем является изучение тех тождеств, которые выполняются в этих алгебраических системах. «Хотя тождества представляют собой простейшие замкнутые высказывания логического языка, язык тождеств все же достаточно богатый, чтобы на нем можно было выражать многие тонкие свойства систем и их классов» (А.И. Мальцев[1]) При исследовании тождеств в алгебрах естественным образом возникают числовые и теоретико-представленческие характеристики: коразмерности и кохарактеры. Коразмерности являются полезным инструментом при решении различных задач, например при доказательстве наличия или отсутствия нетривиальных тождеств[2,3]. Более того, коразмерности служат своеобразной оценкой количества тождеств, которым удовлетворяет конкретная алгебра. Кохарактеры заключают в себе информацию о структуре представления симметрической группы на факторпространстве пространства полилинейных многочленов по подпространству полилинейных тождеств соответствующей степени, являясь таким образом более тонкой характеристикой тождеств, чем коразмерности. Первые применения представлений симметрической группы в PI-теории следует отнести, по-видимому, к работам А.И. Мальцева[4] и В. Шпехта[5], опубликованным в 1950 году. Использование кохарактеров является одним из главных инструментов при изучении асимптотики коразмерностей. В качестве примера можно привести работы М.В. Зайцева и А. Джамбруно[6], А. Регева, А. Берела[7,8,9], В.С. Дренски[10,11] и многие другие. Асимптотиче-

[1]Мальцев А.И., *Алгебраические системы*, М.: Наука, 1970.

[2]Regev A., *Existence of identities in $A \otimes B$*, Israel J. Math, vol. 11, pp. 131–152 (1972).

[3]Regev A., *The representation of S_n and explicit identities for P.I. algebras*, J. Algebra, vol. 51, pp. 25–40 (1978).

[4]Мальцев А.И., *Об алгебрах с тождественными определяющими соотношениями*, Матем. сборник, том 26, стр. 19–33 (1950).

[5]Specht W., *Gesetze in Ringen. I*, Math. Z., vol. 52, pp. 557–589 (1950).

[6]Giambruno A., Zaicev M., *Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate*, Adv. Math., vol. 142, no. 2, pp. 221–243 (1999).

[7]Regev A., *Codimensions and trace codimensions of matrices are asymptotically equal*, Israel J. Math., vol. 48, no. 2–3, pp. 246–250 (1984).

[8]Berele A., *Properties of hook Schur functions with applications to p.i. algebras*, Advances in Applied Math., vol. 41, no. 1, pp. 52–75 (2008).

[9]Berele A., Regev A., *Asymptotic behaviour of codimensions of p.i. algebras satisfying Capelli identities*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 360, pp. 5155–5172 (2008).

[10]Drensky V.S., *Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebras*, J. Algebra, vol. 91, no. 1, pp. 1–17 (1984).

[11]Drensky V.S., *Relations for the cocharacter sequences of T-ideals*, Contemp. Math, Proc. of the International Conference on Algebra Honoring A. Malcev, vol. 131 (Part 2), pp. 285–300 (1992).

ское поведение коразмерностей и кохарактеров вызывает дополнительный интерес в связи с тем, что это поведение тесно связано со структурой изучаемой алгебры[6,12].

В 1984 году А. Регев показал[7], что коразмерности $c_n(M_k(F))$ полиномиальных тождеств алгебры $M_k(F)$ всех матриц $k \times k$ над произвольным полем F характеристики 0 имеют следующую асимптотику (здесь и далее $f \sim g$, если $\lim \frac{f}{g} = 1$):

$$c_n(M_k(F)) \sim \alpha_k n^{-\frac{k^2-1}{2}} k^{2n} \text{ при } n \to \infty, \tag{1}$$

где $\alpha_k = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{(k^2-1)/2} \cdot 1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot (k-1)! \cdot k^{(k^2+4)/2}$, $k \in \mathbb{N}$ фиксировано.

Основываясь на этом результате, С.А. Амицур выдвинул следующую гипотезу:

Гипотеза 1 (С.А. Амицур). *Пусть A — PI-алгебра над полем характеристики 0, а $c_n(A)$ — последовательность коразмерностей ее полиномиальных тождеств. Тогда существует $PI\exp(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} \in \mathbb{Z}_+$.*

Данная гипотеза была затем уточнена А. Регевом.

Гипотеза 2 (А. Регев). *Пусть A — PI-алгебра над полем характеристики 0. Тогда существуют такие $C > 0$, $r \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}_+$, что $c_n(A) \sim Cn^{\frac{r}{2}}d^n$ при $n \to \infty$. (В случае, когда $d = 0$, существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что при всех $n \geqslant n_0$ выполняется равенство $c_n(A) = 0$.)*

Гипотеза С.А. Амицура была доказана М.В. Зайцевым и А. Джамбруно[6] в 1999 году для всех ассоциативных алгебр. Кроме того, в 2002 году М.В. Зайцев[13] доказал аналог гипотезы Амицура для коразмерностей полиномиальных тождеств конечномерных алгебр Ли.

Гипотеза А. Регева была доказана В.С. Дренски для ассоциативных алгебр полиномиального роста[11], М.В. Зайцевым и А. Джамбруно[14] для алгебр блочно-треугольных матриц. В 2008 году вышла работа автора [4], в которой гипотеза Регева доказывается для ассоциативных алгебр с единицей, имеющих PI-экспоненту 2 (см. параграф 2.1 диссертации). В том же году А. Регев и А. Берел[8,9] доказали гипотезу Регева в более общем случае всех ассоциативных алгебр с 1.

---

[12] Zaicev M.V., Giambruno A., *Polynomial identities and asymptotic methods*, AMS Mathematical Surveys and Monographs Vol. 122, Providence, R.I., 2005.

[13] Зайцев М.В., *Целочисленность экспонент роста тождеств конечномерных алгебр Ли*, Изв. РАН, сер. матем., том 66, вып. 3, стр. 23–48 (2002).

[14] Giambruno A., Zaicev M., *Minimal varieties of algebras of exponential growth*, Electronic Research Announcements of the AMS, vol. 6, pp. 40–44 (2000).

Как уже было отмечено, большой интерес представляет изучение поведения кратностей неприводимых кохарактеров в разложении кохарактера полиномиальных тождеств. В 1979 году А. Регев[15] доказал теорему о полосе для кохарактеров алгебр, удовлетворяющих тождеству Капелли. В работе[16] А. Регева и А. Берела было показано, что рост кодлин, а отсюда и кратностей неприводимых кохарактеров всякой PI-алгебры ограничен сверху некоторой полиномиальной функцией. Вопросы, связанные с асимптотикой кратностей и кодлин также исследовались А. Джамбруно, И.Ю. Свиридовой и Ф. Бенанти[17,18]. В работах 2006 и 2008 года А. Берел[8,19] доказал, что кратности неприводимых кохарактеров произвольных PI-алгебр кусочно-полиномиальны, а кодлины PI-алгебр с единицей асимптотически ведут себя как Cn^t, где $C \in \mathbb{R}_+$, $t \in \mathbb{Z}_+$. Поведение кратностей неприводимых кохарактеров алгебр полиномиального роста изучалось В.С. Дренски[11]. В частности, им было доказано, что последовательность кратностей неприводимых кохарактеров, отвечающих диаграммам Юнга с фиксированными нижними строчками, периодична.

Несмотря на активную деятельность, которая ведется в этой области, известно сравнительно мало примеров алгебр, в которых можно явно вычислить базис тождеств, коразмерности, кохарактеры и кодлины: базис тождеств алгебры $M_2(F)$ был найден Ю.П. Размысловым[20] (позже В.С. Дренски[21] предъявил минимальный базис тождеств этой алгебры), кохарактеры алгебры $M_2(F)$ были найдены В.С. Дренски[10] и Е. Форманеком[22], точные значения коразмерностей для этой алгебры — С. Прочези[23]; базис тождеств и коразмерности алгебры Грассмана были вычислены Д. Краковски и А. Регевом[24], базис тождеств алгебр $UT_n(F)$ верхнетреугольных матриц — Ю.Н. Мальцевым[25]. В 2005 году вышла работа А. Джамбруно и

[15] Regev A., *Algebras satisfying a Capelli identity*, Israel J. Math, vol. 33, pp. 149–154 (1979).

[16] Berele A., Regev A., *Applications of hook Young diagrams to P.I. algebras*, J. Algebra, vol. 82, pp. 559–567 (1983).

[17] Benanti F., Giambruno A., Sviridova I., *Asymptotics for the multiplicities in the cocharacters of some PI-algebras*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 132, pp. 669–679 (2004).

[18] Свиридова И.Ю., *О верхней оценке степени кратностей кохарактеров PI-алгебр*, Фунд. и прикл. матем., том 10, вып. 4, стр. 207–223 (2004).

[19] Berele A., *Applications of Belov's theorem to the cocharacter sequence of p.i. algebras*, J. Algebra, vol. 298, pp. 208–214 (2006).

[20] Размыслов Ю.П., *О конечной базирумости тождеств матричной алгебры второго порядка над полем характеристики нуль*, Алгебра и логика, том 12, стр. 83–113 (1973).

[21] Дренски В.С., *Минимальный базис тождеств алгебры матриц второго порядка над полем характеристики* 0, Алгебра и логика, том 20, стр. 282–290 (1981).

[22] Formanek E., *Invariants and the ring of generic matrices*, J. Algebra, vol. 89, no. 1, pp. 178–223 (1984).

[23] Procesi C., *Computing with* 2×2 *matrices*, J. Algebra, vol. 87, no. 2, pp. 342–359 (1984).

[24] Krakowski D., Regev A., *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 181, pp. 429–438 (1973).

[25] Мальцев Ю.Н., *Базис тождеств алгебры верхнетреугольных матриц*, Алгебра и логика, том 10,

Д. Ла Маттины[26], в которой рассматривалась алгебра $\left\{\begin{pmatrix} x & a & c \\ 0 & x & b \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\right\}$. А.С. Виеира и С.М. Альвес Хорге[27] вычислили базис тождеств, коразмерности, кохарактеры и кодлины алгебры $\left\{\begin{pmatrix} x & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\right\}$. В связи с работой С.П. Мищенко и А. Валенти[28] представляет интерес изучение аналогичных характеристик алгебры $\left\{\begin{pmatrix} x & a & c \\ 0 & y & b \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}\right\}$. Два из трех тождеств базиса этой алгебры были указаны в книге В.С. Дренски[29].

В теории полиномиальных тождеств можно выделить два философских подхода. При одном подходе отправной точкой служат фиксированные алгебры, каждая из которых задает T-идеал в свободной алгебре, состоящий из ее полиномиальных тождеств. При другом подходе изначально рассматривается набор тождеств, задающий многообразие тех алгебр, которые этому набору тождеств удовлетворяют. Результаты, касающиеся коммутатора длины 4, относятся ко второму подходу. Данное тождество является естественным обобщением соотношения $[x_1, x_2, x_3]$, которое образует базис тождеств бесконечно порожденной алгебры Грассмана[24]. Коммутатор длины 4 изучался в работе В.Н. Латышева[30]. В 1978 году И.Б. Воличенко[31] вычислил комбинаторными методами его коразмерности. В случае произвольного поля характеристики нуль А.Р. Кемером[32,33] было доказано существование конечномерной супералгебры, T-идеал полиномиальных тождеств грассмановой оболочки которой совпадает с заданным. Однако вид этой супералгебры в конкретном случае неизвестен. Поэтому представляет интерес построение конечномерной супералгебры, базис тождеств грассмановой оболочки которой состоит из коммутатора длины 4.

Во многих областях математики и теоретической физики применяются

вып. 4, стр. 393–400 (1971).

[26]Giambruno A., La Mattina D., *PI-algebras with slow codimension growth*, J. Algebra, vol. 284, pp. 371–391 (2005).

[27]Vieira A.C., Alves Jorge S.M., *On minimal varieties of quadratic growth*, Linear Algebra and its Applications, vol. 418, pp. 925–938 (2006).

[28]Mishchenko S.P., Valenti A., *A star-variety with almost polynomial growth*, J. Algebra, vol. 223, no. 1, pp. 66–84 (2000).

[29]Drensky V.S., *Free algebras and PI-algebras: graduate course in algebra*, Springer-Verlag, Singapore, 2000, 270 pp.

[30]Латышев В.Н., *О конечной порожденности T-идеала с элементом* $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, Сибирский математический журнал, том VI, вып. 6, стр. 1432–1434 (1965).

[31]Воличенко И.Б., *T-идеал, порожденный элементом* $[x_1, x_2, x_3, x_4]$, препринт №22, Минск: Институт математики АН Белорусской ССР, 1978.

[32]Кемер А.Р., *Представимость приведенно-свободных алгебр*, Алгебра и логика, том 27, вып. 3, стр. 274–294 (1988).

[33]Kemer A., *Ideals of identities of associative algebras*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 87, AMS, Providence, RI, 1991.

алгебры Клиффорда[34,35]. Так, например, в 1997 году вышла книга А.А. Кецариса[36], в которой он предложил свой вариант единой теории взаимодействия. Действие стало векторной величиной — элементом алгебры действия. Далее определялась волновая функция элементарной частицы, ее импульс и из законов умножения в алгебре действия путем дифференцирования выводились основные уравнения квантовой механики — уравнения Шредингера и Дирака. Кроме того, была введена структура алгебры на пространстве-времени. В качестве алгебр действия и пространства-времени для электронов и других лептонов были предложены алгебры Клиффорда. Отсюда большой интерес вызывают тождества в алгебрах Клиффорда, так как зная их, можно было бы получить другие уравнения квантовой механики и попытаться их проинтерпретировать в рамках создаваемых теорий. До этого были исследованы тождества в алгебре Грассмана[24], которая является алгеброй Клиффорда нулевой квадратичной формы, и алгебрах Клиффорда полного ранга (в более общем случае конечномерных полупростых алгебр)[7,10,22,23].

Кроме обычных тождеств, важную роль в теории колец играют их различные обобщения. Изучение обобщенных полиномиальных тождеств в примитивных кольцах началось в 1965 году в работе С.А. Амицура[37]. Затем У. Мартиндейлом[38] были получены условия наличия нетривиальных обобщенных полиномиальных тождеств в первичных кольцах. Впоследствии результаты GPI-теории были обобщены К.И. Бейдаром и А.В. Михалевым[39] на случай полупервичных колец. Функциональные и обобщенные функциональные тождества были введены в 1995 году словенским математиком М. Брешаром[40] и были затем использованы К.И. Бейдаром, А.В. Михалевым и М.А. Чеботарем[41,42] в решении ряда открытых проблем теории

[34] Hestenes D., *Space-time algebra*, Gordon & Breach, N.Y., 1966.

[35] Fauser B., *Clifford-algebraische Formulierung und Regularität der Quantenfeldtheorie.* Dissertation zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften. Der Fakultät für Physik der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen, 1996.

[36] Кецарис А.А., *Алгебраические основы физики. Пространство-время и действие как универсальные алгебры*, М.: Эдиториал УРСС, 2004.

[37] Amitsur S.A., *Generalized polynomial identities and pivotal monomials*, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 9, pp. 635–642 (1958).

[38] Martindale W.S. 3rd: *Prime rings satisfying a generalized polynomial identity*, J. Algebra, vol. 12, pp. 576–584 (1969).

[39] Beidar K.I., Martindale W.S. 3rd, Mikhalev A.V., *Rings with generalized polynomial identities*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.

[40] Brešar M., *Functional identities of degree two*, J. Algebra, vol. 172, pp. 690–720 (1995).

[41] Бейдар К.И., Михалев А.В., Чеботарь М.А., *Тождества в кольцах*, Тула: Издательство ТулГУ, 2003.

[42] Бейдар К.И., Михалев А.В., Чеботарь М.А., *Функциональные тождества в кольцах и их приложения*, Успехи мат. наук, том 59, вып. 3, стр. 3–30 (2004).

колец. В частности, при помощи функциональных тождеств были описаны отображения лиевского типа, что позволило получить ответы на вопросы, сформулированные в известных проблемах Херстейна. В связи с тем, что для обобщенных полиномиальных, функциональных и обобщенных функциональных тождеств естественным образом вводятся их коразмерности, возникает вопрос о справедливости для таких коразмерностей аналогов гипотез Амицура и Регева.

Цель работы

- Доказать гипотезу А. Регева для коразмерностей полиномиальных тождеств ассоциативных алгебр с единицей, имеющих PI-экспоненту 2.
- Обобщить результат В.С. Дренски о периодичности последовательности кратностей неприводимых кохарактеров в разложении обычного кохарактера ассоциативных алгебр полиномиального роста. Исследовать периодичность кратностей собственных кохарактеров ассоциативных алгебр с единицей, имеющих PI-экспоненту 2.
- Доказать аналоги гипотез С.А. Амицура и А. Регева для коразмерностей обобщенных полиномиальных тождеств. Получить критерий конечности коразмерностей обобщенных полиномиальных тождеств в терминах структуры алгебры.
- Доказать аналоги гипотез С.А. Амицура и А. Регева для коразмерностей функциональных и обобщенных функциональных тождеств.
- Исследовать тождества и коразмерности алгебры $\left\{\left(\begin{smallmatrix} x & a & c \\ 0 & y & b \\ 0 & 0 & x \end{smallmatrix}\right)\right\}$. Получить оценки на коразмерности и кохарактеры алгебр Клиффорда, выявить для алгебр Клиффорда ранга 1 полилинейное тождество наименьшей степени. Построить конечномерную супералгебру, базис тождеств грассмановой оболочки которой состоит из многочлена $[x_1, x_2, x_3, x_4]$.

Научная новизна

1. Доказана гипотеза А. Регева для коразмерностей полиномиальных тождеств ассоциативных алгебр с единицей, имеющих PI-экспоненту 2. Доказано, что при фиксированных нижних строчках

последовательность кратностей неприводимых кохарактеров в разложении обычного кохарактера ассоциативных алгебр полиномиального роста, начиная с некоторого места, постоянна. Благодаря этому получено новое доказательство гипотезы А. Регева для коразмерностей полиномиальных тождеств алгебр полиномиального роста. Доказано, что если в диаграмме Юнга фиксированы все строчки, кроме первой, или все столбцы, кроме первого, то кратность вхождения соответствующего неприводимого кохарактера в собственный кохарактер ассоциативных алгебр с единицей, имеющих PI-экспоненту 2, начиная с некоторого места, имеет период 2.

2. Доказаны аналоги гипотез С.А. Амицура и А. Регева для коразмерностей обобщенных полиномиальных тождеств ассоциативных алгебр. Оказалось, что экспоненты роста коразмерностей обычных и обобщенных полиномиальных тождеств совпадают. Получены критерии конечности коразмерностей обобщенных полиномиальных тождеств в терминах структуры алгебры.

3. Доказаны аналоги гипотез С.А. Амицура и А. Регева для коразмерностей функциональных и обобщенных функциональных тождеств произвольных необязательно ассоциативных алгебр над полями любой характеристики.

4. Вычислены базис тождеств и коразмерности алгебры $\left\{\left(\begin{smallmatrix} x & a & c \\ 0 & y & b \\ 0 & 0 & x \end{smallmatrix}\right)\right\}$. Получены оценки на коразмерности и кохарактеры алгебр Клиффорда, выявлены полилинейные тождества наименьшей степени для алгебр Клиффорда ранга 1. Построена конечномерная супералгебра, базис тождеств грассмановой оболочки которой состоит из многочлена $[x_1, x_2, x_3, x_4]$. Это позволило вычислить коразмерности данного тождества новым способом.

Основные методы исследования

В работе используются методы теории полиномиальных тождеств, структурной теории колец, теории представлений, тензорной и линейной алгебры.

Теоретическая и практическая ценность работы

Работа имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для алгебры, комбинаторики, теоретической и математической физики.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры МГУ, 2009 г.;
- на семинаре «Избранные вопросы алгебры» кафедры высшей алгебры МГУ, 2005 – 2009 гг.;
- на международной алгебраической конференции, посвященной 100-летнему юбилею профессора А.Г. Куроша, Москва, МГУ, 2008 г. (тезисы [7]);
- на международном алгебраическом семинаре, посвященном 80-летнему юбилею члена-корреспондента РАН, профессора А.И. Кострикина, Москва, МГУ, 2009 г.;
- на международной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвященной 70-летнему юбилею академика РАН, профессора В.А. Садовничего, Москва, МГУ, 2009 г.;
- на семинаре профессора А. Бака, университет г. Билефельда, Германия, 2007 г.;
- на конференции «Ломоносовские чтения», Москва, МГУ, 2009 г.;
- на XVI международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов», Москва, МГУ, 2009 г.;
- на мини-конференции, посвященной 85-летнему юбилею профессора А.Д. Мышкиса, Москва, МИЭМ, 2005 г.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 7 работах, из них 5 в журналах из перечня ВАК. Список данных работ приводится в конце автореферата [1–7].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, 4 глав и заключения. Список литературы включает 58 наименований. Общий объем диссертации составляет 106 страниц.

Краткое содержание работы

В **первой главе** приводятся необходимые сведения из теории колец, теории полиномиальных тождеств и теории представлений.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное множество, F — поле характеристики нуль, $F\langle X\rangle$ — свободная ассоциативная алгебра над полем F, т.е. алгебра всех многочленов от счетного набора некоммутирующих переменных X с коэффициентами из F. Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра над полем F. Многочлен $f \in F\langle X\rangle$ называется *обычным полиномиальным тождеством* для алгебры A, если $f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$ для всех a_1, a_2, $\ldots$, $a_n \in A$.

Совокупность $Id(A)$ полиномиальных тождеств алгебры A является T-идеалом в $F\langle X\rangle$, т.е. $\rho(Id(A)) \subseteq Id(A)$ для всех $\rho \in \mathrm{End}(F\langle X\rangle)$. Если $Id(A) \neq 0$, то A называется *PI-алгеброй*. Обозначим через P_n пространство полилинейных многочленов от некоммутирующих переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n с коэффициентами из поля F, тогда число $c_n(A) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ называется *n-й коразмерностью обычных полиномиальных тождеств* алгебры A.

На $\frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ определена естественная структура FS_n-модуля. Характер $\chi_n(A)$ представления группы S_n на пространстве $\frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$ называется *n-м кохарактером обычных полиномиальных тождеств* алгебры A. Как известно, каждому неприводимому представлению S_n соответствует разбиение $\lambda \vdash n$ числа n на положительные слагаемые.

Многочлен, являющийся линейной комбинацией произведений вида $[x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}][x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_\ell}] \ldots [x_{i_p}, \ldots, x_{i_r}]$, называется *собственным*. Обозначим через Γ_ℓ пространство собственных полилинейных многочленов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_\ell$. Характер $\eta_\ell(A)$ представления группы S_ℓ на пространстве $\frac{\Gamma_\ell}{\Gamma_\ell \cap Id(A)}$ называется *ℓ-м собственным кохарактером* алгебры A.

Вторая глава посвящена изучению обычных полиномиальных тождеств, их коразмерностей и кохарактеров.

В параграфе 2.1 доказываются следующие теоремы:

Теорема 1. *Пусть A — (необязательно конечномерная) алгебра с 1 над полем F, $\operatorname{char} F = 0$, причем $PI\exp A = 2$. Тогда в алгебре A выполнена гипотеза Регева.*

Теорема 2. *Пусть A — алгебра с 1 над полем F, $\operatorname{char} F = 0$, причем $PI\exp A = 2$. Тогда существуют такие числа p, $\ell_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $\nu \vdash \ell$ выполнено*

$$k(\nu_1,\ldots,\nu_s) = k(\nu_1+2,\nu_2,\ldots,\nu_s) \text{ при } \ell > \ell_1 \text{ и } \nu_1 > p,$$

$$k(\nu_1,\ldots,\nu_s) = k(\nu_1,\ldots,\nu_s,1,1) \text{ при } \ell > \ell_1 \text{ и } s > p,$$

$$k(\nu_1,\ldots,\nu_s) = 0 \text{ при } \sum_{i=2}^{s}\nu_i \geqslant p \text{ и } \sum_{i=1}^{s}(\nu_i-1) \geqslant p,$$

где $\eta_\ell(A) = \sum\limits_{\nu\vdash\ell} k(\nu)\chi_\nu$ — разложение собственного кохарактера в сумму неприводимых.

Теорема 3. *Пусть A — алгебра (необязательно с единицей) над полем F, $\operatorname{char} F = 0$, причем $PI\exp A = 1$. Тогда существуют такие числа p, $n_1 \in \mathbb{N}$, что для всех $\lambda \vdash n$ выполнено*

$$m(\lambda_1,\ldots,\lambda_s) = m(\lambda_1+1,\ldots,\lambda_s) \text{ при } n > n_1,$$

$$m(\lambda_1,\ldots,\lambda_s) = 0 \text{ при } \sum_{i=2}^{s}\lambda_i \geqslant p,$$

где $\chi_n(A) = \sum\limits_{\lambda\vdash n} m(\lambda)\chi_\lambda$ — разложение обычного кохарактера в сумму неприводимых.

В доказательстве теорем 2 и 3 показывается, что исследуемые кратности ограничены. Для многочленов определенного вида, линейно независимых по модулю полиномиальных тождеств, строятся их линейно независимые аналоги бо́льших степеней, отвечающие аналогичным диаграммам Юнга. Справедливость теоремы 1 следует из теоремы 2.

Теорема 3 является обобщением результата В.С. Дренски[11] о периодичности кохарактеров алгебр полиномиального роста и позволяет доказать гипотезу А. Регева для таких алгебр новым способом.

В параграфе 2.2 вычисляются базис, коразмерности, кодлины и кохарактеры полиномиальных тождеств алгебры, состоящей из верхнетреугольных матриц 3×3 вида $\left(\begin{smallmatrix} x & a & c\\ 0 & y & b\\ 0 & 0 & x\end{smallmatrix}\right)$ над полем F нулевой характеристики. В параграфе 2.3 обсуждаются графы коммутативности и их алгебры, которые затем используются в последующих параграфах. Параграф 2.4 посвящен изучению тождеств в алгебрах Клиффорда. В нем получены оценки на коразмерности и кохарактеры алгебр Клиффорда, выявлены полилинейные тождества наименьшей степени для алгебр Клиффорда ранга 1. В параграфе 2.5 строится конечномерная супералгебра, базис тождеств грассмановой оболочки которой состоит из коммутатора длины 4. Это позволяет вычислить коразмерности данного тождества новым способом.

В **третьей главе** доказываются аналоги гипотез С.А. Амицура и А. Регева для обобщенных полиномиальных тождеств, а также критерий конечности обобщенных коразмерностей.

Пусть A — ассоциативная алгебра над некоторым полем F.

Многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle *_F A$ называется *обобщенным полиномиальным тождеством* алгебры A, если $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ для всех $a_i \in A$, $1 \leqslant i \leqslant n$. (Здесь знаком $*$ обозначено свободное произведение, или, в другой терминологии, некоммутативное копроизведение алгебр.) Понятно, что обобщенные тождества алгебры A образуют идеал в алгебре $F\langle X\rangle *_F A$. Обозначим этот идеал через $GId(A)$.

Пример. Пусть $A = M_2(F)$, тогда

$$e_{11}xe_{11}ye_{11} - e_{11}ye_{11}xe_{11} \in GId(M_2(F)).$$

(Для проверки достаточно подставить матричные единицы e_{ij}.)

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и

$$V_n(A) = \langle a_0 x_{\sigma(1)} a_1 x_{\sigma(2)} a_2 \ldots a_{n-1} x_{\sigma(n)} a_n \mid \sigma \in S_n, a_i \in A \cup \{1\}\rangle_F.$$

Элементы пространства $V_n(A)$ называются *обобщенными полилинейными многочленами* от переменных x_1, x_2, ..., x_n с коэффициентами в алгебре A. Последовательность $gc_n(A) = \dim \frac{V_n(A)}{V_n(A)\cap GId(A)}$ коразмерностей обобщенных полиномиальных тождеств назовем *последовательностью обобщенных (полиномиальных) коразмерностей* алгебры A.

В диссертации доказываются следующие теоремы:

Теорема 4. *Пусть A — ассоциативная алгебра над полем F характеристики 0, причем $A = I + J$ — сумма идеалов, $\dim_F I < +\infty$, а J — нильпотентен. Тогда существуют $n_0 \in \mathbb{N}$, $C \in \mathbb{Q}_+$, $r \in \mathbb{Z}_+$, что $gc_n(A) < +\infty$ при $n \geqslant n_0$ и $gc_n(A) \sim Cn^r d^n$ при $n \to \infty$. Здесь $d = PI\exp(A) \in \mathbb{Z}_+$.*

Теорема 5. *Пусть A — ассоциативная алгебра над произвольным полем F. Если $gc_n(A) < +\infty$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то $A = I + J$ для некоторых идеалов I и J, причем $\dim_F I < +\infty$, а J — нильпотентен.*

Следствие. *Если A — ассоциативная алгебра над некоторым полем F характеристики* 0 *и для некоторого $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие $gc_n(A) < +\infty$, то для обобщенных полиномиальных тождеств такой алгебры справедливы аналоги гипотез С.А. Амицура и А. Регева.*

В доказательстве теоремы 4 случай бесконечномерной алгебры сводится к конечномерному случаю. Переменные переупорядочиваются при помощи введения их «фантомов». Определяется действие произведений групп подстановок на пространствах обобщенных полилинейных многочленов и показывается, что в разложения этих пространств в сумму неприводимых подмодулей входят только те подмодули, которые отвечают наборам диаграмм Юнга с длинными первыми строчками. Также доказывается, что кратности таких подмодулей с ростом числа клеток в первых строчках почти всюду постоянны. При помощи этого получается требуемая асимптотика. В доказательстве теоремы 5 показывается, что факторалгебра по радикалу Джекобсона всякой алгебры, удовлетворяющей условиям теоремы 5, конечномерна, а сам радикал нильпотентен.

Четвертая глава посвящена изучению асимптотики коразмерностей функциональных и обобщенных функциональных тождеств.

Пусть A — необязательно ассоциативная алгебра над полем F произвольной характеристики. Выражение

$$\sum_{i=1}^{n} \left(G_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)x_i + x_i H_i(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)\right)$$

назовем *полилинейным функциональным многочленом* степени n с коэффициентами в алгебре A. Здесь $G_i, H_i \colon A^{\otimes(n-1)} \to A$ — произвольные F-линейные отображения, $n \geqslant 2$. Линейными функциональными многочленами степени 1 будем называть выражения вида $cx + xd$, где $c, d \in A$. Полилинейные функциональные многочлены степени n образуют векторное пространство, которое мы обозначим через $FP_n(A)$.

Пусть $f \in FP_n(A)$. Если $f(p_1, \ldots, p_n) = 0$ для всех $p_1, \ldots, p_n \in A$, то говорят, что f — *функциональное тождество* алгебры A. Понятно, что множество $FId_n(A)$ полилинейных функциональных тождеств степени $n \in \mathbb{N}$ является линейным подпространством в пространстве $FP_n(A)$. Коразмерности $fc_n(A) = \dim \frac{FP_n(A)}{FId_n(A)}$ функциональных тождеств назовем *функциональными коразмерностями* алгебры A.

Пример. Пусть A — алгебра с единицей, $H \colon A \to A$ — линейное отображение, переводящее единицу в единицу, а остальные элементы базиса — в 0. Тогда $H(x)y - yH(x) \in FId_2(A)$.

Аналогично, выражение

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{\ell}(G_{ik}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)x_ia_{ik}+$$
$$+b_{ik}x_iH_{ik}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n))$$

назовем *обобщенным полилинейным функциональным многочленом* степени n с коэффициентами в алгебре A. Здесь $G_{ik}, H_{ik}\colon A^{\otimes(n-1)} \to A$ — произвольные F-линейные отображения, $a_{ik}, b_{ik} \in A\cup\{1\}$, $n \geqslant 2$, $\ell \in \mathbb{N}$. Скобки на произведениях расставляются произвольно. Линейными обобщенными функциональными многочленами степени 1 будем называть выражения вида $\sum\limits_{k=1}^{\ell} a_kxb_k + cx + xd$, где $a_k, b_k, c, d \in A$, $\ell \in \mathbb{N}$. Полилинейные обобщенные функциональные многочлены степени n образуют векторное пространство, которое мы обозначим через $GFP_n(A)$.

Пусть $f \in GFP_n(A)$. Тогда, как и в случае обычных функциональных тождеств, говорят, что f — *обобщенное функциональное тождество* алгебры A, если $f(p_1,\ldots,p_n) = 0$ для всех $p_1,\ldots,p_n \in A$. Множество $GFId_n(A)$ полилинейных функциональных тождеств степени $n \in \mathbb{N}$ является линейным подпространством в пространстве $GFP_n(A)$. Коразмерности $gfc_n(A) = \dim\frac{GFP_n(A)}{GFId_n(A)}$ обобщенных функциональных тождеств назовем *обобщенными функциональными коразмерностями* алгебры A.

Пример. Пусть A — алгебра Грассмана с порождающими e_i, $H\colon A \to A$ — линейное отображение, переводящее e_1 в e_1, а остальные элементы базиса — в 0. Тогда $H(x)ye_1 \in GFId_2(A)$.

Центральное место в четвертой главе занимает

Теорема 6. *Пусть A — необязательно ассоциативная алгебра над некоторым полем F произвольной характеристики, $A^2 = \langle ab \mid a,b \in A\rangle_F$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $A^2 = 0$, то $fc_n(A) = gfc_n(A) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*
2. *Если $A^2 \neq 0$ и $\dim A = +\infty$, то $fc_n(A) = gfc_n(A) = +\infty$ для всех $n \geqslant 2$.*
3. *Если $A^2 \neq 0$ и $\dim A < +\infty$, то*

$$fc_n(A) \sim gfc_n(A) \sim \dim\left(A^2\right)\cdot(\dim A)^n \text{ при } n\to\infty.$$

Следствие. *Для функциональных и обобщенных функциональных тождеств конечномерных алгебр справедливы аналоги гипотез С.А. Амицура и А. Регева.*

В доказательстве теоремы 6 используются естественные вложения

$$\frac{FP_n(A)}{FId_n(A)} \subseteq \frac{GFP_n(A)}{GFId_n(A)} \subseteq \mathrm{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2).$$

Размерность подпространств оценивается при помощи введения упорядочения на элементах базиса пространства $\mathrm{Hom}_F(A^{\otimes n}; A^2)$ и построения функциональных многочленов специального вида.

Благодарности

Автор благодарит своего научного руководителя, доктора физико-математических наук, профессора Михаила Владимировича Зайцева за постановку задач и внимательное руководство в процессе исследовательской деятельности. Автор глубоко признателен профессору Александру Васильевичу Михалеву и профессору Виктору Николаевичу Латышеву за интерес, проявленный к работе. Александр Васильевич обратил внимание автора на задачи, связанные с алгебрами Клиффорда, обобщенными полиномиальными и функциональными тождествами. Автор искренне благодарен профессору Ю.А. Бахтурину и члену-корреспонденту Болгарской АН, профессору В.С. Дренски за внимание к работе. Автор благодарит участников семинара «Избранные вопросы алгебры» и всех сотрудников кафедры за обсуждение результатов диссертации и творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

Автор посвящает работу своим родителям.

Работы автора по теме диссертации

[1] А.С. Гордиенко, *Коразмерность и кодлина одной пятимерной алгебры*, Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Математика. Механика, вып. 4, стр. 18–25 (2006).

[2] А.С. Гордиенко, *Коразмерности коммутатора длины* 4, Успехи мат. наук, том 62, вып. 1, стр. 191–192 (2007).

[3] А.С. Гордиенко, *О тождествах в алгебрах Клиффорда*, Сибирский математический журнал, том 49, вып. 1, стр. 61–66 (2008).

[4] А.С. Гордиенко, *Гипотеза Регева и кохарактеры тождеств ассоциативных алгебр PI-экспоненты* 1 *и* 2, Матем. заметки, том 83, вып. 6, стр. 815–824 (2008).

[5] А.С. Гордиенко, *Коразмерности функциональных тождеств*, Успехи мат. наук, том 64, вып. 1, стр. 141–142 (2009).

[6] А.С. Гордиенко, *Гипотезы Амицура и Регева для коразмерностей обобщённых полиномиальных тождеств*, Фундамент. и прикл. математика, том 14, вып. 7, стр. 53–62 (2008).

[7] А.С. Гордиенко, *Асимптотика коразмерностей обобщенных полиномиальных тождеств*, Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша, тезисы докладов, Москва, 2008, стр. 73–74.