МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 511.9

ДОБРОВОЛЬСКИЙ Михаил Николаевич

Некоторые теоретико-числовые методы приближенного анализа

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико – математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор Чубариков Владимир Николаевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Журавлев Владимир Георгиевич
	кандидат физико-математических наук, Кан Игорь Давидович
Ведущая организация:	Московский государственный педагогический университетет

Защита диссертации состоится 6 ноября 2009 г. в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, дом 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомится в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 6 октября 2009 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Возникновение метода тригонометрических сумм обычно связывают с основополагающей работой Г. Вейля [1], хотя впервые частный случай полных рациональных тригонометрических сумм встречается уже в первой половине XIX века в исследованиях К. Ф. Гаусса по квадратичным вычетам [2]. Он рассматривал суммы второй степени, называемые теперь суммами Гаусса. В указанной работе Г. Вейля, вышедшей в 1916 году, содержался интегральный критерий равномерного распределения последовательности по модулю 1 и были получены первые нетривиальные оценки тригонометрических сумм.

Теория равномерного распределения по модулю 1 и оценки А. Вейля полных рациональных тригонометрических сумм по простому модулю лежали в основе теоретико-числового метода в приближенном анализе, созданного Н. М. Коробовым в 1957 году [3].

Первым классом многомерных теоретико-числовых сеток были предложенные Н. М. Коробовым неравномерные сетки, обеспечивавшие детерминированные оценки погрешности приближенного вычисления многомерных интегралов вместо вероятностных оценок того же порядка точности, получающихся по методу Монте-Карло Д. фон Неймана. В отличие от равномерных сеток, качество которых быстро убывало с ростом размерности единичного s-мерного куба, основной области интегрирования, неравномерные сетки имели порядок убывания погрешности приближенного интегрирования в зависимости от числа узлов многомерной квадратурной формулы одинаковый для всех размерностей. С ростом размерности росла только константа в оценке погрешности.

Принципиальный прорыв в теории и практике вычисления кратных интегралов от гладких периодических функций многих переменных связан с методом оптимальных коэффициентов Н. М. Коробова. Важность оптимальных параллелепипедальных сеток обусловлена их простотой и ненасыщаемостью алгоритмов приближенного интегрирования по соответствующим квадратурным формулам, заключающейся в росте точности квадратурных формул с ростом гладкости интегрируемых функций.

К наиболее важным направлениям исследований по методу оптимальных коэффициентов относятся получение алгоритмов вычисления оптимальных коэффициентов высокого качества для параллелепипедальных и комбинированных сеток и изучение гиперболической дзета-функции целочисленных решёток. Именно этим двум направлениям посвящена диссертация.

В процессе диссертационного исследования обнаружилась обратная связь теоретико-числового метода приближенного анализа с тригонометрическими суммами. А именно, этим методом удалось получить новые результаты о тригонометрических суммах, что является третьим направлением диссертационного исследования.

В соответствии с указанными актуальными направлениями были сформулированы следующие цели работы:

— цель первой главы — построение алгоритмов вычисления оптимальных коэффициентов и оценка их качества;

— цель второй главы — получение функционального уравнения гиперболической

[1] Weyl H. Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. // Math. Ann. 1916. Bd. 77. S. 313–352 (пер. в кн.: Вейль Г. Математика. Теоретическая физика. М.: Наука, 1984)

[2] Гаусс К. Ф. Труды по теории чисел. М.: Из-во АН СССР, 1959.

[3] Коробов Н. М. Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел // ДАН СССР. 1957. № 6. С. 1062 — 1065.

дзета-фунции произвольной целочисленной решётки, как функции комплексного переменного;

— цель третьей главы — изучение нового класса тригонометрических сумм, квазиполных коротких рациональных тригонометрических сумм, а также получение для них нетривиальных асимптотических формул.

Научная новизна. Результаты работы являются новыми, полученными автором самостоятельно. Основными результатами диссертационной работы можно считать следующие:

— построено несколько новых алгоритмов вычисления наборов оптимальных коэффициентов и даны оценки их качества;

— получено функциональное уравнение для гиперболической дзета-фунции произвольной целочисленной решётки;

— найдены асимптотические формулы для квазиполных коротких кубических рациональных тригонометрических сумм.

Методы исследования. В работе используются методы аналитической теории чисел и геометрии чисел.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы в исследованиях по приложению методов теории чисел к вопросам приближенного анализа. Предложенные в диссертации алгоритмы могут использоваться для практического применения при составлении таблиц оптимальных коэффициентов и создании программ численного интегрирования функций многих переменных.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались автором на:

— научно-исследовательском семинаре "Арифметика, алгоритмы, теория сложности вычислений"в Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова;

— Всероссийской научной конференции "Современные проблемы математики, механики, информатики" в Тульском государственном университете. Тула, ноябрь 2002.

— международной конференции "Аналитические и комбинаторные методы в теории чисел и геометрии" в Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова. Москва, май 2006.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[6], выполненных по грантам РФФИ 02-01-00584, 05-01-00672 и 08-01-00790.

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 119 страницах и состоит из введения, трех глав, списка литературы, включающего 74 наименования, и приложения с таблицей оптимальных коэффициентов.

Краткая история вопроса

В книге Н. М. Коробова [4] излагается теоретикочисловой метод в приближенном анализе, созданный им в 1957 – 1963 годах. В частности, там дается теория квадратурных формул с параллелепипедальными сетками вида

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) \quad (k = 1, 2, \ldots, p), \tag{1}$$

где $a_1, \ldots, a_s$ – целые числа, взаимно простые с p. Класс оптимальных параллелепипедальных сеток выделен следующим образом. Пусть $p > 1$ – целое, $p_1 = \left[\frac{p-1}{2}\right]$,

[4] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М.: Физматгиз, 1963.

$p_2 = \left[\dfrac{p}{2}\right]$, $a_\nu = a_\nu(p)$ – целые, взаимно простые с p и величина символа Коробова $\delta_p(m)$ определена равенством

$$\delta_p(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod p, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

Если существуют константы $\beta = \beta(s)$ и $B = B(s)$ такие, что для некоторого бесконечного множества значений p выполняется неравенство[5]

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-p_1}^{p_2}{}' \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} \leqslant B \frac{\ln^\beta p}{p}, \tag{2}$$

то целые $a_1, \ldots, a_s$ называются оптимальными коэффициентами индекса β, а соответствующие им сетки M_k — оптимальными параллелепипедальными сетками.

В частности в [4] с. 148–157, доказаны две теоремы Н. М. Коробова, дающие достаточно удобные алгоритмы построения оптимальных коэффициентов по простому модулю и по составному, равному произведению двух простых. Первый алгоритм основан на поиске минимума функции $H_p(z)$, определенной равенством

$$H_p(z) = \frac{3^s}{p} \sum_{k=1}^{p} \left(1 - 2\left\{\frac{k}{p}\right\}\right)^2 \ldots \left(1 - 2\left\{\frac{kz^{s-1}}{p}\right\}\right)^2, \tag{3}$$

где p — простое число, большее s. Если при $z = a$ достигается минимум функции $H_p(z)$ на интервале $1 \leqslant z \leqslant p-1$, то целые $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $\ldots$, $a_s = a^{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами по модулю p. Легко видеть, что этот алгоритм позволяет вычислять оптимальные коэффициенты по модулю p за $O(p^2)$ элементарных операций.

При больших значениях p для вычисления оптимальных коэффициентов удобнее использовать второй алгоритм Коробова, позволяющий уменьшить число соответствующих элементарных операций до $O(p^{1+\frac{1}{3}})$. Для $p = p'p''$, где p' и p'' простые, большие s, причем p'' имеет порядок $\sqrt{p'}$ и целого a, вычисленного по первому алгоритму с заменой в нем p на p', согласно второму алгоритму Коробова надо найти минимум функции $\tilde{H}(z)$, определеной равенством

$$\tilde{H}(z) = \frac{3^s}{p'p''} \sum_{k=1}^{p'p''} \left(1 - 2\left\{\frac{p'+p''}{p'p''}k\right\}\right)^2 \ldots \left(1 - 2\left\{\frac{p'z^{s-1}+p''a^{s-1}}{p'p''}k\right\}\right)^2. \tag{4}$$

Если при $z = b$ достигается минимум функции $\tilde{H}(z)$ на интервале $1 \leqslant z \leqslant p''-1$, то целые $a_1 = p' + p''$, $a_2 = p'b + p''a, \ldots, a_s = p'b^{s-1} + p''a^{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами по модулю $p = p'p''$. Легко видеть, что при этом способе нахождения оптимальных коэффициентов по модулю $p = p'p''$ достаточно $O\left(p^{1+\frac{1}{3}}\right)$ элементарных операций.

В 1992 году Н. М. Коробов ввёл новый класс сеток — комбинированные сетки, основы теории которых были опубликованы в работе [6]. В этой работе впервые Н. М. Коробов применил принципиально новую идею в методе усреднений,

[5] Здесь и далее $\sum'$ означает, что из области суммирования исключен нулевой набор, для вещественного x обозначаем $\overline{x} = \max(1, |x|)$.

[6] Коробов Н. М. Квадратурные формулы с комбинированными сетками // Математические заметки. 1994. Т. 55. Вып. 2. С. 83 — 90.

которым ранее доказывались теоремы о существовании оптимальных коэффициентов. А именно, если имеется какая-то функция f от оптимальных коэффициентов, для которой среднее арифметическое значение σ по множеству всех наборов коэффициентов заданного вида в количестве P совпадает с каким-то критерием оптимальности, то перенумеровав все наборы этого вида в порядке возрастания значений этой функции, можно значение функции f от набора с номером $[(P+1)/2]$ оценить величиной 2σ, при этом данная оценка будет справедлива для $[(P+1)/2]$ наборов, по которым можно усреднять значение другой функции. Особенно эффектно эта идея работает, когда f — целочисленная функция, а $\sigma < 1$, тогда получаем более сильное утверждение о том, что для $[(P+1)/2]$ наборов значение f равно 0. В работе примером применения этой идеи являются доказательства теорем об алгоритмах построения оптимальных коэффициентов.

Пусть $p \geqslant 2$, $n \geqslant 2$, $(n,p) = 1$ и $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p. *Комбинированными сетками* называются сетки вида

$$M\left(\left\{\frac{k_1}{n}+\frac{a_1k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{k_s}{n}+\frac{a_sk}{p}\right\}\right) \tag{5}$$

$k = 1, 2, \ldots, p$; $k_\nu = 1, 2, \ldots, n$ $(1 \leqslant \nu \leqslant s)$.

В [6] Н. М. Коробовым доказано, что для простого p большего s существуют оптимальные коэффициенты $a_1, \ldots, a_s$ по модулю p такие, что для любого $\alpha > 1$ выполняются оценки[7]

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}_r \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} \ll \frac{(\ln p)^{\alpha(r-1)}}{p^\alpha} \quad (r = 1, 2, \ldots, s), \tag{6}$$

где сумма Σ_r распространена на системы целых $(m_1, \ldots, m_s)$, содержащие ровно r величин m_j, отличных от нуля. Для погрешности квадратурной формулы

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)dx_1\ldots dx_s =$$
$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{p}\sum_{k_1,\ldots,k_s=1}^{n} f\left(\left\{\frac{k_1}{n}+\frac{a_1k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{k_s}{n}+\frac{a_sk}{p}\right\}\right) - R_N[f] \tag{7}$$

выполняется оценка

$$R_N[f] \ll \frac{(\ln N)^{\alpha(s-1)}}{N^\alpha}. \tag{8}$$

Такие оптимальные коэффициенты можно найти с помощью функции $H^*_{pn^s}(z)$, определенной равенством

$$H^*_{pn^s}(z) = \frac{3^s}{pn^s}\sum_{k=1}^{p}\sum_{k_1,\ldots,k_s=1}^{n}\prod_{j=1}^{s}\left(1-2\left\{\frac{kz^{j-1}}{p}+\frac{k_j}{n}\right\}\right)^2, \tag{9}$$

где p — простое число большее s и $n \ll \ln p$, $(n,p) = 1$. Если при $z = a$ достигается минимум функции $H^*_{pn^s}(z)$ на интервале $1 \leqslant z \leqslant p-1$, то целые $a_1 = 1$, $a_2 = a$, $\ldots$, $a_s = a^{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами по модулю p и для них справедлива оценка (8) в квадратурной формуле (7).

[7] Для переменных величин A и $B > 0$ запись $A \ll B$ означает, что $|A| \leqslant CB$ с некоторой константой $C > 0$.

Заметим, что здесь используется комбинирование параллелепипедальной сетки по простому модулю и равномерной сетки из n^s точек с небольшим значением n взаимно простым с этим модулем. Впервые комбинирование двух параллелепипедальных сеток по двум различным простым модулям встречалось во втором алгоритме Коробова. Операцию комбинирования сеток удобно называть произведением сеток (см. [8], [9]).

О качестве оптимальных коэффициентов $a_1 = 1$, $a_2 = a$, …, $a_s = a^{s-1}$ можно судить по величине разности $H_p(a) - 1$, имеющей для наиболее хороших оптимальных параллелепипедальных сеток порядок $O(\ln^{2(s-1)} p/p^2)$. Аналогично, о качестве комбинированной сетки с теми же оптимальными коэффициентами можно судить по разности $H^*_{pn^s}(a) - 1$, имеющей порядок $O(\ln^{2(s-1)} p/(pn^s)^2)$.

Как было указано выше, квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками вида:

$$\int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(x_1, \ldots, x_s) dx_1 \ldots dx_s = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) - R_N[f] \qquad (10)$$

автоматически реагируют на гладкость интегрируемых периодических функций. Как показал Н. М. Коробов, если $f(\vec{x}) \in E_s^\alpha$ $(\alpha > 1)$, то для погрешности приближенного интегрирования по формуле (10) справедлива оценка:

$$|R_N[f]| \leqslant \|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_N(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{m}_s)^\alpha}. \qquad (11)$$

Здесь норма $\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha}$ на банаховом пространстве E_s^α задается через коэффициенты Фурье равенством:

$$\|f(\vec{x})\|_{E_s^\alpha} = \sup_{\vec{m} \in \mathbb{Z}^s} |C(\vec{m})(\overline{m}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{m}_s)^\alpha| < \infty, \qquad (12)$$

а пространство E_s^α состоит из периодических функций, для которых коэффициенты Фурье функции $f(\vec{x})$

$$f(\vec{x}) = \sum_{\vec{m}=-\infty}^{\infty} C(\vec{m}) e^{2\pi i(\vec{m}, \vec{x})}, \quad C(\vec{m}) = \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 f(\vec{x}) e^{-2\pi i(\vec{m}, \vec{x})} d\vec{x} \qquad (13)$$

удовлетворяют неравенству (12).

Ряд, стоящий в правой части неравенства (11), является гиперболической дзета-функцией решётки $\Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$ решений линейного сравнения

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod N \qquad (14)$$

и является частным случаем общего понятия гиперболической дзета-функцией произвольной полной решётки.

Рассмотрим произвольную решётку $\Lambda \subset \mathbb{R}^s$, $s \geqslant 2$. В работе под решёткой всегда понимается полная решётка.

[8]Быковский В. А. Экстремальные кубатурные формулы для анизотропных классов. Хабаровск, 1995. С. 1 — 13. (Препринт.)

[9] Добровольский Н. М., Манохин Е. В., Реброва И. Ю., Аккуратова С. В. О некоторых свойствах нормированных пространств и алгебр сеток // Известия ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 5. Вып. 1. Тула, 1999. С. 100 — 113.

Определение 1 *Гиперболической дзета-функцией решётки* Λ *называется функция* $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$, $\alpha = \sigma + it$, *задаваемая при* $\sigma > 1$ *абсолютно сходящимся рядом*

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda}{}' (\overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s)^{-\alpha}. \tag{15}$$

Определение 2 *Обобщенной гиперболической дзета-функцией решётки* Λ *называется функция* $\zeta_H\left(\Lambda + \vec{b}\middle|\,\alpha\right)$, $\alpha = \sigma + it$, *задаваемая при* $\sigma > 1$ *абсолютно сходящимся рядом*

$$\zeta_H\left(\Lambda + \vec{b}\,\middle|\,\alpha\right) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda+\vec{b}}{}' (\overline{x}_1 \cdot \ldots \cdot \overline{x}_s)^{-\alpha}. \tag{16}$$

Первоначально гиперболическая дзета-функция решёток изучалась только для целочисленной решётки решений сравнения (14) и для вещественных значений $\alpha > 1$. Для этого случая были получены следующие результаты. Н. М. Коробов 1959 г. показал, что если целые $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты индекса β по модулю N, то для решётки $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$ и её гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ справедливо неравенство

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \leqslant \frac{B^\alpha \ln^{s\alpha} N}{N^\alpha} + \frac{s(1 + 2\zeta(\alpha))^{s-1} 2\zeta(\alpha)}{N^\alpha}. \tag{17}$$

С другой стороны, если $N > 2^s$ и $a_1, \ldots, a_s$ — произвольные целые, то для решётки $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$ и её гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ справедливо неравенство

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \geqslant \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{\alpha}{4^\alpha(s-1)}\right)^s \frac{\ln^{s-1} N}{N^\alpha}. \tag{18}$$

Эта оценка снизу указывает наилучший возможный порядок погрешности для параллелепипедальных и комбинированных сеток. В настоящее время вопрос о достижимости такого порядка остается открытым. По теореме Шарыгина [10], доказанной в 1963 году, порядок погрешности квадратурной формулы с весами на классе E_s^α не может быть меньше $O\left(N^{-\alpha} \ln^{s-1} N\right)$ при любом выборе сетки и весов в квадратурной формуле с N узлами. Таким образом, из результатов Н. М. Коробова 1959–1960 годов следует, что известные оптимальные параллелепипедальные сетки дают порядок погрешности не более чем на $(\alpha - 1)s + 1$ степень логарифма от числа точек сетки хуже оптимальной.

В работе [11] Н. С. Бахвалов в 1959 году установил важную связь между величиной параметра гиперболического креста, не содержащего ненулевых точек данной решетки, и погрешностью квадратурной формулы с параллелепипедальной сеткой (10) на классе E_s^α. Усеченной нормой называется величина $q(\vec{x}) = \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_s$, а гиперболический параметр решетки Λ определяется равенством

$$q(\Lambda) = \min_{\vec{x}\in\Lambda\setminus\{\vec{0}\}} q(\vec{x}).$$

Множество точек $K(T) = \{\vec{x} \mid q(\vec{x}) \leqslant T\}$ называется гиперболическим крестом, а величина T — его параметром. Ясно, что при $T < q(\Lambda)$ гиперболический крест $K(T)$ не содержит ненулевых точек решетки Λ. Согласно Н. С. Бахвалову, если

[10] Шарыгин И. Ф. Оценки снизу погрешности квадратурных формул на классах функций // Журн. вычисл. мат. и мат. физики. 7. 1963. № 4. С. 784 — 802.

[11] Бахвалов Н. С. О приближенном вычислении кратных интегралов // Вестн. Моск. ун-та, 1959. № 4. С. 3 — 18.

$a_1, \ldots, a_s$ — произвольные целые, то для решётки $\Lambda = \Lambda(a_1, \ldots, a_s; N)$ и её гиперболической дзета-функции $\zeta_H(\Lambda|\alpha)$ справедливо неравенство

$$\zeta_H(\Lambda|\alpha) \leqslant 4\alpha \left(\frac{3\alpha^2}{\alpha - 1}\right)^s \frac{(1 + \ln q(\Lambda))^{s-1}}{q(\Lambda)^\alpha}. \tag{19}$$

В этой же работе Н. С. Бахвалов показал, что для простых p существуют решётки с $q(\Lambda) \gg N \ln^{-(s-1)} N$.

В 1976 году К. К. Фролов в работе [12], используя алгебраические сетки, порожденные чисто вещественным алгебраическим полем степени s, построил сетки для которых на классе E_s^α достигается правильный порядок погрешности приближенного интегрирования и правильный порядок гиперболической дзета-функции решётки, то есть $O\left(N^{-\alpha}\ln^{s-1} N\right)$. При этом исследования по методу оптимальных коэффициентов не потеряли своей актуальности, так как квадратурные формулы К. К. Фролова с алгебраическими сетками гораздо сложнее квадратурных формул Н. М. Коробова с параллелепипедальными сетками.

В 1984 году в работе [13] Н. М. Добровольский обобщил результаты Коробова и Бахвалова о гиперболической дзета-функции решеток на случай произвольной решётки. Из обобщенной теоремы Бахвалова как элементарное следствие получался результат К. К. Фролова о гиперболической дзета-функции решётки. Из работ [14] и [15] следует, что результаты Н. М. Коробова о параллелепипедальных сетках и К. К. Фролова об алгебраических сетках являются следствиями общей теории обобщенных параллелепипедальных сеток с весовыми функциями, в которой центральную роль играет гиперболическая дзета-функция решёток. Отметим, что весовые функции в этой теории выбраны таким образом, что для целочисленных решёток они суммируются и получаются равные веса. В этом случае важную роль играют полные рациональные кратные тригонометрические суммы по обобщенным рациональным парралелепипедальным сеткам. Эти суммы играют такую же характеристическую роль, что и символ Коробова, поэтому их называют многомерным символом Коробова. Изучение гиперболической дзета-функция решёток было продолжено в работах [16], [17], [18],[19], [20] несколькими авторами.

Алгебраические поля сыграли важную роль в работах С. М. Воронина и Н. Те-

[12] Фролов К. К. Оценки сверху погрешности квадратурных формул на классах функций // ДАН СССР. 231. 1976. № 4. С. 818–821.

[13] Добровольский Н. М. Гиперболическая дзета функция решеток. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6090–84.

[14] Добровольский Н. М., Ванькова В. С., Козлова С. Л. Гиперболическая дзета–функция алгебраических решёток. Деп. в ВИНИТИ 12.04.90, № 2327–В90.

[15] Добровольский Н. М. О квадратурных формулах на классах $E_s^\alpha(c)$ и $H_s^\alpha(c)$. Деп. в ВИНИТИ 24.08.84, № 6091–84.

[16] Добровольский Н. М., Реброва И. Ю., Рощеня А. Л. Непрерывность гиперболической дзета-функции решёток // Мат. заметки. Т. 63. Вып. 4. 1998. С. 522–526.

[17] Добровольский Н. М., Рощеня А. Л. О непрерывности гиперболической дзета-функции решёток // Изв. Тул. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. Т. 2. Вып. 1. Тула: Изд–во ТулГУ, 1996. С. 77 — 87.

[18] Реброва И. Ю. Непрерывность обобщенной гиперболической дзета–функции решёток и ее аналитическое продолжение // Изв. ТулГУ. Сер. Механика. Математика. Информатика. Тула, 1998. Т.4. Вып.3. С. 99–108.

[19] Реброва И. Ю. Пространство решёток и функции на нем. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1999.

[20] Рощеня А. Л. Аналитическое продолжение гиперболической дзета–функции решёток. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Москва. МПГУ, 1998.

миргалиева [21], [22], [23], но были основаны на совсем других идеях и давали новые виды оптимальных коэффициентов параллелепипедальных сеток по простым модулям, связанным с порядком круговых полей.

Как уже отмечалось выше, первые работы Н. М. Коробова по применению методов теории чисел к построению многомерных квадратурных формул были основаны на оценках А. Вейля полных рациональных сумм по простому модулю или аналогичных оценках полных рациональных сумм по квадрату простого модуля (см. [24], [25]). Таким образом, мы видим прямую связь между тригонометрическими суммами и теоретико-числовыми квадратурными формулами. А именно, результаты, например, о полных рациональных тригонометрических суммах такие как теорема А. Вейля дают результаты о квадратурных формулах.

Как правило, в вопросах связанных с числом решений сравнений возникают полные или короткие рациональные тригометрические суммы, а в вопросах о числе решений диофантовых уравнений появляются общие суммы Г. Вейля вида

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i f(x)}, \tag{20}$$

где $f(x) = \alpha_n x^n + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ — произвольный многочлен с действительными коэффициентами.

Если мы на ряду с полной суммой

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}} \tag{21}$$

рассмотрим сумму вида

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f\left(\frac{x}{p}\right)} = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f_p(x)}{p^s}}, \tag{22}$$

где $f_p(x) = a_s x^s + a_{s-1} p x^{s-1} + \ldots + a_1 p^{s-1} x$, то получим короткую рациональную сумму по модулю p^s, которую надо исследовать методом Г. Вейля, но здесь возникают определенные трудности. Итак, в случае, когда $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами, мы получаем короткую рациональную тригонометрическую сумму вида:

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \left(\frac{a_n x^n}{p^n} + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{p^{n-1}} + \ldots + \frac{a_1 x}{p} + a_0\right)} = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a_n x^n + p a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + p^{n-1} a_1 x + p^n a_0}{p^n}}. \tag{23}$$

Как известно (см.[29], с. 96), для такого класса сумм нельзя получить общей нетривиальной оценки методом Вейля, так как этот класс содержит суммы, модуль которых по порядку равен длине суммы.

В данной работе будет показано, что даже для простейшей суммы такого вида

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{x^n}{p^n}} \tag{24}$$

[21] Воронин С. М. О квадратурных формулах // Изв. РАН. Сер. мат. 1994. Т. 58. № 5. С. 189 — 194.

[22] Воронин С. М. О построении квадратурных формул // Изв. РАН. Сер. мат. 1995. Т. 59. № 4.

[23] Воронин С. М., Темиргалиев Н. О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовых чисел // Мат. заметки. 1989. Т. 46. № 2. С. 34 — 41.

[24] Коробов Н. М. Тригонометрические суммы и их приложения. М.: Наука, 1989.

[25] Коробов Н. М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. (второе издание) М.: МЦНМО, 2004.

нельзя применить оценки Вейля.

Отметим, что тригонометрические суммы более общего вида

$$\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p^t}} \tag{25}$$

рассматривались в работе А. А. Карацубы [[26]]. Используя свои результаты из работы [[27]], он показал: *Пусть* $q = p^t$, $P = q^{\frac{1}{r}}$. *Если* $P = a_0p^s + a_1p^{s-1} + \ldots + a_{s-1}p + a_s$, $1 \leqslant a_0 \leqslant p-1$, $0 \leqslant a_\nu \leqslant p-1$, $\nu \geqslant 1$, *— p-ичное разложение числа* P, *то имеет место асимптотическая формула*

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \frac{ax^n}{q}} = Aa_0p^{s-\alpha} + a_0p^{s-\alpha+\beta} + O(P^{1-\frac{\gamma}{r^2}}),$$

где величины A, α, β, *определяются равенствами*

$$A = \delta_n(t-1)\sum_{x=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{ax^n}{p}}, \quad \alpha = \left[\frac{t}{n}\right] + 1, \quad \beta = \delta_n(t).$$

Здесь предполагались следующие соглашения: n, t, P, a — целые числа, $n \geqslant 20$, r — вещественное число, $1 \leqslant r \leqslant 0.1n$, $t \geqslant n$, p — простое число, $(a,p) = 1$, $P \gg 1$.

В этом общем результате А. А. Карацуба выделял особенно простой вид асимптотической формулы при $P = p^s$ и $t \equiv 0 \pmod{n}$, когда

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i \frac{ax^n}{q}} = P^{1-\frac{r}{n}} + O(P^{1-\frac{\gamma}{r^2}}),$$

Для случая сумм вида (24) будет показано, что теорема А. А. Карацубы не применима по существу, а не только из-за несоответствия областей параметров.

В своей монографии [[28]]Монтгомери в пункте 8 на странице 194 сформулировал следующую проблему: "Покажите, что если $P(x) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_k x^k$, $|\alpha - a/q| \leqslant 1/q^2$, $(a,q) = 1$, то[29]

$$\sum_{n=1}^{N} e(P(n)) \ll_k N^{1+\epsilon}\left(\frac{1}{q} + \frac{q}{N^k}\right)^{1/k}. \tag{26}$$

Или же постройте контрпример. Даже незначительные улучшения существующих границ были бы интересны. Например, при $k = 3$ и $q \approx N^{3/2}$ получите верхнюю границу $o(N^{3/4})$, скажем $O(N^\kappa)$ где $\kappa < 3/4$."

Ясно, что при $f(x) = x^3$, рассматривая сумму

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f\left(\frac{x}{p}\right)} = \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i \frac{x^3}{q}}, \tag{27}$$

[26] Карацуба А. А. Асимптотические формулы для некоторого класса тригонометрических сумм // ДАН СССР. 1966. Т. 169. № 1. С. 9 — 11.

[27] Карацуба А. А. Тригонометрические суммы специального вида и их приложения // Известия АН СССР. 1964. Т. 28 №1. С. 237 — 248.

[28] Montgomeri Hugh L. Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis. Providence, R.I. : Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences by the American Mathematical Society, 1994. (Заглавие серии: Regional conference series in mathematics, no. 84)

[29] Здесь $e(P(n)) = e^{2\pi i P(n)}$.

мы попадаем в случай $N=p$, $q=p^3=N^3$. При $g(x)=px^3$, рассматривая сумму

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i g\left(\frac{x}{p}\right)} = \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i \frac{x^3}{q}}, \tag{28}$$

мы попадаем в случай $N=p$, $q=p^2=N^2$. Наконец, при $h(x)=p^3x^3$, рассматривая сумму

$$\sum_{x=1}^{p^2} e^{2\pi i h\left(\frac{x}{p^2}\right)} = \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i \frac{x^3}{q}}, \tag{29}$$

мы попадаем в случай $N=p^2$, $q=p^3=N^{\frac{3}{2}}$. Таким образом, все эти три случая попадают в область гипотезы Монтгомери и не поддаются исследованию ни методом Г. Вейля, ни методом А. А. Карацубы.

Содержание работы

Первая глава **"Оптимальные коэффициенты комбинированных сеток"** посвящена построению алгоритмов вычисления оптимальных коэффициентов и оценке их качества.

Цель данной главы — провести сравнение качества квадратурных формул с параллелепипедальными сетками и комбинированными сетками, используя величину погрешности приближенного интегрирования функции $3^s(1-2\{x_1\})^2\dots(1-2\{x_s\})^2$ по единичному s-мерному кубу $[0,1]^s$. Данная функция принадлежит классу E_s^2.

В этой главе доказаны следующие две основные теоремы об оптимальных коэффициентах, дающие алгоритмы их вычисления.

Теорема 15. *Пусть p — простое число. Если при $z_1=a_1$ достигается минимум функции $H_p(1,z_1)$ на интервале $1\leqslant z_1\leqslant p-1$, и при найденных $a_1,\dots,a_{k-1}$ при $z_k=a_k$ достигается минимум функции $H_p(1,a_1,\dots,a_{k-1},z_k)$ на интервале $1\leqslant z_k\leqslant p-1\quad(1\leqslant k\leqslant s-1)$, то целые $a_1,a_2,\dots,a_{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами по модулю p.*

Теорема 16. *Пусть $p\geqslant 17$ — простое число и $n\leqslant \ln p$. Если при $z_1=a_1$ достигается минимум функции $H^*_{pn^2}(1,z_1)$ на интервале $1\leqslant z_1\leqslant p-1$, и при найденных $a_1,\dots,a_{k-1}$ при $z_k=a_k$ достигается минимум функции $H^*_{pn^{k+1}}(1,a_1,\dots,a_{k-1},z_k)$ на интервале $1\leqslant z_k\leqslant p-1\quad(1\leqslant k\leqslant s-1)$, то целые $a_1,a_2,\dots,a_{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами по модулю p для комбинированной сетки из $N=pn^s$ точек.*

На основании этих алгоритмов составлены таблицы оптимальных коэффициентов для параллелепипедальных и комбинированных сеток, приведенные в приложении к диссертации, и дается сравнение их качества. Из анализа этих таблиц можно сделать вывод о сопоставимости величин погрешностей для обоих типов сеток.

Вторая глава **"Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции"** посвящена получению функционального уравнения для гиперболической дзета-функции целочисленных решеток, как функции комплексного переменного.

Как обычно через $N(\vec{x})=|x_1\dots x_s|$ будем обозначать мультипликативную норму вектора $\vec{x}$. Она отлична от нуля только для точек общего положения, то есть точек, не имеющих нулевых координат. Используя мультипликативную норму, в этой главе даются новые определения.

Определение 3 *Дзета-функцией решётки Λ называется функция $\zeta(\Lambda|\alpha)$, $\alpha=\sigma+it$, задаваемая при $\sigma>1$ рядом*

$$\zeta(\Lambda|\alpha)=\sum_{\vec{x}\in\Lambda,\,N(\vec{x})\neq 0}|x_1\cdot\ldots\cdot x_s|^{-\alpha}. \tag{30}$$

Вообще говоря, дзета-функция решётки существует не для всякой решётки Λ, так как соответствующий ряд может расходиться для любого значения $\alpha = \sigma + it$, но для произвольной декартовой решётки Λ она очевидно существует при $\sigma > 1$.

Нетрудно видеть, что гиперболическая дзета-функция целочисленной решётки Λ непосредственно выражается через сумму дзета-функции решётки Λ и дзета-функций соответствующих целочисленных решёток меньших размерностей, которые получаются отбрасыванием нулевых координат.

Заметим, что гиперболическая дзета-функция не является однородной, как функция решётки, а дзета-функция решётки является: $\zeta(T \cdot \Lambda|\alpha) = T^{-s\alpha}\zeta(\Lambda|\alpha)$.

Определение 4 *Обобщенной дзета-функцией решётки Λ называется функция $\zeta\left(\Lambda + \vec{b}\middle|\,\alpha\right)$, $\alpha = \sigma + it$, задаваемая при $\sigma > 1$ рядом*

$$\zeta\left(\Lambda + \vec{b}\middle|\,\alpha\right) = \sum_{\vec{x}\in\Lambda+\vec{b},\, N(\vec{x})\neq 0} |x_1 \cdot \ldots \cdot x_s|^{-\alpha}. \tag{31}$$

При получении функционального уравнения гиперболической дзета-функции использовался новый подход. Если ранее для доказательства существования аналитического продолжения гиперболической дзета-функции произвольной декартовой решётки использовалось только разложение целочисленной решётки Λ по подрешётке $\det\Lambda \cdot \mathbb{Z}^s$ и затем функциональное уравнение Гурвица, то теперь использовались тригонометрические суммы решётки, что позволило использовать известные свойства рядов Дирихле с периодическими коэффициентами.

В этой главе получены следующие основные результаты о функциональных уравнениях для дзета-функции и гиперболической дзета-функции целочисленных решеток, как функций комплексного переменного.

Теорема 21. *Для дзета-функции произвольной целочисленной решётки Λ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta(\Lambda \mid \alpha) = \frac{1}{N}\left(M(\alpha)N^{1-\alpha}\right)^s \zeta\left(\Lambda^{(p)}\middle|\,1-\alpha\right).$$

Теорема 22. *Для гиперболической дзета-функции произвольной целочисленной решётки Λ в левой полуплоскости $\sigma < 0$ справедливо функциональное уравнение*

$$\zeta_H(\Lambda \mid \alpha) = \sum_{t=1}^{s} M_\alpha^t N^{-\alpha t} \sum_{\vec{j}_t \in J_{t,s}} N^{t-1}\zeta\left(\Lambda^{(p)}_{\vec{j}_t}\middle|\,1-\alpha\right).$$

Здесь $\Lambda^{(p)}$ — присоединенная решётка, которая определяется через взаимную решётку Λ^* соотношением $\Lambda^{(p)} = \det\Lambda \cdot \Lambda^*$ и $\Lambda^{(p)}_{\vec{j}_t}$ — "присоединеная" t-мерная решётка из координатной гиперполуплоскости, заданной вектором $\vec{j}_t$ — номеров ненулевых координат.

В третьей главе **"Квазиполные тригонометрические суммы"** оценки погрешности приближенного интегрирования периодических функций от одной переменной применяются для получения асимптотических формул для величины квазиполной рацинальной тригонометрической суммы. Суть этого подхода заключается в следующем. Пусть $g(x) = e^{2\pi i f(x)}$, где дважды непрерывно дифференцируемая вещественнозначная функция $f(x)$ удовлетворяет условию

$$f(1) - f(0) \text{ — целое число.} \tag{32}$$

В силу этого условия $g(0) = g(1)$ и функцию $g(x)$ можно на отрезке $[0; 1]$ разложить в абсолютно сходящийся ряд Фурье:

$$g(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C(m) e^{2\pi i m x}, \quad C(m) = \int_0^1 g(x) e^{-2\pi i m x} dx = \int_0^1 e^{2\pi i (f(x) - mx)} dx. \tag{33}$$

Если $F_\nu = \max\limits_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(\nu)}(x)|$ $(\nu = 1, 2)$, то для коэффициентов Фурье дважды непрерывно дифференцируемой функции $g(x) = e^{2\pi i f(x)}$ при $m \neq 0$ справедлива оценка:

$$|C(m)| \leqslant \frac{2F_1 + 2\pi F_1^2 + F_2}{2\pi m^2}. \tag{34}$$

Таким образом, в обозначениях Н. М. Коробова $g(x) \in E_1^2$ (см. [4]).

Рассмотрим квадратурную формулу правых прямоугольников для функции $g(x)$:

$$\int_0^1 e^{2\pi i f(x)} dx = \frac{1}{p} \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f\left(\frac{x}{p}\right)} - R_p[f]. \tag{35}$$

Для погрешности приближенного интегрирования $R_p[f]$ справедливо равенство

$$R_p[f] = {\sum_{m=-\infty}^{\infty}}' C(mp), \quad |R_p[f]| \leqslant \frac{\pi \cdot (2F_1 + 2\pi F_1^2 + F_2)}{6p^2}. \tag{36}$$

Тригонометрическую сумму вида

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f\left(\frac{x}{p}\right)} \tag{37}$$

будем называть квазиполной, если для дифференцируемой функции $f(x)$ выполнено условие (32), которое будем называть условием квазиполноты. Очевидно, что выполняется тривиальная оценка

$$\left| \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f\left(\frac{x}{p}\right)} \right| \leqslant p. \tag{38}$$

Из оценки для погрешности приближенного интегрирования и квадратурной формулы правых прямоугольников для функции $g(x)$ следует асимптотическое равенство для квазиполной тригонометрической суммы:

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f\left(\frac{x}{p}\right)} = p \int_0^1 e^{2\pi i f(x)} dx + \frac{\theta(f, p) \cdot \pi \cdot (2F_1 + 2\pi F_1^2 + F_2)}{6p}, \tag{39}$$

где для величины $\theta(f, p)$ справедливо неравенство $|\theta(f, p)| \leqslant 1$.

Заметим, что любая полная рациональная тригонометрическая сумма по модулю p является квазиполной короткой рациональной тригонометрической суммой. Действительно, если $f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ — многочлен с целыми коэффициентами и $f_p(x) = a_n p^{n-1} x^n + \ldots + a_2 p x + a_1 x + \dfrac{a_0}{p}$, то справедливо равенство

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{f(x)}{p}} = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f_p\left(\frac{x}{p}\right)}.$$

Очевидно, что в этом случае применить формулу (39) невозможно, так как $F_1 \geqslant np^{n-1}|a_n|$ и $F_2 \geqslant n(n-1)p^{n-1}|a_n|$.

Для рациональных тригонометрических сумм первой степени верно обратное: любая квазиполная рациональная тригонометрическая сумма первой степени является полной тригонометрической суммой.

Для достаточно широкого класса квазиполных коротких рациональных тригонометрических сумм можно получить асимптотическую формулу вида:

$$\sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i f\left(\frac{x}{p}\right)} = p\int_0^1 e^{2\pi i f(x)}dx + pR_p[f], \tag{40}$$

$$\text{если} \int_0^1 e^{2\pi i f(x)}dx \neq 0 \text{ и } R_p[f] = o\,(1)\,. \tag{41}$$

Для простоты изложения в диссертации рассматривается только случай квазиполных коротких кубических рациональных сумм с $f(x) = ax^3$, где a — целое число, хотя аналоги многих из доказанных ниже утверждений будут справедливы и для $f(x) = ax^n$ при любом $n \geqslant 2$.

В нашем случае $s = 1$, $t = n$, $r = n$ и теорема А. А. Карацубы, как будет видно из дальнейшего, в форме $S = \ O(P^{1-\frac{\gamma}{r^2}})$ перестает быть верной, хотя для большинства значений коэффициента a будет справедлив более сильный результат $|S| \leqslant 2P^{\frac{1}{2}}$.

В этой главе получены следующие основные результаты для квазиполной короткой кубической тригонометрической суммы

$$S(a,p) = \sum_{x=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ax^3}{p^3}},$$

где a — целое, и для квазиполной короткой рациональной кубической тригонометрической суммы

$$S(p^{m-1},p^m) = \sum_{x=1}^{p^m} e^{2\pi i \frac{p^{m-1}x^3}{p^{3m}}} = \sum_{x=1}^{p^m} e^{2\pi i \frac{x^3}{p^{2m+1}}} = \sum_{x=1}^{N} e^{2\pi i \frac{x^3}{q}}.$$

Теорема 25. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$S(a,p) = p\left(\frac{B_1 + iB_2}{3\sqrt[3]{a}} - \frac{\theta_1(a) + i\theta_2(a)}{a}\right) + \frac{\pi i a}{2p} + \frac{\theta_4(a)23a^3}{p^2},$$

$$1.241 < B_1 = 3\int_0^1 \cos\left(2\pi x^3\right)dx + \int_1^\infty \frac{\cos\left(2\pi t\right)}{\sqrt[3]{t^2}}dt < 1.242 + \frac{7}{24\pi},$$

$$0.570 + \frac{1}{4\pi} < B_2 = 3\int_0^1 \sin\left(2\pi x^3\right)dx + \int_1^\infty \frac{\sin\left(2\pi t\right)}{\sqrt[3]{t^2}}dt < 0.571 + \frac{5}{6\pi},$$

$$0 < \theta_1(a) = \sqrt[3]{a^2}\int_a^\infty \frac{\cos\left(2\pi t\right)}{\sqrt[3]{t^2}}dt < \frac{7}{24\pi},$$

$$\frac{1}{4\pi} < \theta_2(a) = \sqrt[3]{a^2}\int_a^\infty \frac{\sin\left(2\pi t\right)}{\sqrt[3]{t^2}}dt < \frac{5}{6\pi}, \quad |\theta_4(a)| \leqslant 1.$$

Теорема 26. *Справедливо асимптотическое равенство*

$$S(p^{m-1},p^m)=\begin{cases}\frac{B_1+iB_2}{3}p^{\frac{2m+1}{3}}+O\left(p^{m-3}\right) & \textit{при } m=1,\ldots,9,\\ \frac{B_1+iB_2}{3}p^{7}+O\left(p^{7}\right) & \textit{при } m=10,\\ O\left(p^{m-3}\right) & \textit{при } m\geqslant 11.\end{cases}.$$

Сравним полученный результат с гипотезой Монтгомери. Согласно этой гипотезе для тригонометрической суммы

$$S^*(N,q)=\sum_{n=1}^{N}e^{\frac{x^3}{q}} \tag{42}$$

справедлива оценка

$$|S^*(N,q)|\ll N^{1+\epsilon}\left(\frac{1}{q}+\frac{q}{N^3}\right)^{1/3}. \tag{43}$$

При $N=p^m$, $q=p^{2m+1}=N^{2+\frac{1}{m}}$ получаем

$$|S^*(N,q)|\ll N^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{N^{2+\frac{1}{m}}}+\frac{N^{2+\frac{1}{m}}}{N^3}\right)^{1/3}\ll N^{\frac{2}{3}+\epsilon+\frac{1}{3m}}. \tag{44}$$

По теореме 26 справедливо асимптотическое равенство

$$S^*(N,q)=\begin{cases}\frac{B_1+iB_2}{3}N^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3m}}+O\left(N^{1-\frac{3}{m}}\right) & \text{при } m=1,\ldots,9,\\ \frac{B_1+iB_2}{3}N^{\frac{7}{10}}+O\left(N^{\frac{7}{10}}\right) & \text{при } m=10,\\ O\left(N^{1-\frac{3}{m}}\right) & \text{при } m\geqslant 11.\end{cases}. \tag{45}$$

Отсюда следует, что при $m=1,\ldots,10$ гипотеза Монтгомери — неравенство (26) справедливо. При $m\leqslant 11$ получается оценка с $\kappa<3/4$. При $m\leqslant 13$ соотношения (45) лучше, чем общая оценка методом Вейля (см. [29] с. 96)

$$|S^*(N,q)|\ll N^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4m}+\varepsilon}. \tag{46}$$

При $m>13$ предложенный метод дает оценку хуже, чем метод Вейля.

В заключение выражаю благодарность своему научному руководителю профессору Чубарикову Владимиру Николаевичу за постановку задачи.

Литература

В журналах из списка ВАК:

[1] Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решеток // ДАН. Т. 412, № 3, Январь 2007. С. 302–304.

[2] Добровольский М. Н. Функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1, Математика. Механика. 2007. № 5. С. 18–23.

[3] Добровольский М. Н. Оценки сумм по гиперболическому кресту // Изв. ТулГУ. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2003. Т. 9. Вып. 1. С. 82 — 90.

В прочих изданиях:

[4] Добровольский М. Н. Об оптимальных коэффициентах комбинированных сеток // Чебышевский сборник 2004. Т. 5. Вып. 1(9). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 95–121.

[5] Добровольский М. Н. Ряды Дирихле с периодическими коэффициентами и функциональное уравнение для гиперболической дзета-функции целочисленных решёток // Чебышевский сборник 2006 Т. 3. Вып. 2(4). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 43 — 59.

[6] Добровольский М. Н. Квазиполные короткие кубические тригонометрические суммы // Чебышевский сборник 2009 Т. 10. Вып. 1(29). Тула, Из-во ТГПУ им. Л.Н.Толстого. С. 4 — 25.