Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.776

Каржеманов Илья Вячеславович

Особенности на некоторых многообразиях Фано

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Прохоров Юрий Геннадиевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Тюрин Николай Андреевич
	кандидат физико-математических наук Шрамов Константин Александрович
Ведущая организация:	Ярославский государственный педагогический университет им. К.Д.Ушинского

Защита диссертации состоится 06 ноября 2009 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 06 октября 2009 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

На рубеже 19–20-го веков, с расцветом итальянской школы алгебраической геометрии, в математику пришло множество красивых геометрических конструкций и методов. Так, стало ясно, что геометрия проективных алгебраических многообразий существенно определяется свойствами линейных систем дивизоров на этих многообразиях. Исходя из этого наблюдения были построены бирегулярная теория неособых проективных кривых и бирациональная теория неособых проективных поверхностей. Это послужило хорошим заделом для классификации алгебраических многообразий в размерности $\leqslant 2$ над полем комплексных чисел (см. работы[1], [2], [3], [4], [5], [6]).

Однако в отношении геометрии алгебраических многообразий высших размерностей оставалось больше вопросов чем ответов. Было поставлено огромное число задач, часть из которых получила лишь интуитивные решения, не удовлетворяющие современному уровню математической строгости. Более того, некоторые доказанные утверждения были ошибочны. Тем не менее, идеи и предсказания итальянских алгебраических геометров по сей день служат большим подспорьем в решении классических задач.

Одним из ярчайших представителей итальянской геометрической школы был Дж. Фано. В своих работах он, в частности, интересовался проблемой Люрота для алгебраических многообразий в размерности $\geqslant 3$ (см. работы[7], [8], [9]). Это привело его к изучению неособых алгебраических многообразий, близких к рациональным, а именно, многообразий с обильным антиканоническим дивизором. Такие многообразия получили впоследствии название *многообразий Фано*. В случае кривых единственным многообразием Фано является $\mathbb{P}^1$. В размерности 2, согласно критерию

[1] Haphen G. Memoire sur la classification des courbes gauches algebriques // J. Ec. Polyt. 1882. V. 52. P. 1–200.

[2] Noether M. Zur Grundlegung der Theorie der Algebraischen Raumcurven // Verlag der Koniglichen Akademie der Wissenschaften, Berlin. 1883.

[3] Castelnuovo G., Enriques F. Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche // Ann. di Mat. pura ed app. 1901. V. 6.

[4] Enriques F. Le superficie algebriche // Zanichelli. 1949.

[5] Segre C. Recherches generates sur les courbes et les surfaces reglees algebriques // Math. Ann. 1887. V. 30. and 1889. V. 34.

[6] Severi F. Le superficie algebriche con curva canonica d'ordine zero // Atti del 1st. Veneto. 1909. V. 68.

[7] Fano G. Sopra aleune varieta algebriche a tre dimensioni aventi tutti i generi nulli // Atti Ace. Torino. (1907–1908). V. 43. P. 973–977.

[8] Fano G. Osservazioni sopra aleune varieta non razionali aventi tutti i generi nulli // Atti Ace. Torino. 1915. V. 50. P. 1067–1071.

[9] Fano G. Nuove ricerche sulle varieta algebriche a tre dimensione a curve-sezioni canoniche // Comm. Pont. Ac. Sci. 1947. V. 11. P. 635–720.

Дж. Кастельнево, многообразия Фано рациональны. Желая построить контрпример к проблеме Люрота в размерности 3, Дж. Фано изучал геометрию неособой трехмерной квартики в $\mathbb{P}^4$. Унирациональность общей такой гиперповерхности была доказана в работе[10]. С другой стороны, в работах[8], [9] Дж. Фано доказал, что всякая неособая трехмерная квартика в $\mathbb{P}^4$ не рациональна, тем самым отрицательно решив проблему Люрота. Однако работы[8], [9] содержали много неясных и, зачастую, ошибочных утверждений (см. также работу[11]). Тем не менее, идеи Дж. Фано были восстановлены в работе[12], где было дано доказательство нерациональности неособой трехмерной квартики в $\mathbb{P}^4$ на современном уровне математической строгости.

С другой стороны, многообразия Фано интересны и сами по себе, как представители весьма специфического класса алгебраических многообразий (во второй половине 20-го века, в рамках теории минимальных моделей С. Мори было осознано, что многообразия Фано являются естественными строительными блоками для многообразий отрицательной кодаировой размерности). В частности, итальянские геометры занимались задачей классификации неособых многообразий Фано. Так, в размерности 2 было дано полное описание соответствующих поверхностей (см. работу[13]), и на свет появились поверхности дель Пеццо. Трехмерный случай рассматривался Дж. Фано в работах[8], [9], [14]. Однако полное описание трехмерных неособых многообразий Фано было получено почти полвека спустя в работах В. А. Исковских, С. Мори и С. Мукаи (см. работы[15], [16], [17]), в которых были усовершенствованы идеи самого Дж. Фано, а также применены мощные средства *теории минимальных моделей*, развитой в работах Ю. Кавамaты, Я. Коллара, С. Мори, М. Рида, В. Шокурова и др. (см., например, работы[18], [19], [20], [21]).

Далее, случай особых многообразий Фано не менее интересен. Так, естественным дополнением к классу неособых трехмерных многообразий Фано как алгебраических многообразий, содержащих неособую K3 поверхность в качестве обильного дивизора, служат трехмерные

[10] Segre B. Variazione continua ad omotopia in geometria algebrica // Ann. mat. pura ed appl. 1960. P. 149–186.
[11] Roth L. Algebraic threefolds with special regard to problems of rationality // Springer, Berlin. 1955.
[12] Исковских В. А., Манин Ю. И. Трехмерные квартики и контрпримеры к проблеме Люрота // Мат. сб. 1971. Т. 86(1). С. 140–166.
[13] Del Pezzo P. Sule superficie dell'n^{mo} ordine immerse nello spazio a n dimensioni. Rend, di Palermo // 1887. V. 1.
[14] Fano G. Sulle varieta a tre dimensioni a curve-sezioni canoniche // Mem. R. Accad. d'ltalia. 1937. V. 8. P. 14–49.
[15] Исковских В. А. Трехмерные многообразия Фано I // Изв. АН СССР Сер. Матем. 1977. Т. 41(3). С. 516–562.
[16] Исковских В. А. Трехмерные многообразия Фано II // Изв. АН СССР Сер. Матем. 1978. Т. 42(3). С. 506–549.
[17] Mori S., Mukai S. Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geqslant 2$ // Manuscr. Math. 1981. V. 36. P. 147–162.
[18] Kollár J. et al. Flips and Abundance for Algebraic Threefolds // Astérisque. 1992. V. 211.
[19] Mori S. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. P. 117–253.
[20] Mori S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective // Ann. Math. 1982. V. 115(2). P. 133–176.
[21] Шокуров В. В. Трехмерные лог-перестройки // Изв. АН СССР Сер. Матем. 1992. Т. 56(1). С. 105–203.

нормальные алгебраические многообразия, содержащие неособую поверхность Энриквеса в качестве обильного дивизора. Если потребовать еще, чтобы многообразия последнего типа не являлись конусами, то мы приходим к понятию *многообразия Фано–Энриквеса.* Существенно здесь то, что неособые трехмерные многообразия Фано и многообразия Фано–Энриквеса являются, в определенном смысле, "общими представителями" класса трехмерных алгебраических многообразий, имеющих обильный антиканонический дивизор и канонические особенности. В свою очередь, класс многообразий последнего типа является, с точки зрения получения разумного описания трехмерных многообразий с обильным антиканоническим дивизором, наиболее широким.

Однако, как показывает даже случай неособых многообразий Фано, получение такого описания – весьма нетривиальная задача. Так, многообразия Фано–Энриквеса изучались в работах[22], [23]. В частности, Дж. Фано показал (см. также работу[24]), что такие многообразия всегда особы. Более того, он предположил, что особенности многообразий Фано–Энриквеса всегда являются обыкновенными двойными, и классифицировал данные многообразия при этом предположении. Однако, как оказалось, список, полученный Дж. Фано, был не полон (см. работы[25], [26]). Кроме того, предположение об особенностях также не верно (см. работы[27], [28]). Тем не менее, верно то, что многообразия Фано–Энриквеса выделяются из класса трехмерных алгебраических многообразий с обильным антиканоническим дивизором как многообразия индекса Фано 1 и с каноническими $\mathbb{Q}$-горенштейновыми особенностями индекса 2. Это наблюдение позволяет с помощью несложной конструкции циклического накрытия свести изучение многообразий Фано–Энриквеса к случаю трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями и действием регулярной инволюции с конечным числом неподвижных точек. Последнее условие довольно ограничительно и позволяет в некоторых случаях получить полное описание соответствующих многообразий Фано–Энриквеса (см. работы[25], [26]).

[22] Fano G. Sulle varieta algebriche a tre dimensione le cui sezioni iperpiane sono superficie di genere zero e bigenere uno // Mem. Mat. Sci. Fis. Natur. Soc. Ital. Sci. Ser. 1938. V. 3. P. 41–66.

[23] Godeaux L. Sur les variétés algébriques à trois dimensions dont les sections hyperplanes sont des surfaces et de bigenre un // Bull. Acad. Belgique Cl. Sci. 1933. V. 14. P. 134–140.

[24] Conte A., Murre J. P. Algebraic varieties of dimension three whose hyperplane sections are Enriques surfaces // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa CL. Sci. V. 12(1). 1985. P. 43–80.

[25] Bayle L. Classification des variétés complexes projectives de dimension trois dont une section hyperplane générale est une surface d'Enriques // J. Reine Angew. Math. V. 449. 1995. P. 9–63.

[26] Sano T. Classification of non-Gorenstein $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds of index 1 // J. Math. Soc. Japan. V. 47(2). 1995. P. 369–380.

[27] Knutsen A. L., Lopez A. F., Munoz R. On the extendability of projective surface and a genus bound for Enriques-Fano threefolds // arXiv: math. AG0605750 (2006).

[28] Прохоров Ю. Г. О многообразиях Фано–Энриквеса // Мат. сб. 2007. Т. 198(4). С. 117–134.

Рассуждения предыдущего абзаца приводят к естественной и, с точки зрения получения полного описания трехмерных алгебраических многообразий с обильным антиканоническим дивизором, наиболее общей задаче классификации трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями. Эта задача естественна также в рамках теории минимальных моделей, так как рассматриваемые многообразия Фано являются антиканоническими моделями многообразий $\mathbb{Q}$-Фано (см. работу[29]).

Первым шагом в направлении решения поставленной задачи служит оценка антиканонической степени многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями. В неособом случае для этой степени из работ[15], [16], [17] следует оценка $\leqslant 64$, которая достигается только на $\mathbb{P}^3$. Более того, в работе[30] было доказано, что в общем случае антиканоническая степень не превосходит 72, и данная оценка достигается лишь на двух взвешенных проективных пространствах $\mathbb{P}(6,4,1,1)$ и $\mathbb{P}(3,1,1,1)$. Это положительно решает проблему Фано–Исковских (см. работу[31]). Заметим также, что отсюда следует оценка на род многообразий Фано–Энриквеса. Далее, класс трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями разбивается на подклассы многообразий одной и той же антиканонической степени. Для некоторых из этих подклассов можно получить полное описание (см., например, работу[30]). Таков один из путей решения задачи классификации трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями. Другой способ восходит к работам[8], [9], [14] (см. также работы [15] и [16]) и основан на детальном изучении антиканонической линейной системы на данном трехмерном многообразии Фано с каноническими горенштейновыми особенностями. При некоторых ограничениях на эти линейные системы можно получить полную классификацию соответствующих многообразий (см., например, работу[32]).

Разумеется, оба этих подхода были бы весьма затруднительными без огромного арсенала средств, доставляемого теориями минимальных моделей и особенностей алгебраических многообразий. Так, в рамках теории минимальных моделей изучение трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями естественно сводится

[29] Alexeev V. General elephants of $\mathbb{Q}$-Fano 3-folds // Compositio Math. 1994. V. 91. P. 91–116.

[30] Прохоров Ю. Г. Степень трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями // Мат. сб. 2005. Т. 196(1). С. 81–122.

[31] Исковских В. А. Антиканонические модели трехмерных алгебраических многообразий // Современные проблемы математики. Т. 12 (Итоги науки и техники). М.: ВИНИТИ. 1979. С. 159–236.

[32] Пржиялковский В. В., Чельцов И. А., Шрамов К. А. Гиперэллиптические и тригональные трехмерные многообразия Фано // Изв. РАН Сер. Матем. 2005. Т. 69. С. 145–204.

к случаю трехмерных *слабых многообразий Фано* (т.е. нормальных проективных алгебраических многообразий с численно эффективным и объемным антиканоническим дивизором) с терминальными факториальными особенностями. Геометрия многообразий последнего типа во многом определяется строением экстремальных лучей и соответствующих экстремальных стягиваний на этих многообразиях. Описание же экстремальных лучей происходит во многом за счет описания структуры конуса Мори соответствующего слабого многообразия Фано.

Результаты диссертации продолжают описанные выше исследования.

Цель работы

• Классифицировать трехмерные многообразия Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, антиканонической степени большей или равной 64;
• Классифицировать многообразия Фано–Энриквеса, которые являются факторами трехмерных многообразий Фано X с каноническими горенштейновыми особенностями по действию регулярной инволюции, таких, что линейная система $|-K_X|$ задает морфизм, не являющийся вложением.

Научная новизна

1. Доказано, что кроме многообразий $\mathbb{P}(6,4,1,1)$ и $\mathbb{P}(3,1,1,1)$ лишь следующие трехмерные многообразия Фано с каноническими горенштейновыми особенностями имеют антиканоническую степень большую или равную 64:

- X_{70}: образ антиканонически вложенного многообразия $\mathbb{P}(6,4,1,1) \subset \mathbb{P}^{38}$ при бирациональной проекции из особой cDV точки на $\mathbb{P}(6,4,1,1)$. В этом случае антиканоническая степень равна 70;
- X_{66}: антиканонический образ $\mathbb{P}^2$-расслоения $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$. В этом случае антиканоническая степень равна 66;
- $\mathbb{P}^3$;
- конус в $\mathbb{P}^9$ над антиканонически вложенной поверхностью $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$;
- конус в $\mathbb{P}^9$ над антиканонически вложенной поверхностью $\mathbb{F}_1$;

- образ антиканонически вложенного многообразия $\mathbb{P}(3,1,1,1) \subset \mathbb{P}^{38}$ при бирациональной проекции из касательного пространства в неособой точке на $\mathbb{P}(3,1,1,1)$;
- образ антиканонически вложенного многообразия $\mathbb{P}(6,4,1,1) \subset \mathbb{P}^{38}$ при бирациональной проекции из касательного пространства в неособой точке на $\mathbb{P}(6,4,1,1)$;
- образ антиканонически вложенного многообразия $X_{66} \subset \mathbb{P}^{35}$ при бирациональной проекции из особой cDV точки на X_{66}.

Во всех случаях, кроме первых двух, антиканоническая степень равна 64.

2. Доказано, что имеется ровно 12 классов многообразий Фано–Энриквеса, которые являются факторами трехмерных многообразий Фано X с каноническими горенштейновыми особенностями по действию регулярной инволюции, таких, что линейная система $|-K_X|$ задает морфизм, не являющийся вложением. При этом два из этих классов содержатся в списках работ[25], [26], поэтому общие многообразия Фано–Энриквеса в этих классах имеют обыкновенные двойные особенности. С другой стороны, общие многообразия Фано–Энриквеса в остальных классах имеют особенности хуже чем обыкновенные двойные.

Основные методы исследования

В работе применяются методы алгебраической геометрии[33], теории (лог-)минимальных моделей алгебраических многообразий[34], [35], [36], [37], теории особенностей алгебраических многообразий[38], [39], [40], теория торических многообразий[41].

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты представляют интерес для многомерной алгебраической

[33] Хартсхорн Р. Алгебраическая геометрия // М.: Мир. 1981.
[34] Mori S. Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective // Ann. Math. 1982. V. 115(2). P. 133–176.
[35] Mori S. Flip theorem and the existence of minimal models for 3-folds // J. Amer. Math. Soc. 1988. V. 1. P. 117–253.
[36] Kollár J. et al. Flips and Abundance for Algebraic Threefolds // Astérisque. 1992. V. 211.
[37] Шокуров В. В. Трехмерные лог-перестройки // Изв. АН СССР Сер. Матем. 1992. Т. 56(1). С. 105–203.
[38] Kollár J. Singularities of pairs // Proc. Symp. Pure Math. 1997. V. 62. P. 221–287.
[39] Reid M. Canonical 3-folds // Algebraic Geometry, Angers. 1979. P. 273–310.
[40] Reid M. Young person's guide to canonical singularities // Proc. Syrup. Pure Math. 1987. V. 46. P. 343–416.
[41] Fulton W. Introduction to toric varieties // Princeton University Press. 1993.

геометрии, теории многообразий Фано и теории особенностей.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

- Кафедральный семинар кафедры высшей алгебры МГУ (2009);
- Конференция “Workshop for birationalists” в Университете г. Поханг (Корея, 2008);
- Семинар “Геометрия алгебраических многообразий” под руководством В. А. Исковских и Ю. Г. Прохорова в МГУ (Москва, 2006).

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 3 работах, список которых приводится в конце автореферата [1-3].

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из 4 глав (первая из которых является вводной) и библиографии (82 наименований). Общий объем диссертации составляет 116 страниц.

Краткое содержание работы

Первая глава – введение. Здесь обсуждается история изучаемых вопросов, дается обзор ранее известных результатов и формулируются основные утверждения, доказанные в диссертации.

В главе 2 мы напоминаем необходимые для доказательства основных результатов диссертации известные понятия и утверждения из теории особенностей алгебраических многообразий (см. раздел 2.2), теории минимальных моделей алгебраических многообразий (см. раздел 2.3) и теории торических многообразий (см. раздел 2.4). Мы также устанавливаем соглашения относительно обозначений и понятий, используемых в диссертации (см. раздел 2.1).

В главе 3 мы доказываем результат о классификации трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, антиканонической степени $\geqslant 64$. В разделе 3.1 мы вводим необходимые понятия и формулируем теорему 3.1.10 о трехмерных многообразиях Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, антиканонической степени большей 64 и меньшей 72. В этом же разделе мы приводим известные утверждения о свойствах антиканонических линейных систем на трехмерных многообразиях Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, большой антиканонической степени. Это позволит рассматривать данное трехмерное многообразие Фано X с каноническими горенштейновыми особенностями, антиканонической степени $64 < (-K_X)^3 < 72$, относительно вложения антиканонической линейной системой $|-K_X|$. В этом случае $(-K_X)^3$ совпадает со степенью вложенного многообразия. Более того, таким способом вложенное многообразие Фано X оказывается пересечением квадрик. Далее, используя результаты разделов 2.2 и 2.3 в главе 2, по данному многообразию Фано X мы построим бирациональный морфизм $f: Y \longrightarrow X$ такой, что многообразие Y имеет терминальные факториальные особенности, антиканонический дивизор $-K_Y$ является численно эффективным и объемным, и выполнено равенство $K_Y = f^*(K_X)$ на Y. Существенно в этой конструкции то, что $(-K_Y)^3 = (-K_X)^3$ и для Y имеется полное описание K_Y-экстремальных стягиваний (см. работу[42]). В частности, при $(-K_X)^3 > 64$ любое такое стягивание должно быть бирациональным и дивизориальным. В зависимости от типа стягивания, мы разбиваем доказательство теоремы 1.3.10 на два больших случая.

В разделе 3.2 мы рассматриваем случай, когда данное K_Y-экстремальное стягивание на Y приводит к многообразию Y' того же типа, что и Y. Переходя к соответствующему многообразию Фано X, мы покажем, что X является образом при бирациональной проекции антиканонически вложенного многообразия Фано X' с каноническими горенштейновыми особенностями, степени большей чем степень X (см. лемму 3.2.1). Мы докажем, что в этом случае должно быть $X' = \mathbb{P}(6,4,1,1)$ и $X = X_{70}$ (см. предложение 3.2.3 и леммы 3.2.11, 3.2.12). Кроме того, мы докажем, что многообразие X_{70} имеет единственную особую точку, и эта точка не cDV (см. предложение 3.2.6).

Оставшаяся часть главы 3 посвящена рассмотрению противоположного случая – когда стягивание экстремального луча на Y, отрицательного

[42]Cutkosky S. Elementary contractions of Gorenstein threefolds // Math. Ann. 1988. V. 280. P. 521–525.

относительно K_Y, приводит к многообразию Y', особенности которого хуже чем особенности Y, или чей антиканонический дивизор $-K_{Y'}$ не является численно эффективным. Используя результаты из раздела 3.1, мы покажем в этом случае, что соответствующее многообразие Фано X либо содержит не cDV точку, либо особо вдоль прямой, либо содержит плоскость.

В разделе 3.3, рассматривая линейную систему $\mathcal{H}$ всех гиперплоских сечений многообразия X, которые проходят либо через не cDV точку, либо через прямую, либо через плоскость на X, мы показываем, следуя работе[30], что Y и $f : Y \longrightarrow X$ можно выбрать такими, что

- для собственного прообраза H_Y общего элемента в линейной системе $\mathcal{H}$ на Y относительно f пара (Y, H_Y) имеет канонические особенности;
- H_Y является численно эффективным и объемным дивизором Картье;
- имеет место численное равенство $K_Y + H_Y + B_Y \equiv 0$ для некоторого эффективного дивизора B_Y на Y с неприводимыми компонентами отрицательной кодаировой размерности;
- для общего элемента L_Y в линейной системе $|-K_Y|$ пара (Y, L_Y) имеет канонические особенности.

Применяя *лог-программу минимальных моделей* к паре (Y, H_Y), мы приходим к расслоению Мори W с дивизором H_W, для которых указанные выше свойства многообразия Y и дивизора H_Y сохраняются. Довольно сильным условием является также то, что линейная система $|-K_W|$ задает бирациональное отображение многообразия W на исходное многообразие Фано X. Далее, многообразие W является либо расслоением на поверхности дель Пеццо, либо расслоением на коники, либо многообразием $\mathbb{Q}$-Фано. При этом, как следует из работы[30], последний случай не возможен.

В разделе 3.4 мы рассматриваем случай, когда W является расслоением на поверхности дель Пеццо. Мы докажем, что должно быть $W = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ или $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(6) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ и $X = X_{66}$ или X_{70} (см. лемму 3.4.1 и предложения 3.4.2, 3.4.8). Для этого нам потребуется, с одной стороны, информация о строении линейной системы $|-K_W|$ при $W = \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1})$ (см. лемму 3.4.3). Здесь мы воспользуемся результатами из раздела 3.4 в главе 2. С другой стороны, нам будут нужны свойства проекций антиканонически вложенных многообразий X_{70} и $\mathbb{P}(6, 4, 1, 1)$ из линейных пространств малых размерностей (см. леммы 3.1.26 и 3.4.10–3.4.14). Здесь мы существенно используем то, что X_{70}

и $\mathbb{P}(6,4,1,1)$ являются пересечениями квадрик (см. предложение 3.1.13). Кроме того, мы докажем, что особенности многообразия X_{66} не являются cDV (см. предложение 3.4.5).

В разделе 3.5 мы рассматриваем случай, когда W является расслоением на коники. Прежде всего, мы установим ограничения на размерность линейной системы $|H_W|$ (см. предложение 3.5.2). Здесь нам будут нужны свойства проекций антиканонически вложенного многообразия $\mathbb{P}(3,1,1,1)$ из линейных пространств малых размерностей. В частности, мы снова существенно используем тот факт, что $\mathbb{P}(3,1,1,1)$ является пересечением квадрик (см. предложение 3.1.13). Далее, следуя работе[30], мы сводим рассмотрение к случаю, когда W является $\mathbb{P}^1$-расслоением либо над $\mathbb{P}^2$, либо над $\mathbb{F}_n$, где $n \leqslant 4$ и $n \neq 1$. Тогда, используя теорему Римана–Роха для векторных расслоений ранга 2 на рациональной поверхности и свойства классов Чжэня таких расслоений, мы получим противоречие с доказанной оценкой на размерность $|H_W|$ (см. предложения 3.5.12 и 3.5.16).

В разделе 3.6 мы выведем несколько следствий из теоремы 3.1.10. В одном из них – теореме 3.6.5 – мы докажем точную оценку $\leqslant 17$ на род многообразий Фано–Энриквеса. Это достигается, во-первых, путем представления данного многообразия Фано–Энриквеса U в виде фактора X/τ трехмерного многообразия Фано X с каноническими горенштейновыми особенностями по действию регулярной инволюции τ на X с конечным числом неподвижных точек. Затем, в предположении, что род U больше 17, задача сводится к вопросу о существовании такой инволюции τ на многообразиях $\mathbb{P}(6,4,1,1)$, $\mathbb{P}(3,1,1,1)$, X_{70} и X_{66}, для которых этот вопрос решается отрицательно. Далее, в теореме 3.6.6 мы получим классификацию трехмерных многообразий Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, антиканонической степени 64. Здесь мы следуем основным шагам в доказательстве теоремы 3.1.10, уточняя некоторые из них.

В главе 4 мы изучаем многообразия Фано–Энриквеса с изолированными особенностями. В разделе 4.1, используя представление данного многообразия Фано–Энриквеса U в виде фактора X/τ трехмерного многообразия Фано X с каноническими горенштейновыми особенностями по действию регулярной инволюции τ на X с конечным числом неподвижных точек, мы сосредоточиваем наше внимание на тех U, для которых антиканоническая линейная система $|-K_X|$ на X не задает изоморфизма. Мы формулируем результат о классификации таких многообразий Фано–Энриквеса в теореме 4.1.1. В этом же разделе мы доказываем несколько вспомогательных утверждений, которые сужают круг поиска соответствующих U и X. Так, мы докажем, что линейная система $|-K_X|$ не имеет базисных точек на X и задает конечный морфизм степени 2 на минимальное многообразие $Y \subset \mathbb{P}^n$, где $n := \dim|-K_X|$.

В разделе 4.2 мы изучаем те X, для которых Y имеет малую степень. При этом возникают 4 случая: Y является конусом над поверхностью Веронезе, пересечением квадрики и квартики в $\mathbb{P}(1,1,1,1,1,2)$, образом $\mathbb{P}^2$-расслоений $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2))$ и $\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ при вложении их в $\mathbb{P}^n$ тавтологической линейной системой. Три последних случая возникают, например, в работах[25], [26]. Случай конуса над поверхностью Веронезе мы исключаем в лемме 4.2.3. Отсюда, согласно теореме Энриквеса о классификации минимальных многообразий, получаем, что остается разобрать случай, когда Y является образом $\mathbb{P}^2$-расслоения $\mathbb{F} := \mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d_3))$ относительно морфизма, заданного тавтологической линейной системой на $\mathbb{F}$. Более того, многообразие Фано X является тогда антиканоническим образом двойного накрытия многообразия $\mathbb{F}$. Этот случай мы рассматриваем в разделе 4.3. Используя программу минимальных моделей, мы докажем (см. лемму 4.3.3), что действие инволюции τ продолжается с X на $\mathbb{F}$. Это, вместе с ограничениями, полученными в разделе 4.1, и классификацией в работе[32] приводит к $\mathbb{F}$ со специальными значениями d_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$. Обратно, в каждом из полученных случаев, выбирая подходящим образом дивизор D на многообразии $\mathbb{F}$, инвариантный относительно некоторой регулярной инволюции на $\mathbb{F}$, мы построим двойное накрытие $\mathbb{F}$ с ветвлением в D, антиканонический образ которого дает многообразие Фано X с инволюцией τ, такое, что фактор X/τ является многообразием Фано–Энриквеса с изолированными особенностями.

Благодарности

Я благодарю моих научных руководителей д.ф-м.н., профессора $\boxed{\text{В. А. Исковских}}$ и д.ф-м.н., профессора Ю. Г. Прохорова за постановку задач и постоянное внимание к работе, д.ф-м.н., профессора И. А. Чельцова за критические замечания, к.ф.-м.н., доцента И. В. Аржанцева, к.ф.-м.н. В. С. Жгуна, к.ф.-м.н. В. В. Пржиялковского и к.ф.-м.н. Д. А. Степанова за полезные обсуждения.

Работы автора по теме диссертации

[1] Каржеманов И. В. О трехмерных многообразиях Фано с каноническими горенштейновыми особенностями // Мат. сб. 2009. Т. 200(8). С. 111–146.

[2] Каржеманов И. В. О некоторых многообразиях Фано–Энриквеса // Деп. в ВИНИТИ РАН. 2009. С. 1–10.

[3] Каржеманов И. В. Трехмерные многообразия Фано с каноническими горенштейновыми особенностями, большой степени // Деп. в ВИНИТИ РАН. 2009. С. 1–38.