Московский государственный университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.2

Липчюс Андрей Адмонтасович

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ПРОСТРАНСТВАХ С МЕРАМИ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2009

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор В.И. Богачев.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Ю.В. Садовничий, кандидат физико-математических наук Е.П. Кругова

Ведущая организация: Московский государственный университет печати

Защита диссертации состоится 20 ноября 2009 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 20 октября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор И.Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Тематика работы находится на стыке теории меры, функционального анализа и теории вероятностей и затрагивает три направления, в которых возникают задачи, связанные с приближением функционалов на пространствах с мерами. Первое направление относится к классической задаче Монжа–Канторовича о перемещении масс (называемой также транспортной задачей). Эта задача была поставлена Монжем еще в 1781 году, но значительное развитие данная тематика получила только после работ Л.В. Канторовича в 40-х годах прошлого столетия (см.[1,2,3]). Л.В. Канторович предложил новый подход к задаче Монжа, поставив более широкую задачу, тесно связанную с первоначальной. К ней оказались применимы идеи разработанной Канторовичем теории линейного программирования. Связь задач Монжа и Канторовича выражена, в частности, тем фактом, что минимум функционала в задаче Канторовича совпадает с инфимумом функционала в задаче Монжа. В последние два десятилетия в этом направлении появились новые плодотворные идеи, в том числе в работах М. Талаграна[4], Я. Бренье[5], Р. Маккэна[6]. Эти исследования положили начало обширной математической теории, имеющей яркие приложения в теории вероятностей, функциональном анализе, дифференциальных уравнениях, физике, метеорологии. Систематическое изложение этой теории можно найти в книгах[7,8,9]. В диссертации установлено совпадение инфимума Монжа и минимума Канторовича в случае вполне регулярных топологических пространств с метризуемыми компактами и непрерывной неотрицательной функции стоимости. Этот результат

---

[1] Monge G. *Memoire sur la Théorie des Deblais et des Remblais.* Hist. Acad. Sci. Paris, 1781.

[2] Канторович Л.В. *О перемещении масс.* ДАН СССР. 1942. Т. 37, N 7-8. С. 227–229.

[3] Канторович Л.В. *О задаче Монжа.* Успехи матем. наук. 1948. Т. 3. С. 225–226.

[4] Talagrand M. *Transportation cost for Gaussian and other product measures.* Geom. Funct. Anal. 1996. V. 6. P. 587–600.

[5] Brenier Y. *Polar factorization and monotone rearrangement of vector valued functions.* Comm. Pure Appl. Math. 1991. V. 44. P. 375–417.

[6] Gangbo W. McCann R.J. *The geometry of optimal transportation.* Acta Math. 1996. V. 177. P. 113–161.

[7] Rachev S.T., Ruschendorf L. Mass transportation problems. V. 1,2 Springer, New York, 1998.

[8] Villani C. Topics in optimal transportation. Amer. Math. Soc., Rhode Island, 2003.

[9] Villani C. Optimal transport, old and new. Springer, New York, 2008.

обобщает теорему итальянского математика А. Пpателли[10], в которой равенство установлено для полных сепарабельных метрических пространств.

Второе из указанных трех направлений связано с приближением нелинейных интегральных функционалов. Такие проблемы возникают во многих приложениях (см.[11,12,13]). В частности, в работах[14,15] при помощи таких приближений определяется функционал, называемый грубой энтропией, который является измененным вариантом энтропии Гиббса. Грубая энтропия задается как энтропия условного математического ожидания функции при условии конечного разбиения. С помощью грубой энтропии можно попытаться решить некоторые теоретические проблемы, связанные с энтропией Гиббса. Например, во многих конкретных динамических системах имеется рост грубой энтропии с течением времени, причем характер роста определяется динамическими свойствами системы. При этом важным оказывается вопрос о сходимости грубой энтропии при измельчении разбиения. Грубая энтропия не всегда приближает энтропию Гиббса. Для сходимости необходимы дополнительные условия на исходное пространство с мерой. Естественно возникает вопрос о приближении указанным способом функционалов более общего вида.

В диссертации рассматривается широкий класс функционалов, включающий энтропию. Для функционалов из этого класса вводятся естественные приближения, определяемые подстановкой в функционал условного математического ожидания исходной функции. Устанавливаются достаточные условия сходимости этих приближений.

Наконец, последнее из упомянутых выше трех направлений связано с понятием независимости случайных величин. При построении

---

[10] Pratelli A. *On the equality between Monges's infimum and Kantorovich's minimum in optimal mass transportation.* Annales Inst. H. Poincaré (B). 2006. V. 43, N 1. P. 1–13.

[11] Козлов В.В. Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика. НИЦ „Регулярная и хаотическая динамика", Институт компьютерных исследований, Москва – Ижевск, 2008.

[12] Красносельский М.А., Забрейко П.П., Пустыльник Е.И., Соболевский П.Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. Наука, М., 1966.

[13] Левин В.Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. Наука, М., 1985.

[14] Козлов В.В., Трещев Д.В. *Тонкая и грубая энтропия в задачах статистической механики.* Теорет. матем. физ. 2007. Т. 151, N 1. С. 120—137.

[15] Treschev D., Piftankin G. *Gibbs entropy and dynamics.* Chaos (Amer. Inst. of Physics). 2008. V. 18, N 2. P. 1–11.

систем независимых случайных величин на заданном вероятностном пространстве возникают препятствия, которые носят фундаментальный характер. В случае, когда вероятностное пространство есть отрезок с мерой Лебега, одно из таких препятствий было обнаружено итальянским математиком Г. Оттавиани в 1947 году (см.[16]). Препятствие заключается в том, что если в системе независимых случайных величин имеется хотя бы одна абсолютно непрерывная функция, то все остальные окажутся функциями с конечным числом значений. Если же в системе есть две непрерывные функции f и g, то f должна принимать все свои значения на любом непустом прообразе вида $g^{-1}(a)$, где a – число (см.[17,18]). Эти результаты частично объясняют, почему не существует классических систем независимых случайных величин из непрерывных функций, задаваемых простыми формулами, и почему в качестве простейших систем независимых случайных величин на отрезке приходится рассматривать системы функций типа Радемахера. Свойство абсолютной непрерывности не имеет аналогов в случае общих вероятностных пространств, и для таких пространств не было известно аналогов теоремы Оттавиани. Кроме того, не была ясна роль абсолютной непрерывности даже в случае отрезка. В диссертации обнаружено свойство, которое отвечает за то, что с данным отображением могут быть независимы только отображения с конечным числом значений. Это свойство формулируется для общих вероятностных пространств. В случае отрезка оно следует из абсолютной непрерывности.

Цель работы. Исследовать связь задач Монжа и Канторовича в случае мер на общих топологических пространствах. Исследовать сходимость конструктивных приближений нелинейных интегральных функционалов. Изучить условия существования нетривиальных случайных величин на заданном вероятностном пространстве, независимых с данной случайной величиной.

Научная новизна. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

---

[16]Ottaviani G. *Sulla independenza delle funzioni misurabili.* Atti Accad. Lincei. Rend. Cl. sci., fis. mat. e natur. Roma. 1947. V. 2. P. 393–398.

[17]Sengupta, H.M. *On continuous independent functions.* Q. J. Math., Oxf. Ser. 1948. V. 19. P. 129–132.

[18]Sengupta, H.M.*On continuous semi-independent functions* Q. J. Math., Oxf. II. Ser. 1954. V. 5, P. 172–174.

1. Для заданной случайной величины на вероятностном пространстве дано достаточное условие общего вида, при котором не существует нетривиальных случайных величин, независимых с данной случайной величиной.

2. Доказано совпадение инфимума Монжа и минимума Канторовича в случае вполне регулярных топологических пространств с метризуемыми компактами и неограниченной ценовой функции.

3. Получено достаточное условие сходимости приближений при помощи условных математических ожиданий для нелинейных интегральных функционалов типа энтропии.

Методы исследования. В работе применяются методы теории меры, функционального анализа, топологии, теории вероятностей, а также некоторые оригинальные конструкции.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Ее результаты и методы могут быть использованы в различных вопросах теории меры, нелинейного анализа, теории случайных процессов и их приложений.

Апробация диссертации. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на научно-исследовательском семинаре „Бесконечномерный анализ и стохастика" под руководством В.И. Богачева и Н.А. Толмачева (2004–2009 гг.), на семинаре в Пекинском Нормальном университете (2007 г.), на международном семинаре „Бесконечномерный стохастический анализ" в университете города Билефельда (Германия, 2005–2008 гг.) и на международной конференции „Стохастический анализ и случайные динамические системы", посвященной 100-летию со дня рождения Н.Н. Боголюбова (Львов, Украина, 2009 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора (одна из них в соавторстве), из них 3 в журналах из перечня ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, включающих 7 параграфов, и списка литературы из 31 наименования. Общий объем диссертации составляет 56 страниц.

Краткое содержание диссертации

Глава 1.

Построение независимых отображений на заданном вероятностном пространстве часто оказывается достаточно сложной задачей. Эта сложность обусловлена тем, что существуют определенные ограничения на независимые отображения. Одно из таких ограничений, в случае когда вероятностное пространство – отрезок с мерой Лебега, было обнаружено в 1947 году Оттавиани[16], доказавшим следующую теорему, которая в свою очередь обобщает еще более старый классический факт, что две гладкие непостоянные функции не могут быть независимыми случайными величинами на отрезке с мерой Лебега.

Пусть g – абсолютно непрерывная функция на отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега λ, отличная от константы. Рассмотрим ее как случайную величину на вероятностном пространстве $([0,1], B([0,1]), \lambda)$. Пусть f – борелевская функция на $[0,1]$, которая независима с g. Тогда f совпадает почти всюду с функцией, принимающей лишь конечное число значений.

Таким образом, если функция абсолютно непрерывна, то с ней могут быть независимы только функции с конечным числом значений. В частности, при построении семейства независимых отображений, заданных на отрезке, в нем не может оказаться двух абсолютно непрерывных функций, отличных от константы. Если же в нем имеется хотя бы одна абсолютно непрерывная непостоянная функция, то все остальные могут быть только простыми.

Свойство абсолютной непрерывности функции на отрезке не имеет естественных аналогов в случае общих вероятностных пространств. В то же время все остальные понятия, используемые в теореме Оттавиани, имеют смысл. В диссертации найдено свойство, которое отвечает за то, что с отображением могут быть независимы только простые отображения. Это свойство формулируется в терминах абстрактной теории меры для общих вероятностных пространств и отображений, принимающих значения в измеримом пространстве. Оно оказывается автоматически выполненным для функций, абсолютно непрерывных на отрезке. При этом существуют разрывные функции с этим свойством. Основной результат первой главы состоит в следующем.

Теорема 1. *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *– некоторое вероятностное пространство,* $(X, \mathcal{A})$ *– измеримое пространство со счетно-порожденной и счетно-разделяющей* σ*-алгеброй* $\mathcal{A}$*. Предположим, что отображения* $f, g\colon \Omega \to X$ *измеримы и независимы, причем* g *удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) $g(E)$ *измеримо относительно индуцированной меры* $P \circ g^{-1}$ *для всех* $E \in \mathcal{F}$*,*

2) *для всякой последовательности попарно непересекающихся множеств* $A_n \in \mathcal{F}$ *положительной меры существует такое* n*, что*

$$P \circ g^{-1}(g(A_n)) < 1.$$

Тогда f *почти всюду совпадает с отображением, принимающим конечное множество значений.*

В этой теореме условие 1) является техническим и оказывается выполненным в большинстве реально возникающих ситуаций. Таким образом, основным свойством, требующим проверки, является свойство 2). Именно оно отвечает за то, что с данным отображением могут быть независимы только отображения с конечным числом значений.

Условия теоремы выполнены, например, для инъективного борелевского отображения суслинских пространств: тогда свойство 2) очевидно. Применяя теорему, получаем, что с таким отображением могут быть независимы только функции с конечным числом значений. В случае отрезка в качестве следствия получаем, что вместо абсолютной непрерывности достаточно потребовать трех следующих свойств: измеримость образов борелевских множеств относительно меры, индуцированной g (что автоматически выполнено для борелевских функций), свойство (S) Банаха и наличие у образа меры Лебега при отображении g абсолютно непрерывной компоненты относительно меры Лебега.

Условие доказанной теоремы не является необходимым, для того, чтобы с данным отображением могли быть независимы только простые, даже если требовать выполнение этого условия для всех эквивалентных версий отображения.

Глава 2.

Задача оптимального переноса масс была поставлена Монжем в 1781 году. В современных терминах задача Монжа формулируется следующим образом. Пусть μ и ν – вероятностные радоновские меры на топологических пространствах X и Y. Пусть $c : X \times Y \to \mathbb{R}^+$ – непрерывная функция. Необходимо найти измеримое отображения T, переводящее μ в ν и минимизирующее величину

$$M(T) := \int_X c(x, T(x))\, d\mu.$$

Величина

$$\inf_{\nu=\mu\circ T^{-1}} M(T)$$

называется инфимумом Монжа.

Эта задача оказалась достаточно сложной. Во-первых, $M(T)$ – нелинейный функционал. Во-вторых, даже в несколько более простом случае, когда $X = Y = \mathbb{R}^n$, $\mu = f\ dx$, $\nu = g\ dy$, причем T – гладкий диффеоморфизм $\mathbb{R}^n$, условие $\nu = \mu \circ T^{-1}$ приводит к нелинейному уравнению Монжа–Ампера

$$f(x) = g(T(x)) \cdot |\det \nabla T(x)|.$$

Это соотношение существенно нелинейно даже с точки зрения теории нелинейных уравнений, и с ним сложно работать, используя классические методы вариационного исчисления. Задача Монжа долгое время оставалась нерешенной.

В 1942 году Л.В. Канторович предложил новый подход к задаче Монжа. Формулировка задачи Канторовича такова. Пусть μ и ν – вероятностные радоновские меры на топологических пространствах X и Y. Пусть $c\colon\ X \times Y \to \mathbb{R}^+$ – непрерывная функция. Обозначим через $\pi_X\gamma$ и $\pi_Y\gamma$ проекции меры γ на X и Y соответственно. Необходимо найти меру γ на $X \times Y$ с $\pi_X\gamma = \mu$ и $\pi_Y\gamma = \nu$, минимизирующую величину

$$K(\gamma) := \int_{X\times Y} c(x, y)\, d\gamma.$$

Величина

$$\inf_{\gamma} K(\gamma),$$

где инфимум берется по всем γ с $\pi_X = \mu$ и $\pi_Y = \nu$, называется минимумом Канторовича. Название оправдывается тем фактом, что в случае достаточно общих топологических пространств инфимум достигается.

В задаче Канторовича функционал, который необходимо минимизировать, уже линейный. Множество $\Pi(X, Y)$ вероятностных мер с проекцией μ на X и ν на Y, по которому берется инфимум, является выпуклым. Во многих важных случаях оно еще и компактно в слабой топологии.

Минимум (или инфимум) Канторовича не превосходит минимума Монжа, ибо для всякого отображения T, переводящего μ в ν, мера γ, являющаяся образом μ при отображении $x \mapsto (x, T(x))$, имеет в качестве проекций μ и ν. На самом деле при достаточно общих предположениях инфимум Монжа совпадает с минимумом Канторовича.

В данной главе доказано совпадение инфимума Монжа и минимума Канторовича в случае, когда X и Y – вполне регулярные топологические пространства с метризуемыми компактами, ценовая функция c неотрицательна и непрерывна, μ и ν – вероятностные радоновские меры, причем μ не имеет атомов.

Основной результат главы состоит в следующем.

Теорема 2. *Пусть X и Y – вполне регулярные пространства с метризуемыми компактами, c – неотрицательная непрерывная функция на $X \times Y$, а μ и ν – радоновские меры на X и Y соответственно. Пусть μ не имеет атомов. Тогда*

$$\min_{\gamma} K(\gamma) = \inf_{T} M(T),$$

где минимум берется по всем неотрицательным радоновским мерам γ с проекциями μ и ν, а инфимум по всем измеримым отображениям T, переводящим μ в ν.

Глава 3.

Для различных приложений представляет интерес вопрос сходимости конструктивных приближений нелинейных функционалов от плотностей мер типа энтропии. В частности, в работах[11,14,15] рассматриваются приближения функционала энтропии на метрическом пространстве M с борелевской мерой μ, который имеет вид

$$S(f) = -\int_M f \ln f \, d\mu.$$

Приближения задаются формулой $S_n(f) := S(A_n(f))$, где $\{A_n\}$ – последовательность операторов с определенными свойствами. Основной модельный случай: каждый A_n – оператор взятия условного математического ожидания относительно некоторой фильтрации. Возникает вопрос, можно ли таким образом приближать функционалы более широких классов, включающих энтропию. Функционал энтропии S лишь знаком отличается от функционала вида

$$S(f) = \int_M V(f(x))\,\mu(dx),$$

где $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ – выпуклая функция (в случае энтропии $V(y) = |y| \ln |y|$). В данной главе показано, что результат о сходимости приближений распространяется на случай произвольной выпуклой функции $V(\cdot)$, причем можно рассматривать еще более широкий класс функционалов вида

$$H_V(f) = \int_M V(x, f(x))\,\mu(dx),$$

где функция V выпукла по второму переменному и удовлетворяет некоторым дополнительным условиям по первому переменному. Кроме того, здесь уточнен ряд утверждений из упомянутых работ.

Первый результат о приближениях формулируется для общих пространств с мерой и случая, когда функция $V\colon M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ зависит от двух переменных. При этом считаем, что $\mu(M) < \infty$. Тогда без ограничения общности можно считать меру μ вероятностной.

Теорема 3. *Пусть даны вещественная μ-интегрируемая функция f на вероятностном пространстве $(M, \mathcal{F}, \mu)$ и последовательность под-σ-алгебр $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}$, такие, что последовательность условных математических ожиданий $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)$ сходится к f по мере μ. Если для каждой $\mathcal{F}_k$ выполнено приводимое ниже условие* 1) *с одними и теми же функциями c_1, c_2 и числом C, то*

$$\lim_{k\to\infty} V\big(x, \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)(x)\big) = V(x, f(x)) \quad \text{по норме } L^1(\mu).$$

В частности, $H_V(f)$ есть предел интегралов от $V\big(x, \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_k)(x)\big)$.

Условие 1) на σ-алгебру $\mathcal{F}_k$ заключается в следующем: существует последовательность $\{Q_i^n\}_{i=1,2,\dots}$ вложенных счетных измеримых разбиений пространства M, для которых $\mathcal{F}_k = \sigma(\{Q_i^n\}_{n,i\geq 1})$ и для некоторой измеримой функции $\theta \geq 0$, двух функций $c_1, c_2 \in L^1(\mu)$ и числа C выполнены оценки

$$V(x, f(y)) \leq \theta(x,y) + c_1(x) + c_2(y),$$

$$\limsup_{k\to\infty} \sup_{i\geq 1} \sup_{Q_i^k \times Q_i^k} \theta(x,y) < C < \infty.$$

В теореме 3 вместо условия $V \geq 0$ достаточно иметь ограниченность V снизу (добавлением постоянной это сводится к доказанному), поэтому полученные результаты охватывают функции типа $|y|\ln|y|$. Отметим, что указанные оценки на V выполнены, если $\theta = 0$ и $c_1, c_2 \in L^1(\mu)$. Например, они выполнены, если V не зависит от x и $V \circ f \in L^1(\mu)$. В случае метрического пространства с метрикой d они выполнены, если диаметры рассматриваемых разбиений стремятся к нулю и $\theta(x,y) = h(d(x,y))$, где функция h ограничена в окрестности нуля.

Условия на функцию V в теореме можно ослабить до следующих:
(i) функция $V(x,y)$ непрерывна по y и μ-измерима по x,
(ii) $|V| \leq W$, где W удовлетворяет условиям теоремы 3.

Далее рассматривается случай метрического пространства и функции V, зависящей от одной переменной. Пусть $V\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, μ – борелевская вероятностная мера на некотором метрическом пространстве X. Положим

$$H_V(f) := \int_X V(f(x))\,\mu(dx),$$

Пусть $\{\pi_n\}$ – последовательность разбиений X на μ-измеримые части $X_{n,k}$ ненулевой меры, причем $X_{n,k} \cap X_{n,m} = \emptyset$ при $k \neq m$. Для всякой μ-интегрируемой функции ϱ при каждом n зададим функцию ϱ_n формулой

$$\varrho_n(x) := \mathbb{E}_n\varrho(x) := \frac{1}{\mu(X_{n,k})}\int_{X_{n,k}} \varrho\,d\mu \quad \text{при } x \in X_{n,k}.$$

Функция ϱ_n представляет собой условное математическое ожидание функции ϱ относительно σ-алгебры, порожденной разбиением π_n. Ясно, что $\mathbb{E}_n$ — линейный оператор в $L^1(\mu)$ с нормой не более 1.

Теорема 4. *Пусть $\mu(X) < \infty$. Если V – выпуклая функция, причем $V \circ \varrho \in L^1(\mu)$, то справедливо равенство* $\lim\limits_{n\to\infty} H_V(\varrho_n) = H_V(\varrho)$.

Без дополнительных условий эта теорема неверна для бесконечных мер. Однако в случае, когда мера μ не имеет атомов и $\varrho \geq 0$, всегда существует такая последовательность разбиений π_n, что выполнено равенство $\lim\limits_{n\to\infty} H_V(\varrho_n) = H_V(\varrho)$.

В случае бесконечных мер необходимы дополнительные условия на плотность ϱ, обеспечивающие сходимость для любой последовательности разбиений со стремящимися к нулю диаметрами.

Теорема 5. *Пусть пространство X является объединением возрастающей последовательности борелевских множеств X_j, причем*

$$\operatorname{dist}(X_j, X\backslash X_{j+2}) \geq c > 0 \text{ при всех } j \text{ и } \mu(X_{j+1}\backslash X_j) < \infty.$$

Пусть $\varrho \in L^1(\mu)$, $\varrho \geq 0$, V – выпуклая функция на $[0,+\infty)$ с $\lim\limits_{t\to\infty} V(t) = +\infty$, причем $V\circ\varrho \in L^1(\mu)$. Если $\sup_{x\in X_{j+2}\backslash X_{j-1}} \varrho(x) \to 0$ и выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu(X_{j+1}\backslash X_j) \sup_{x\in X_{j+2}\backslash X_{j-1}} |V(\varrho(x))| < \infty,$$

то $H_V(\varrho_n) \to H_V(\varrho)$.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.И. Богачеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

Работы автора по теме диссертации

[1] Липчюс А.А. Одно свойство независимых отображений. Теория вероятн. и ее примен. 2005. Т. 49, N 2. С. 333–336.

[2] Липчюс А.А. Замечание о равенстве в задачах Монжа и Канторовича. Теория вероятн. и ее примен. 2006. Т. 50, N 4. С. 689–693.

[3] Lipchyus A.A. Approximation of entropy type nonlinear functionals of probability densities. Abstracts of the International Conference “Stochastic analysis and random dynamics”, 14–20 June, 2009, Lviv, Ukraine, p. 146.

[4] Богачев В.И., Липчюс А.А. Приближение нелинейных интегральных функционалов. Доклады РАН. 2009. Т. 428, № 6. С. 727–732.

В работе №4 Липчюсу А.А. принадлежат лемма 1, теорема 1, теорема 2, пример 1, предложения 1,2,4; В.И. Богачеву принадлежат общая постановка задач, предложение 3, пример 2.