МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Ивочкин Михаил Юрьевич

Интегрируемость и неинтегрируемость уравнений движения тяжелого тела эллипсоидальной формы на гладкой горизонтальной плоскости

01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва
2009

Работа выполнена на кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители:

д. ф.-м. н., проф. Карапетян А. В.

к. ф.-м. н., доц. Ошемков А. А.

Официальные оппоненты:

д.ф.-м.н., проф. Болсинов А.В.

к.ф.-м.н., Довбыш С.А.

Ведущая организация:

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН

Защита состоится «11» декабря 2009 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета *Д.501.001.22* при *МГУ* расположенном по адресу: *119991, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10*

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке *механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).*

Автореферат разослан 11 ноября 2009 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д.501.001.22,

доцент *Прошкин В.А.*

Общая характеристика работы

Актуальность работы

Движение тела по гладкой горизонтальной плоскости — важная задача аналитической механики. Эта задача является более общей и менее изученной, чем задача о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Естественный вопрос для аналитической механики — при каких значениях параметров задачи дифференциальные уравнения, описывающие движение, допускают дополнительные интегралы. В настоящее время появилась надежда на решение этой задачи, в связи с развитием методов дифференциальной теории Галуа, давших новый импульс к изучению вопроса о неинтегрируемости гамильтоновых систем. По-прежнему остается важной задачей качественное исследование уже известных интегрируемых систем. Таким образом, задачи поиска новых и качественного исследования уже известных интегрируемых случаев действительно актуальны для современной механики.

Цель диссертационной работы

Диссертация посвящена качественному изучению известных интегрируемых случаев, а также получению условий существования дополнительных интегралов для уравнений, описывающих движение тяжелого твердого тела эллипсоидальной формы на гладкой горизонтальной плоскости. Исследования базируются на методах теории бифуркаций, разработанных С. Смейлом и А.Т. Фоменко, а также на подходах и методах исследования интегрируемости, разработанных А. Пуанкаре, В.В. Козловым, С.Л. Зиглиным, Ж.Ж. Моралисом-Руизом, Ж.П. Рамисом.

Научная новизна работы. Все основные результаты диссертации являются новыми, ранее неизвестными. В работе впервые были построены бифуркационные диаграммы, изучены перестройки торов для дифференциальных уравнений, описывающих движение динамически и геометрически симметричного эллипсоида на гладкой плоскости. При различных предположениях о выборе параметров эллипсоида на гладкой плоскости найдены необходимые, а в некоторых случаях — и достаточные условия интегрируемости уравнений движения.

Достоверность результатов. Все результаты диссертации научно обоснованы и базируются на методах топологического анализа, теории бифуркаций, методах теории динамических систем, дифференциальной теории Галуа, теории функции комплексного переменного.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит теоретический характер, полученные результаты могут быть использованы в исследованиях, проводимых в МГУ имени М.В. Ломоносова, Вычислительном центре имени А.А. Дородницына РАН, Математическом институте имени В.А. Стеклова и других научно-исследовательских центрах.

Апробация работы.

Результаты, представленные в диссертации, докладывались автором и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Семинар "Современные геометрические методы"кафедры дифференциальной геометрии и приложений мех-мата МГУ под руководством проф., акад. РАН А.Т. Фоменко, проф. А.В. Болсинова, проф. А.С. Мищенко, доц. А.А. Ошемкова, доц. Е.А. Кудрявцевой, 14.02.2007

- 6-ой Международный симпозиум по классической и небесной механике, Великие Луки, 1-6.08.2007

- X Международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления", Москва, 1-5.06.2008

- Семинар "Избранные задачи динамики"кафедры теоретической механики и мехатроники мех-мата МГУ под руководством проф., чл.-корр. РАН Д.В. Трещева, 16.10.2008

- V Международная конференция "Поляховские чтения", Санкт-Петербург, 3-6.02.2009

- Семинар имени В.В. Румянцева кафедры теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета МГУ под руководством проф. А.В. Карапетяна, чл.-корр. РАН В.В. Белецкого, проф. Я.В. Татаринова, 08.04.2009

Публикации.

Основные результаты диссертации изложены в пяти печатных работах, две из которых опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура работы.

Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы из 92 наименований. Общий объем диссертации — 90 страниц.

Содержание работы

Во введении описана предметная область и цель настоящей диссертации, дан обзор работ, посвященных исследованию интегрируемых и неинтегрируемых случаев в динамике тяжелого твердого тела на гладкой горизонтальной плоскости, приведено краткое содержание диссертации.

Первая глава носит обзорный характер. В ней, в основном, рассматриваются различные методы доказательства неинтегрируемости дифференциальных уравнений.

Приведено описание различных методов доказательства неинтегрируемости, сформулированы соответствующие теоремы, условия их применения и преимущества одних методов перед другими. Показана связь одних методов доказательства неинтегрируемости с другими. Далее подробно излагается следующий подход к исследованию неинтегрируемости, основанный на линеаризации дифференциальных уравнений в окрестности частного нестационарного решения. Пусть исходная система интегрируема. Тогда и линеаризованная система тоже интегрируема. Пусть первые ненулевые члены в разложении первых интегралов на решении имеют первый порядок (т.е. интегралы функционально независимы на частном решении). Выбор частного решения зависит от вида дифференциальных уравнений. В качестве такого решения можно взять, например, периодическое или квазиоднородное решение. Такие решения позволяют использовать локальные методы, верные лишь в предположении функциональной независимости интегралов на частном решении. Более общий случай возникает, когда предполагается, что необязательно первый член в разложении интегралов на решении ненулевой (т.е. интегралы могут быть зависимы на решении, но независимы в его окрестности). Тогда применяются методы, разработанные С.Л. Зиглиным и Ж.Ж. Моралисом-Руизом, Ж.П. Рамисом в предположении комплексности системы дифференциальных уравнений. Метод Зиглина основан на вычислении группы монодромии для нормального уравнения в вариациях. Однако, этот метод в общем случае неконструктивен, в отличие от метода дифференциальных групп Галуа (Моралиса-Руиза-Рамиса): поскольку в общем случае не существует процедуры вычисления группы монодромии. Более общий метод Моралиса-Руиза-Рамиса представляет собой линейный аналог теоремы Арнольда-Лиувилля о фазовых торах.

Существенным шагом в применении данных методов является выбор частного решения, что дает необходимые условия интегрируемости; затем берется другое частное решение и находятся другие условия интегрируемости. В итоге эти условия пересекаются лишь в исключительных случаях. Такой подход оказался продуктивным. Например, для уравнений вида Эйлера-Пуассона берутся три вида частных решений, применявшихся еще Ковалевской и Ляпуновым.

Первое решение используется для случая различных моментов инерции и является «не физическим»: вектор восходящей вертикали равен нулю, а импульс является решением уравнений Эйлера. Риманова поверхность такого частного решения есть тор, параметризованный комплексным временем. Если вычислять группу монодромии для уравнения в вариациях, то она состоит из двух образующих и условие их коммутируемости равносильно однозначности решения в окрестности особой точки (это есть не что иное, как тест Ковалевской-Пенлеве на однозначность решений).

Вторые два решения применяются для динамически симметричного тела и при определенном расположении центра масс: это решения вида $\omega_1 = \omega_3 = \gamma_2 = 0$ для произвольного расположения центра масс, а также решения вида $\omega_1 = \omega_2 = \gamma_3 = 0$ для случая, когда центр масс расположен в экваториальной плоскости тела. (Здесь $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ — вектор угловой скорости и $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — единичный вектор восходящей вертикали). Остальные переменные выражаются через эллиптические функции в зависимости от времени. В линеаризованных около этих решений уравнениях осуществляется замена времени, такая, что коэффициенты этого линейного уравнения, которые выражались через эллиптические функции, будут выражаться через рациональные функции. Для таких уравнений существует алгоритм Ковачича, позволяющий проверить их разрешимость в квадратурах, причем, если рассматривается условие выполнения теста Ковалевской-Пенлеве, то проверяется условие однозначности решения линейных уравнений. Таким образом находятся условия существования интеграла в мероморфных функциях (или, в частном случае, алгебраическая полная интегрируемость).

Другой подход к доказательству неинтегрируемости основан на введении определенным образом малого параметра, возмущающего интегрируемую систему. В работах Ж.Ж. Моралиса-Руиза, Ж.П. Рамиса показано, что такой подход аналогичен подходу дифференциальной теории Галуа. Это позволяет выявить ряд эффектов, которые возникают при переходе к неинтегрируемости, например, в случае возмущения сепаратрис.

Результаты, изложенные в этой главе, используются при доказательстве неинтегрируемости в следующих главах.

Во второй главе рассматривается следующая постановка задачи: имеется эллипсоид, который движется по гладкой горизонтальной плоскости, причем

- две полуоси эллипсоида-поверхности равны
- два главных центральных момента инерции равны, главные центральные оси инерции сонаправлены с главными осями эллипсоида-поверхности
- центр масс лежит на оси динамической и геометрической симметрии

Этот случай аналогичен случаю Лагранжа в задаче о движении твердого тела вокруг неподвижной точки. В отличие от случая Лагранжа теперь в гамильтониане изучаемой задачи коэффициенты при импульсах зависят от координат, потенциальная энергия — алгебраическая функция координат. Основная цель работы — произвести топологический анализ системы, т.е. описать изменение числа инвариантных торов в зависимости от значений постоянных первых интегралов. При переходе постоянных интегралов через критические значения этот тор вырождается или в окружность, или в точку, или в прямое произведение восьмерки и окружности. Для произвольного случая распределения параметров построены и классифицированы бифуркационные диаграммы, т.е. определены те значения постоянных первых интегралов, при переходе через которые изменяется число инвариантных торов; аналитически доказано, что число таких бифуркационных диаграмм равно семи. Затем изучено, как именно изменяется число торов при переходе значений параметров через ветви бифуркационной диаграммы. Введены определенным образом координаты, упрощающие все вычисления. В них проведено исследование знака приведенного потенциала, что и дает условия на изменение собственных значений стационарных движений. Далее изучены особенности бифуркационной диаграммы, построены и классифицированы изоэнергетические многообразия. По результатам этих исследований построены топологические инварианты, описывающие тип данной гамильтоновой системы.

В третьей главе рассматривается движения эллипсоида, мало отличающегося от шара: вводится возмущение полуосей $b_i = R + \epsilon B_i$. Тогда, как показано в работе А.А. Бурова, А.В. Карапетяна (1985), необходимыми условиями существования дополнительного интеграла будут:

- центр масс эллипсоида совпадает с его геометрическим центром
- главные центральные оси инерции сонаправлены с главными осями эллипсоида-поверхности
- выполнено условие Клебша

  $(B_2 - B_3)J_1 + (B_3 - B_1)J_2 + (B_1 - B_2)J_3 = 0.$

В этой работе в качестве частного решения была выбрана сепаратриса, затем вычислялся интеграл Пуанкаре-Мельникова. Более сильные условия можно получить исследуя второе приближение, что и было сделано в диссертации уже с использованием другого частного решения, выраженного через эллиптические функции. Для изучения уравнений, линеаризованных в его окрестности, был применен метод Зиглина. Риманова поверхность решения — это тор, параметризованный временем, имеющий ровно одну особую точку. Условие метода Зиглина — коммутируемость образующих тора — переходит в условие отсутствия ветвления около этой особой точки, что дает во втором приближении условие $B_1 = B_2 = B_3$ в качестве необходимого условия интегрируемости, вместо условия Клебша.

В четвертой главе рассматривается качение эллипсоида, для которого

- две полуоси эллипсоида-поверхности равны
- два главных центральных момента инерции равны, главные центральные оси инерции сонаправлены с главными осями эллипсоида-поверхности
- центр масс лежит в экваториальной плоскости

Берется частное решение, соответствующее вращению тела вокруг вертикали. С помощью замены переменных уравнения движения нормализуются в окрестности этого частного решения. Доказательство неинтегрируемости проводится методом, разработанным в работах В.В. Козлова, А.Д. Брюно: за счет выбора постоянной интеграла площадей достигается условие резонанса 1:3. В итоге условие резонанса и условие равенства нулю резонансного члена дают два соотношения на пять параметров задачи. К сожалению, в отличие от задачи движения тяжелого тела с неподвижной точкой, данный метод не позволяет сделать в общем случае окончательный вывод о существовании интегралов уравнений движения. Однако, с его помощью показано, что дополнительного интеграла нет для аналога случая Ковалевской.

В пятой главе рассматривается задача о качении шара. Для этой задачи число параметров равно числу параметров в задаче о движении тяжелого тела с неподвижной точкой. Указываются частные решения уравнений движения, для каждого частного решения находятся необходимые условия существования дополнительных интегралов. Основной результат сформулирован в двух теоремах.

Теорема 1 *Если главные центральные моменты инерции различны, то система уравнений движения не является алгебраически полной интегрируемой системой, за исключением случая Эйлера, когда центр масс совпадает с геометрическим.*

Теорема 2 *Если хотя бы два главных центральных момента инерции совпадают, то система уравнений движения не является алгебраически полной интегрируемой системой, за исключением аналога случая Лагранжа, когда центр масс расположен на оси динамической симметрии.*

Заключение:

- Дан топологический анализ динамики тяжелого динамически симметричного эллипсоида вращения на гладкой горизонтальной плоскости (аналог случая Лагранжа): построены бифуркационные диаграммы Смейла, описаны перестройки торов Лиувилля, построены топологические инварианты теории Фоменко.

- Получено необходимое условие существования дополнительного мероморфного интеграла уравнений движения тяжелого трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости для случая эллипсоида с мало различающимися полуосями, центр масс которого совпадает с геометрическим центром.

- Получены необходимые условия существования аналитического интеграла уравнений движения тяжелого динамически и геометрически симметричного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости для случая, когда центр масс эллипсоида лежит в экваториальной плоскости.

- Получены необходимые и достаточные условия того, что система уравнений движения тяжелого неоднородного шара на гладкой горизонтальной плоскости является алгебраически полной интегрируемой системой.

Список публикаций

- 1. Ивочкин М.Ю. Топологический анализ движения эллипсоида по гладкой плоскости, Матем. сб., 2008, 199:6, 85-104
- 2. Ивочкин М.Ю. Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости, ПММ том 75, вып. 5, 858-863, 2009
- Ивочкин М.Ю. "Топологический анализ движения эллипсоида по гладкой горизонтальной плоскости", VI Международный симпозиум по классической и небесной механике, Великие Луки, 1-6.08.2007, (тезисы докладов)
- Ивочкин М.Ю. "Необходимые условия существования дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого трехосного эллипсоида на гладкой горизонтальной плоскости", X Международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления", Москва, 1-5.06.2008, (тезисы докладов)
- Ивочкин М.Ю. "Применение методов дифференциальной теории Галуа в задаче о движении тяжелого шара на гладкой горизонтальной плоскости", тезисы V Международная конференция "Поляховские чтения", Санкт-Петербург, 3-6.02.2009, (тезисы докладов)