МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи

Романов Максим Сергеевич

УДК 517.956.4

ОБ АСИМПТОТИКЕ И ОЦЕНКАХ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПРАНДТЛЯ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ НЬЮТОНОВСКИХ И НЕНЬЮТОНОВСКИХ ЖИДКОСТЕЙ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2009

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Чечкин Григорий Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Гадыльшин Рустем Рашитович
	кандидат физико-математических наук Беляев Алексей Юрьевич
Ведущая организация:	Институт проблем механики им. А.Ю.Ишлинского РАН

Защита состоится 11 декабря 2009 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу 119991, РФ, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, МГУ имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 10 ноября 2009 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор И.Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Задачи усреднения в гидромеханике вообще и в теории пограничного слоя в частности привлекали внимание исследователей в течении долгого времени. Интерес к этим задачам обусловлен их практической значимостью: в любой реальной системе неизбежно присутствуют возмущения, обусловленные влиянием неких малых параметров (как то: мелкодисперсные примеси, быстро осциллирующие внешние силы, микронеоднородные поверхности), причем влияние данных возмущений может быть значительным. Эффективным инструментом исследований в данной области является теория усреднения. Отметим в данной области работы таких авторов, как А.Ю.Беляев, C.Conca, А.Б.Васильева, В.В.Жиков, А.М.Ильин, Г.А.Иосифьян, W.Jäger, С.М.Козлов, О.А.Ладыженская, В.Б.Левенштам, D.McLaughlin, A.Mikelić, F.Murat, С.А.Назаров, О.А.Олейник, G.C.Papanicolaou, O.Pironneau, D.Poliševski, А.Л.Пятницкий, В.Н.Самохин, Г.В.Сандраков, E.Sánchez-Palencia, G.I.Font, Г.А.Чечкин, D.Cioranescu, А.С.Шамаев.

В диссертационной работе рассматриваются задачи о пограничном слое линейно вязкой либо псевдопластической жидкости в присутствии быстро меняющегося магнитного поля и при условии интенсивного вдува-отсоса на границе. Предполагается, что амплитуда изменения магнитного поля (равно как и функции вдува-отсоса) ограничена, частота же является большим параметром. Строится усредненная задача, доказывается сильная сходимость решений в специальных нормах и оценивается скорость сходимости. Для оценки скорости сходимости строится вспомогательная линейная задача параболического типа, вырождающаяся на границе. Доказывается ее разрешимость и ограниченность решения в некотором анизотропном весовом классе.

Теория пограничного слоя впервые была предложена Людвигом Прандтлем[1] в 1904 году как модель, описывающая движение вязкой жидкости вблизи твердого тела. Прандтлем были выведены уравнения, определяющие движение несжимаемой ньютоновской жидкости жидкости в пограничном слое - так называемая система уравнений Прандтля. В дальнейшем теория пограничного слоя развивалась такими учеными, как, например, Л.Мизес, Г.Шлихтинг, Л.Г. Лойцянский; математическим аспектам теории пограничного слоя посвящена классическая книга О.А.Олейник и В.Н.Самохина[2]. Широко развита теория пограничного слоя неньютоновских жидкостей, или жидкостей с нелинейной вязкостью, (см., например, работы В.Г.Литвинова, З.П.Шульмана, О.А.Ладыженской) и пограничного слоя в магнитной гидродинамике (см., например, работы Г.Г.Брановера, А.Б.Цинобера, В.Н.Самохина).

Важное место в теории пограничного слоя занимают различные задачи усреднения. Отметим некоторые из них.

Задача о пограничном слое в случае быстро осциллирующего внешнего потока впервые была рассмотрена Линем [3], однако без удовлетворительного математического обоснования.

Г.А. Кулонен и Л.А. Кулонен[4] искали приближенное решение задачи о пограничном слое с отводом движущейся среды через дискретную систему отверстий, заменяя ступенчатую функцию отвода жидкости частичной суммой ее ряда Фурье. В работе В.В. Горского и С.Т. Суржикова[5] рассматривалась задача о пограничном слое с интенсивным вдувом.

Отметим работу В.Н.Самохина[6], в которой была рассмот-

[1] *Prandtl L.* Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. Verhandl. d. III. Intern. Math.-Kongr. Heidelberg, 1904

[2] *Олейник О.А., Самохин В.Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997

[3] *Lin C.C.* Motion in the boundary layer with a rapidly oscillating external flow// Proc. 9-th Intern. Congr. Appl. Mech. Brussels. V.4 - Brussels, 1957, pp. 155—167

[4] *Кулонен Г.А., Кулонен Л.А.* Отсос ламинарного пограничного слоя через систему щелей конечной ширины// Прикладная механика, 1978, т.14, №9, с. 83—88.

[5] *Горский В.В., Суржиков С.Т.* Применение метода квазилинеаризации к решению уравнений пограничного слоя с интенсивным вдувом// Изв. вузов. Машиностроение, 1978, № 11, с.179—181.

[6] *Самохин В.Н.* Усреднение системы уравнений Прандтля // Дифференц. уравне-

рена задача о продолжении пограничного слоя ньютоновской жидкости в условиях интенсивного вдува-отсоса на обтекаемой поверхности, предполагается, что соответствующая функция имеет вид $v(\frac{x}{\varepsilon})$, где v — некоторая периодическая функция.

В труде О.А. Олейник, В.Н. Самохина[7] рассмотрена также задача магнитной гидродинамики для пограничного слоя в предположении, что внешнее магнитное поле задается функцией $s(x, \frac{x}{\varepsilon})$. Построена предельная задача, доказана сильная сходимость решений при $\varepsilon \to 0$ в непрерывной норме и слабая сходимость в пространстве Соболева W_2^1, однако оценки скорости сходимости получены не были.

Результаты настоящей диссертации являются продолжением и обобщением исследования задач усреднения в теории пограничного слоя. Разобраны новые случаи, для которых применена как стандартная, так и новая техника исследования.

Цель работы. Целью работы является исследование задач о продолжении пограничного слоя ньютоновских и неньютоновских жидкостей в предположении, что коэффициенты соответствующих уравнений зависят от малого параметра.

Целью работы является также доказательство теоремы усреднения и получение оценок скорости сходимости как для ньютоновских, так и для псевдопластических сред.

Методика исследования. В работе используются методы интегральных оценок, методы теории усреднения и качественной теории дифференциальных операторов в частных производных, предложена новая техника оценки решений.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные из них следующие:

- Получены оценки для скорости сходимости решений уравнений Прандтля в присутствии быстро осциллирующего

ния, 1990, том 26, №3, с. 495—501.

[7] *Олейник О.А., Самохин В.Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М.: Наука. Физматлит, 1997; глава 10, §10.2

магнитного поля и быстро-осциллирующего вдува-отсоса.

- Впервые исследована задача усреднения для пограничного слоя псевдопластической среды. Построена предельная задача, получены оценки скорости сходимости.

- Показано, что для переменных Мизеса скорость сходимости решений в непрерывной норме и скорость сходимости в анизотропной весовой Соболевской норме суть величины разного порядка.

Теоретическая и практическая значимость. Предлагаемая работа носит теоретический характер. Развитые в работе подходы могут быть применены к более общим нелинейным параболическим задачам. Результаты работы могут быть полезны специалистам, работающим в области дифференциальных уравнений с частными производными и гидромеханики.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на заседаниях следующих научных семинаров: МГУ имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет: семинар под руководством д.ф.-м.н. Г.А.Чечкина (неоднократно, 2006-2008 гг.); семинар под руководством проф. В.В.Жикова, проф. А.С.Шамаева, проф. Т.А.Шапошниковой (2009); МИРАН им. В.А.Стеклова, семинар под руководством член-корр. РАН С.И.Похожаева (2009).

Результаты диссертации докладывались также на следующих научных конференциях: Международная конференция "Тихонов и современная математика", Москва, МГУ, 2006; Международная конференция, "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная памяти И.Г. Петровского, Москва, МГУ, 2007; Международная конференция "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященная 70-летию академика В.А.Садовничего, Москва, МГУ, 2009.

Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00353-а (руководитель Г.А.Чечкин), и грантами Президента РФ для под-

держки ведущих научных школ НШ-2538.2006.1, НШ-1698.2008.1.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приводится в конце автореферата [1—5].

Структура и объем работы. Диссертация занимает 90 страниц текста и состоит из введения, трёх глав, разбитых на десять параграфов и списка литературы, включающего 63 наименования. Нумерация формул, теорем и лемм тройная — номер главы, номер параграфа и собственный номер, например, лемма 3.2.1 — лемма 1 второго параграфа третьей главы.

Основное содержание работы.

Первая глава. В первой главе, вводной, излагаются основные понятия и приводятся некоторые известные результаты о разрешимости различных задач теории пограничного слоя.

В **первом параграфе** ставятся задачи о продолжении пограничного слоя для ньютоновской и для псевдопластической жидкостей в декартовых координатах. А именно, рассматривается в области $D = (0, X) \times (0, \infty)$ система уравнений относительно неизвестных функций u, v

$$\begin{cases} uu_x + vu_y = \nu \frac{\partial}{\partial y}(|u_y|^{n-1}u_y) + UU' + (U-u)s(x) \\ u_x + v_y = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $n = 1$ в случае ньютоновской жидкости и $0 < n < 1$ в случае псевдопластической. На u и v накладываются начальные и граничные условия

$$u(0, y) = u_1(y) > 0, \quad u(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = v_0(x),$$

$$u(x, y) \to U(x) \text{ при } y \to \infty, \tag{2}$$

Здесь функции u и v суть продольная и поперечная компоненты вектора скорости течения; $U(x)$ задает скорость внешнего потока; $s(x) = \sigma B^2(x)/\rho$, где $B(x)$ — ортогональная к обтекаемой поверхности компонента вектора магнитной индукции, константы $\rho > 0$, $\sigma > 0$ — плотность и проводимость среды соответственно, $\nu > 0$ — коэффициент вязкости, v_0 — ортогональная составляющая скорости на поверхности (например, в случае вдува-отсоса через систему пор).

Данную систему специальной заменой (так называемой заменой Мизеса) можно свести к одному уравнению от неизвестной $w = u^2$:

$$w_x + v_0 w_\psi = \nu 2^{1-n} \sqrt{w} \frac{\partial}{\partial \psi} \left(|w_\psi|^{n-1} w_\psi \right) + 2UU' - (U - \sqrt{w}) s(x) \tag{3}$$

с условиями

$$w(0, \psi) = w_1(\psi), \ w(x, 0) = 0, \ w(x, \psi) \to U^2(x) \text{ при } \psi \to \infty, \tag{4}$$

уравнение рассматривается в области

$$\Omega = \{0 < x < X; \ 0 < \psi < \infty\}.$$

Во **втором параграфе** излагаются известные результаты о существовании решений задач (1), (2) и (3), (4).

Вторая глава. Во второй главе рассматривается задача об усреднении пограничного слоя ньютоновской жидкости в случае быстро осциллирующего магнитного поля и осциллирующего вдува-отсоса. Формулируется вспомогательная линейная задача, доказывается ее разрешимость. Получены оценки скорости сходимости для решения уравнений Прандтля в переменных Мизеса и в декартовых переменных.

В **первом параграфе второй главы** ставится возмущенная задача для пограничного слоя магнитной ньютоновской жидкости. В предположении, что функции $v_0(x)$ и $s(x)$ зависят от малого параметра ε, следующим образом:

$$s_\varepsilon = s(x, \frac{x}{\varepsilon}), \quad v_\varepsilon = v(x, \frac{x}{\varepsilon}),$$

где $s(x, \xi)$ и $v(x, \xi)$ — гладкие 1-периодические по переменной ξ функции.

В области $\Omega = \{0 < x < X,\ 0 < \psi < \infty\}$ рассматривается уравнение

$$A_\varepsilon(w^\varepsilon) := -2(\sqrt{w^\varepsilon})_x + \nu w^\varepsilon_{\psi\psi} - 2v_\varepsilon(\sqrt{w^\varepsilon})_\psi - 2s_\varepsilon + \frac{2U}{\sqrt{w^\varepsilon}}\big(U' + s_\varepsilon\big) = 0 \tag{5}$$

с граничными условиями

$$w^\varepsilon(0,\psi) = w_1(\psi),\ w^\varepsilon(x,0) = 0,\ w^\varepsilon(x,\psi) \to U^2(x) \text{ при } \psi \to \infty. \tag{6}$$

Одновременно вводятся функции $\widehat{s}$, $\widehat{v}_0(x)$:

$$\widehat{s} = \int\limits_0^1 s(x,\xi)d\xi, \quad \widehat{v}_0 = \int\limits_0^1 v(x,\xi)d\xi \tag{7}$$

и для них рассматривается задача

$$A_0(w^0) := -2(\sqrt{w^0})_x + \nu w^0_{\psi\psi} - 2\widehat{v}_0(\sqrt{w^0})_\psi - 2\widehat{s} + \frac{2U}{\sqrt{w^0}}\big(U' + \widehat{s}\big) = 0, \tag{8}$$

$$w^0(0,\psi) = w_1(\psi),\ w^0(x,0) = 0,\ w^0(x,\psi) \to U^2(x) \text{ при } \psi \to \infty. \tag{9}$$

Утверждается, что задача (8), (9) является усредненной для задачи (5), (6), а именно, формулируется следующая теорема:

Теорема 2.1.1

Пусть v_ε, s_ε ограничены равномерно по ε. Пусть кроме того функции U, v_ε, s_ε, v_0, s_0, w_1 таковы, что выполнены условия существования обобщенного решения задач (5), (6) *и* (8), (9). *Пусть также w^ε и w^0 суть непрерывные функции.*

Тогда w^ε сходится к w^0 в следующем смысле: существует такая константа C, что

$$\max|\sqrt{w^\varepsilon} - \sqrt{w^0}| \le C\varepsilon^{\frac{2}{3}} \tag{10}$$

$$||\sqrt{w^\varepsilon} - \sqrt{w^0}||_{L_2(0,X;\mathcal{V})} \le C\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \tag{11}$$

Пространство $\mathcal{V}$ определено в параграфе 2.

Доказательству этой теоремы посвящен третий параграф второй главы.

Во **втором параграфе второй главы** изучается вспомогательная задача. Рассматривается область

$$Q = \{0 < x < N, 0 < t < T\}$$

и вырождающийся линейный параболический оператор вида

$$Lu = u_t - a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u,$$

коэффициенты которого обладают следующими свойствами

- функции $a(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ непрерывны в области Q вплоть до $\Gamma = \{x > 0\} \cap \partial Q$;
- частная производная $a_x(x,t)$ существует и также непрерывна в Q вплоть до Γ;
- существуют константы $K > k > 0$ такие, что

$$a(x,t) < K, \quad |b(x,t)| < K, \quad k < c(x,t) \quad \text{в области } Q, \tag{12}$$

$$k < a(x,t), \quad |a_x(x,t)| < K,$$
$$c(x,t) < K \quad \text{в области } Q \cap \{x > 1\}, \tag{13}$$

$$kx^{\frac{1}{2}} < a(x,t) < Kx^{\frac{1}{2}},$$
$$kx^{-\frac{1}{2}} < a_x(x,t) < Kx^{-\frac{1}{2}},$$
$$kx^{-1} < c(x,t) < Kx^{-1} \quad \text{в области } Q \cap \{x < 1\}; \tag{14}$$

- частная производная $a_t(x,t)$ существует, непрерывна в Q вплоть до границы, ограничена по модулю константой K_1 и ведет себя в $Q \cap \{x < 1\}$ следующим образом:

$$|a_t(x,t)| < K_1 x^{1/2-\beta} \quad \text{где } 0 < \beta < 1. \tag{15}$$

Вводятся гильбертовы функциональные пространства $V(0,N)$, $\mathcal{V}(0,N)$, являющиеся замыканием $C_0^\infty(0,N)$ по норме, порождаемой скалярными произведениями

$$(u,v)_V = \int\limits_0^1 (x^{\frac{1}{2}} u_x v_x + \frac{1}{x} uv)\ dx + \int\limits_1^N (u_x v_x + uv)\ dx$$

и

$$(u,v)_{\mathcal{V}} = \int\limits_0^1 (x^{\frac{1}{2}} u_x v_x + x^{-\frac{3}{2}} uv)\ dx + \int\limits_1^N (u_x v_x + uv)\ dx.$$

соответственно.

На базе V определяется пространство B, представляющее из себя множество функций $u(t,x)$, где $(t,x) \in Q$, таких, что $u(t,.) \in V(0,N)$ для почти всех t и существует конечная норма

$$||u||_B = \operatorname*{ess\ sup}_{t \in (0,T)} ||u(t)||_2 + ||u||_{L_2(0,T;V)},$$

где $||u||^2_{L_2(0,T;V)} = \int\limits_0^T ||u||^2_V\ dt$.

Для $\mathcal{V}$ аналогичным образом вводится пространство $\mathcal{B}$.

Для оператора L рассматривается следующая задача:

$$Lu = F, \quad u(x,0) = u(0,t) = u(N,t) = 0, \tag{16}$$

где F является функционалом над пространством $L_2(0,T;V)$, $L_2(0,T;\mathcal{V})$ или $L_p(Q)$. Решение данной задачи понимается в обобщенном смысле.

Доказываются следующие теоремы о существовании и оценке решений:

Теорема 2.2.1

Пусть F — непрерывный линейный функционал на множестве $L_2(0,T;V)$ с носителем, лежащим выше прямой $x = x_1$ и ниже $x = N - x_1$, где x_1 - некоторое положительное число.

Тогда задача (16) имеет решение из класса B, для которого выполнена оценка

$$||u||_B < C||F||_{L_2(0,T;V)^*}, \qquad (17)$$

где константа C зависит от k, K, T, x_1 и не зависит от N.

Теорема 2.2.2

Пусть F является функцией из класса $L_p(Q)$, где $p \geq 2$. Тогда решение $u(x,t)$ принадлежит $W_2^{1,0}(Q)$ и для него выполнена оценка

$$\operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} ||u(t)||_2 + ||u||_{W_2^{1,0}(Q)} \leq C||F||_{L_p(Q)}, \qquad (18)$$

причем константа C зависит только от k, K и T.

Теорема 2.2.3

Пусть F — произвольный непрерывный линейный функционал на множестве $L_2(0,T;\mathcal{V})$.

Тогда задача (16) имеет решение из класса $\mathcal{B}$, причем для решения выполнена оценка

$$||u||_{\mathcal{B}} < C||F||_{L_2(0,T;\mathcal{V})^*}, \qquad (19)$$

где константа C зависит от k, K, T и не зависит от N.

При доказательстве данных теорем использовались методы, аналогичные изложенным в книге О.А.Ладыженской, В.А.Солонникова, Н.Н.Уральцевой[8].

В **третьем параграфе второй главы** доказывается следующая теорема:

Теорема 2.3.1

Пусть $\psi_1 > 0$. Существует такая константа $C > 0$, что для любого функционала $g \in L_2(0,X;V)^*$ с компактным носителем, лежащим выше прямой $\psi = \psi_1$, выполнена оценка

$$(g, \sqrt{w^\varepsilon} - \sqrt{w^0}) \leq \varepsilon^{\frac{1}{2}} C||g||_{L_2(0,X;V)^*}. \qquad (20)$$

[8] *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, Глав. ред. физ.-мат. лит., 1967.

Аналогичный результат верен также для более широкого класса g, а именно, для функционалов из класса $L_2(0, X; \mathcal{V})^*$, имеющих компактный носитель (см. Замечание 2.3.5)

Для функционалов, заданных формулой

$$(g, \varphi) = \int\limits_{\Omega} f \varphi dx d\psi,$$

оценку можно улучшить:

$$(g, \sqrt{w^\varepsilon} - \sqrt{w^0}) \leq \varepsilon^{\frac{2}{3}} ||f||_{L_p},$$

где $p \geq 2$. (См. Замечания 2.3.4, 2.3.6)

Из теоремы 2.3.1 и замечаний 2.3.4-2.3.6 следуют оценки на нормы, указанные в теореме 2.1.1.

Четвертый параграф второй главы посвящен оценкам в декартовых координатах. Доказывается, что решения u^ε и u^0, соответствующие w^ε и w^0 также близки, а именно, выполнена теорема:

Теорема 2.4.1

Для всякого $N > 0$ существует такая константа $C > 0$, что

$$\max_{D_N} |u^\varepsilon - u^0| < C\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \tag{21}$$

$$||u^\varepsilon_y - u^0_y||_{W_2^{0,1}(D_N)} < C\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{22}$$

Здесь $D_N = (0, X) \times (0, N)$

Третья глава. В третьей главе изучается уравнение пограничного слоя псевдопластической жидкости, зависящее от малого параметра. Доказана теорема усреднения, получены оценки скорости сходимости решений в мизесовых и декартовых переменных.

Структура главы 3 сходна со структурой главы 2. В **первом параграфе третьей главы** ставится задача усреднения для пограничного слоя псевдопластической жидкости.

Через w^ε обозначается решение задачи

$$w_x^\varepsilon + v_\varepsilon w_\psi^\varepsilon = \mu 2^{1-n}\sqrt{w^\varepsilon}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(|w_\psi^\varepsilon|^{n-1}w_\psi^\varepsilon\right) + 2UU' - (U - \sqrt{w^\varepsilon})s_\varepsilon \tag{23}$$

с условиями

$$w^\varepsilon(0,\psi) = w_1(\psi),\ w^\varepsilon(x,0) = 0,\ w^\varepsilon(x,\psi) \to U^2(x) \text{ при } \psi \to \infty, \tag{24}$$

а через w^0 — решение задачи

$$w_x^0 + \widehat{v}_0 w_\psi^0 = \mu 2^{1-n}\sqrt{w^0}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(|w_\psi^0|^{n-1}w_\psi^0\right) + 2UU' - (U - \sqrt{w^0})s_0 \tag{25}$$

с условиями

$$w^0(0,\psi) = w_1(\psi),\ w^0(x,0) = 0,\ w^0(x,\psi) \to U^2(x) \text{ при } \psi \to \infty. \tag{26}$$

При некоторых условиях на s_ε, v_ε и s_0, $\widehat{v}_0$ задача (25), (26) является усредненной для (23), (24), а именно, выполнена теорема:

Теорема 3.1.1

Пусть v_ε, s_ε ограничены равномерно по ε и существует такая константа C, что

$$\max_x \left|\int_0^x (v_\varepsilon - \widehat{v}_0)dx\right| < C\varepsilon$$

$$\max_x \left|\int_0^x (s_\varepsilon - s_0)dx\right| < C\varepsilon.$$

Пусть кроме того U, v_ε, s_ε, v_0, s_0, w_1 таковы, что выполняются условия существования обобщенного решения задач (23), (24) *и* (25), (26). *Пусть также w^ε и w^0 суть непрерывные функции.*

Тогда w^ε сходится к w^0 в следующем смысле: существует такая константа C, что

$$\max|\sqrt{w}^\varepsilon - \sqrt{w}^0| \le C\varepsilon^{\frac{2}{3}}, \tag{27}$$

$$||\sqrt{w}^{\varepsilon} - \sqrt{w}^{0}||_{L_2(0,X;\mathcal{G})} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{28}$$

и кроме того

$$w^{\varepsilon} \rightharpoonup w^{0} \quad \textit{слабо в } W_2^1(\Omega_N) \tag{29}$$

$$w^{\varepsilon}_{\psi\psi} \to w^{0}_{\psi\psi} \quad \textit{слабо в пространстве функций}$$
$$\textit{с нормой } ||u||^2 = \int_0^X \left(\int_0^1 \psi^{\frac{1}{2}} u^2 d\psi + \int_1^{\infty} \psi^{\frac{2n-4}{n-1}} u^2 d\psi \right) dx \tag{30}$$

Пространство $\mathcal{G}$ определено в параграфе 2 главы 3.

Доказательство теоремы приведено в параграфе 3.

Во **втором параграфе третьей главе** изучается вспомогательная линейная задача для вырождающегося на границе параболического оператора. Lu имеет вид

$$Lu = u_t - a(x,t)\frac{\partial}{\partial x}(H(x,t)u_x) + b(x,t)u_x + c(x,t)u,$$

причем коэффициенты обладают свойствами (12)—(15), кроме того

$$H(x,\psi) > k > 0 \quad \text{при любом } x > 0;$$
$$kx^2 < H(x,\psi) < Kx^2 \quad \text{при } x > 1. \tag{31}$$

Вводятся гильбертовы пространства $\mathcal{G}(0,N)$ и $\mathcal{W}(0,N)$, являющиеся замыканием $C_0^{\infty}(0,N)$ по норме, порождаемой скалярным произведением

$$(u,v)_{\mathcal{G}} = \int\limits_0^1 (x^{\frac{1}{2}} u_x v_x + x^{-\frac{3}{2}} uv)\, dx + \int\limits_1^N (x^2 u_x v_x + uv)\, dx$$

и

$$(u,v)_{\mathcal{W}} = \int\limits_0^1 (u_x v_x + uv)\, dx + \int\limits_1^N (x^2 u_x v_x + uv)\, dx.$$

соответственно.

Доказывано существование обобщенного решения задачи

$$Lu = g,$$

$$u(x,0)=0, \quad u(0,t)=0, \quad u(N,t)=0, \tag{32}$$

при некоторых F, получены оценки на норму, о чем говорит

Теорема 3.2.1

Для всякого $g \in L_2(0,X;\mathcal{G}(0,N))^*$ задача (32) имеет обобщенное решение из класса $L_2(0,X;\mathcal{G}(0,N))$. Для решения выполнена оценка

$$||u||_{L_2(0,X;\mathcal{G}(0,N))} < C||g||_{L_2(0,X;\mathcal{G}(0,N))^*}. \tag{33}$$

В случае, если g имеет носитель, лежащий выше x_1, то $\phi \in L_2(0,X;\mathcal{W}(0,N))$ и

$$||u||_{L_2(0,X;\mathcal{W}(0,N))} \leq C||g||_{L_2(0,X;\mathcal{G}(0,N))^*}. \tag{34}$$

Если g задается регулярной функцией $F \in L_p$, $p \geq 2$, то $\phi \in L_2(0,X;\mathcal{W}(0,N))$ и

$$||u||_{L_2(0,X;\mathcal{W}(0,N))} \leq C||F||_{L_p}. \tag{35}$$

Константы в (33), (35) зависят только от k, K, T; в (34) зависит также от x_1.

Третий параграф третьей главы посвящен доказательству теоремы 3.1.1.

Прежде всего доказывается следующая теорема

Теорема 3.3.1

Существует такая константа $C > 0$, что для любого функционала $g \in L_2(0,X;\mathcal{G})^*$ с ограниченным носителем выполнена оценка

$$(g, \sqrt{w^\varepsilon} - \sqrt{w^0}) < \varepsilon^{\frac{1}{2}} C||g||_{L_2(0,X;\mathcal{G})^*}. \tag{36}$$

В случае $\operatorname{supp} g \subset [0,X] \times (\psi_1, N_0)$ неравенство (36) можно улучшить:

$$(g, \sqrt{w^\varepsilon} - \sqrt{w^0}) < \varepsilon^{\frac{2}{3}} C||g||_{L_2(0,X;\mathcal{G})^*}, \tag{37}$$

где C зависит от ψ_1. Аналогичный результат верен также для функционалов, задаваемых формулой

$$(g, \varphi) = \int\limits_{\Omega} f \varphi dx d\psi,$$

где $f \in L_p(\Omega)$, p>2, и равна нулю при $\psi > N_0$. В этом случае

$$(g, \sqrt{w^\varepsilon} - \sqrt{w^0}) < \varepsilon^{\frac{2}{3}} C ||f||_{L_p)}. \tag{38}$$

(См. Замечания 3.3.1 и 3.3.2)

Следствием этой теоремы являются пункты (27), (28) теоремы 3.1.1. Слабая сходимость функций в теореме 3.1.1 доказывается методами, описанными в работе О.А.Олейник и В.Н.Самохина.

В **четвертом параграфе** третьей главы доказывается теорема усреднения для уравнений пограничного слоя в декартовых координатах. Получен следующий результат:

Теорема 3.4.1

Пусть v_ε, s_ε ограничены равномерно по ε и существует такая константа C, что

$$\max_x |\int\limits_0^x (v_\varepsilon - \widehat{v}_0) dx| < C\varepsilon, \ \max_x |\int\limits_0^x (s_\varepsilon - s_0) dx| < C\varepsilon.$$

Пусть кроме того U, v_ε, s_ε, v_0, s_0, w_1 таковы, что выполняются условия существования классического решения соответствующих задач.

Тогда u^ε, v^ε сходятся к u^0, v^0 в следующем смысле: для всякого $N > 0$ существует такая константа C, что

$$\max_{D_N} |u^\varepsilon - u^0| \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}, \tag{39}$$

$$||\sqrt{u^\varepsilon} - \sqrt{u^0}||_{L_2(0,X;W_2^1(0,N))} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \tag{40}$$

Кроме того для всякого y_0

$$v^\varepsilon \rightharpoonup v^0 \quad \text{слабо в } L_2(D_{N,y_0}), \tag{41}$$

$$u^\varepsilon \rightharpoonup u^0 \quad \textit{слабо в } W_2^1(D_{N,y_0}) \ , \tag{42}$$

$$u_{yy}^\varepsilon \rightharpoonup u_{yy}^0 \quad \textit{слабо в } L_2(D_{N,y_0}), \tag{43}$$

где $D_{N,y_0} = \{0 < x < X,\ y_0 < y < \infty\}$.

Благодарность.

Автор выражает искреннюю благодарность и признательность своему научному руководителю доктору физико-математических наук Григорию Александровичу Чечкину.

Основные публикации автора по теме диссертации.

(из официального Перечня ВАК)

[1] *Романов М.С.* Усреднение задач со многими масштабами в магнитной гидродинамике. // Проблемы мат. анализа, №.35, 2007, с. 133–138

[2] *Романов М.С., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* О скорости сходимости решений уравнений Прандтля в быстро осциллирующем магнитном поле. // Доклады РАН, 2009, том 426, №4, с. 450-456.

В работе [2] Романову М.С. принадлежат доказательства лемм 2 и 4, теоремы 3 и следствий 1 и 2.

(прочие)

[3] *Романов М.С., Чечкин Г.А.* О системе уравнений Прандтля в областях с осциллирующей границей // Материалы международной конференции “Тихонов и современная математика”, Москва, 2006, с 219-220

В работе [3] Романову М.С. принадлежат теорема о существовании решения и теорема о сходимости решений.

[4] *Романов М.С.* Пограничный слой гофрированной пластины // Материалы международной конференции, “Дифференциальные уравнения и смежные вопросы”, посвящен-

ной памяти И.Г. Петровского - М.: Изд-во МГУ, 2007, с. 257-258

[5] *Романов М.С., Самохин В.Н., Чечкин Г.А.* О скорости сходимости решений системы уравнений Прандтля, зависящих от малого параметра // Материалы конференции "Современные проблемы математики, механики их приложений", с. 196, Москва, 2009.

В работе [5] Романову М.С. принадлежит теорема о скорости равномерной сходимости решений.