МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.5

Лифанцева Ольга Валерьевна

СТРУКТУРНЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОЖЕСТВ СХОДИМОСТИ И РАСХОДИМОСТИ КРАТНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ФУРЬЕ

01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико–математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена на кафедре математического анализа физико-математического факультета Московского государственного областного университета.

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор Блошанский Игорь Леонидович
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук, профессор Дьяченко Михаил Иванович
	доктор физико–математических наук, профессор Холщевникова Наталья Николаевна
Ведущая организация:	Национальный исследовательский ядерный университет "МИФИ"

Защита диссертации состоится 11 декабря 2009 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 10 ноября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико – математических
наук, профессор Сергеев И.Н.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Работа относится к важной и активно развивающейся области гармонического анализа – к теории кратных разложений Фурье. Бурное развитие теории кратных разложений Фурье, имеющей широкое применение в различных отраслях современной науки и техники, началось с середины 60-х годов прошлого столетия. Если до этого (20-е годы XX века) был обнаружен ряд закономерностей, резко отличающих однократные разложения Фурье от кратных ($N \geq 2$), и исследования были в основном направлены на получение ответа на вопрос: переносятся или нет "одномерные результаты" на кратный случай, – то во второй половине XX века появились результаты, показывающие некоторую особенность двумерного случая, и принципиально новые результаты, показывающие "специфику кратного случая" при $N > 2$ (т.е. результаты, практически "не проявляющиеся" в одномерном и достаточно тривиальные в двумерном случае).

Так, несправедливость даже в классе H^ω (где $\omega(\delta)$ — некоторый модуль непрерывности) принципа локализации в его классическом понимании для прямоугольных частичных сумм кратных рядов Фурье (Л. В. Жижиашвили) заставила ввести другое понятие локализации — понятие "обобщенной локализации почти всюду" для кратных рядов Фурье, т.е. фактически перейти от понятия "локализация в точке" к понятию "локализация на множестве". Обобщенная локализация почти всюду в классах L_p, $p > 1$, оказалась справедлива только на произвольных открытых (с точностью до множества меры нуль) множествах и только для двойных тригонометрических рядов Фурье (рядов Фурье-Уолша), суммируемых по прямоугольникам, и не справедлива даже на столь простых множествах, как открытые кубы, в случае бо́льшей размерности пространства ($N > 2$) даже в классах H^ω (И. Л. Блошанский).

В таком случае, оставаясь в рамках классов L_p, $p \geq 1$, возникла необходимость перейти к более тонкому аппарату исследования ряда Фурье функции f на множествах, где f равна нулю, а именно к понятию "слабая обобщенная локализация почти всюду" (введенному в работах И. Л. Блошанского). Исследованию в этой области и посвящена настоящая диссертация.

1. Рассмотрим N-мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^N$, элементы которого будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_N)$, и положим $(nx) = n_1x_1 + \dots + n_Nx_N$, $|x| = (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}$.

Введем множество $\mathbb{Z}^N$, $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$, — множество всех векторов с целочисленными координатами, определим множество $\mathbb{Z}_1^N = \{(n_1, ..., n_N) \in \mathbb{Z}^N : n_j \geq 1,\ j = 1, \dots, N\}$.

Пусть 2π-периодическая (по каждому аргументу) функция $f \in L_1(\mathbb{T}^N)$, где $\mathbb{T}^N = \{x \in$

$\mathbb{R}^N : -\pi \le x_j \le \pi, j = 1, \ldots, N\}$, разложена в кратный тригонометрический ряд Фурье:

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} c_k e^{i(kx)}.$$

Рассмотрим прямоугольную частичную сумму этого ряда

$$S_n(x; f) = \sum_{|k_1| \le n_1} \cdots \sum_{|k_N| \le n_N} c_k e^{i(kx)}, \tag{1}$$

где $n = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $\mu\mathfrak{A} > 0$ ($\mu = \mu_N$ — N-мерная мера Лебега), и пусть $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$.

В диссертации изучается поведение на $\mathfrak{A}$ частичной суммы (1) при $n \to \infty$ (т.е. $\min\limits_{1 \le j \le N} n_j \to \infty$) в зависимости от гладкости функции $f(x)$, от структурных и геометрических характеристик множества $\mathfrak{A}$, а также от ограничений, накладываемых на компоненты $n_1, \ldots, n_N$ вектора n — "номера" частичной суммы $S_n(x; f)$. Точнее, нас будет интересовать поведение частичной суммы (1) в случае, когда некоторые из компонент вектора $n \in \mathbb{Z}_1^N$ являются элементами (однократных) лакунарных [1] последовательностей.

2. Как известно, в одномерном случае А. Н. Колмогоровым еще в 1922 г. в работе [1] было установлено: для любой функции $f \in L_2(\mathbb{T}^1)$ последовательность частичных сумм $S_{n^{(k)}}(x; f)$, где $\{n^{(k)}\}$, $n^{(k)} \in \mathbb{Z}_1^1$, $k = 1,\ 2, \ldots$, — лакунарная последовательность, сходится почти всюду (п.в.) на $\mathbb{T}^1$. Указанный результат А. Н. Колмогорова был распространен в 1931 г. Дж. Литтлвудом и Р. Пэли [2] на классы $L_p(\mathbb{T}^1), p > 1$. [2] Позже Р. Госселином [5] и В. Тотиком [6] было установлено, что в $L_1(\mathbb{T}^1)$ этот результат неверен.

В свою очередь, первый результат для кратных рядов (т.е. для $N \ge 2$), касающийся "лакунарных последовательностей частичных сумм" был получен П. Шёлиным в 1971 г. в работе [7], где было доказано, что если $f \in L_p(\mathbb{T}^2)$, $p > 1$, $\{n_1^{(\nu_1)}\}$, $n_1^{(\nu_1)} \in \mathbb{Z}_1^1, \nu_1 = 1, 2, \ldots$, — лакунарная последовательность, то

$$\lim_{\nu_1,\, n_2 \to \infty} S_{n_1^{(\nu_1)}, n_2}(x; f) = f(x) \ \text{ п.в. на } \ \mathbb{T}^2.$$

В 1977 г. М. Кожима в работе [8] обобщил результат П. Шёлина, доказав, что если функция $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \ge 2$, и $\{n_j^{(\nu_j)}\}$, $n_j^{(\nu_j)} \in \mathbb{Z}_1^1, \nu_j = 1, 2, \ldots, j = 1, \ldots, N-1$, — лакунарные последовательности, то

$$\lim_{\nu_1, \ldots, \nu_{N-1},\, n_N \to \infty} S_{n_1^{(\nu_1)}, \ldots, n_{N-1}^{(\nu_{N-1})}, n_N}(x; f) = f(x) \ \text{ п.в. на } \ \mathbb{T}^N.$$

[1] Последовательность $\{n^{(s)}\}, n^{(s)} \in \mathbb{Z}_1^1$, называется лакунарной, если $\frac{n^{(s+1)}}{n^{(s)}} \ge q > 1, s = 1, 2, \ldots$.

[2] Здесь, естественно, надо отметить результаты 1966 г. Л. Карлесона [3] и 1967 г. Р. Ханта [4] о том, что одномерный ряд Фурье любой функции из класса $L_p(\mathbb{T}^1), p > 1$, сходится п.в. на $\mathbb{T}^1$.

В той же работе М. Кожима доказал (используя результат Ч. Фефферманa [9]), что сформулированный выше результат не может быть усилен в следующем смысле: для любой последовательности $\widetilde{n} = (n_3,\, n_4, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^{N-2}$ [3] существует непрерывная функция, $f \in \mathbb{C}(\mathbb{T}^N)$, такая, что

$$\overline{\lim_{n_1,\, n_2,\, \widetilde{n} \to \infty}} |S_{n_1,\, n_2,\, \widetilde{n}}(x; f)| = +\infty \ \text{ п.в. на } \ \mathbb{T}^N.$$

3. Далее, перейдем к вопросам слабой обобщенной локализации п.в. для (суммируемых по прямоугольникам) рядов Фурье функций из L_p, $p \geq 1$. В работе [10] И. Л. Блошанским было дано следующее определение.

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, — произвольное множество положительной меры. Будем говорить, что для кратных рядов Фурье функций из класса $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geq 1$, справедлива на множестве $\mathfrak{A}$ слабая обобщенная локализация почти всюду* (СОЛ), *если для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, существует такое подмножество $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, $\mu\mathfrak{A}_1 > 0$, что*

$$\lim_{n \to \infty} S_n(x; f) = 0 \ \textit{ почти всюду на } \ \mathfrak{A}_1.$$

Для формулировки результатов по СОЛ (в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \geq 2$), а также для формулировки полученнных в настоящей работе результатов, введем следующие обозначения.

Пусть M — множество чисел $\{1, \ldots, N\}$ и $k \in M$. Обозначим: $J_k = \{j_1, ..., j_k\}$, $j_s < j_l$ при $s < l$, и (в случае $k < N$) $M \setminus J_k = \{m_1, \ldots, m_{N-k}\}$, $m_s < m_l$ при $s < l$, — непустые подмножества множества M. Будем считать также, что $J_0 = \emptyset$ и $M \setminus J_N = \emptyset$. Разложим пространство $\mathbb{R}^N$ на сумму двух подпространств $\mathbb{R}[J_k]$ и $\mathbb{R}[M \setminus J_k]$, где $\mathbb{R}[J_s] = \{x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_j = 0$ при $j \in M \setminus J_k\}$, а $\mathbb{R}[M \setminus J_k] = \{x \in \mathbb{R}^N : x_j = 0$ при $j \in J_k\}$. Обозначим также $\mathbb{T}[J_k] = \{x \in \mathbb{R}[J_k] : -\pi \leq x_j \leq \pi$ при $j \in J_k\}$ и $\mathbb{T}[M \setminus J_k] = \{x \in \mathbb{R}[M \setminus J_k] : -\pi \leq x_j \leq \pi$ при $j \in M \setminus J_k\}$. Очевидно, что $\mathbb{R}[J_N] = \mathbb{R}^N$, а $\mathbb{T}[M] = \mathbb{T}^N$.

Пусть Ω, $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 2$, — произвольное (непустое) открытое множество, и пусть $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$ — ортогональная проекция множества Ω на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$, $J_2 \subset M$.

Положим

$$W[J_2] = \Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2], \quad J_2 \subset M. \text{ [4]} \tag{2}$$

[3] В частности, каждая компонента n_j вектора $\widetilde{n}$ может быть элементом лакунарной последовательности.

[4] При этом любой вектор $z = (z_1, \ldots, z_{2N}) \in A \times B$, где $A \subset \mathbb{R}[J_k]$, а $B \subset \mathbb{R}[M \setminus J_k]$, мы отождествляем с вектором $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ по формуле: $x_s = z_s$ при $s \in J_k$, $x_s = z_{N+s}$ при $s \in M \setminus J_k$.

Множества $W[J_2]$ будем называть "N-мерными брусками". Далее для любого J_k, $0 \le k \le N-2$, рассмотрим следующие множества: множество

$$W = W(J_k) = W(\Omega, J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2] \tag{3}$$

(которое будем называть "полным N-мерным крестом", если $J_k = \emptyset$, и "неполным N-мерным крестом", если $J_k \neq \emptyset$) и множество

$$W^0 = W^0(J_k) = W^0(\Omega, J_k) = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} W[J_2] \tag{4}$$

(которое будем называть "центром" соответствующего "N-мерного креста"). [5]

В работе [10] (см. также [11,12]) И. Л. Блошанским была доказана следующая теорема.

Теорема А. *Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $N \ge 2$, $f(x) = 0$ на $W = W(J_0)$,*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x; f) = 0 \ \textit{ почти всюду на } \ W^0 = W^0(J_0).$$

Как следует из теоремы А, СОЛ для кратных рядов Фурье, суммируемых по прямоугольникам, в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, справедлива на "полном кресте" $W = W(J_0)$ вида (3) с числом брусков $W[J_2]$ (2), равным C_N^2. В той же работе была доказана неусиляемость этого результата в следующих смыслах: во-первых, были приведены примеры множества $W = W(J_0)$ вида (3) и функции $f \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$, равной нулю на W, таких, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(x; f)| = +\infty \ \text{ п.в. на } \ \mathbb{T}^N \setminus W^0;$$

во-вторых, было показано, что на кресте с меньшим, чем C_N^2, числом брусков или на кресте с другой геометрией брусков СОЛ, вообще говоря, не справедлива даже в классе непрерывных функций.

Таким образом, "полные N-мерные кресты" $W = W(J_0)$ представляют собой "самые простые" множества, на которых справедлива СОЛ для суммируемых по прямоугольникам кратных рядов Фурье функций из класса $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$.

Приведенные выше результаты поставили вопрос о поиске критерия справедливости СОЛ на произвольных измеримых подмножествах $\mathbb{T}^N$ положительной меры (для суммируемых по прямоугольникам кратных рядов Фурье функций из класса $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$). В [12] И. Л. Блошанским такой критерий был сформулирован и доказан для широкого класса измеримых множеств $\{\mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \ge 2$, $\mu\mathfrak{A} > 0$ (с некоторыми ограничениями на

[5] Очевидно, что для каждого k, $0 \le k \le N-2$, мы можем построить C_N^k различных "N-мерных крестов".

границу множества $\mathfrak{A}$), в терминах структурно-геометрических характеристик множества $\mathfrak{A}$, описываемых свойством $\mathbb{B}_2$. Чтобы сформулировать этот критерий, дадим следующие определения.

Определение 2. *Будем говорить, что множество $\mathcal{A}$ вписывается почти всюду (вписывается с точностью до множества меры нуль) в множество $\mathcal{B}$, если $\mu(\mathcal{A}\backslash\mathcal{B}) = 0$.*

Определение 3. 1. *Будем говорить, что множество $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 2$, обладает свойством $\mathbb{B}_2$, если существует множество $W = W(J_0)$ вида* (3), *которое вписывается п.в. в $\mathfrak{A}$, причем, свойство $\mathbb{B}_2$ есть свойство $\mathbb{B}_2(W^0)$, если $W = W(W^0)$.* [6]

2. *Свойство $\mathbb{B}_2(W^0)$ множества $\mathfrak{A}$ будем называть максимальным свойством $\mathbb{B}_2$ множества $\mathfrak{A}$, если для любого множества $\widetilde{W}^0 = \widetilde{W}^0(J_0)$ вида* (4) *такого, что $\mu(\widetilde{W}^0 \setminus W^0) > 0$, множество $\mathfrak{A}$ не обладает свойством $\mathbb{B}_2(\widetilde{W}^0)$.*

Обозначим через $intP$ множество внутренних точек P, через $\overline{P}$ — замыкание множества P и через FrP — границу множества P.

Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 2$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$. Рассмотрим следующие условия на границу множества $\mathfrak{A}$:

$$\mu(\mathfrak{B} \setminus \overline{int\mathfrak{B}}) = 0, \text{ [7]} \tag{5}$$

$$\mu_2 Fr\, pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\} = 0, \quad J_2 \subset M, \tag{6}$$

где μ_2 — мера на плоскости.

И. Л. Блошанский доказал (см., в частности, [12]), что на произвольном измеримом множестве $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 2$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, удовлетворяющем условиям (5), (6), в классах $L_p(\mathbb{T}^N), p > 1$, СОЛ для суммируемых по прямоугольникам кратных рядов Фурье справедлива тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2$. Заметим, что в части достаточности данное утверждение справедливо без ограничений (5), (6).

Подчеркнем, что критерий справедливости СОЛ был доказан в расширенной формулировке с указанием подмножества $\mathfrak{A}_1$ множества $\mathfrak{A}$, на котором существует предел последовательности частичных сумм $S_n(x; f)$, а именно

Теорема В. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 2$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$.*

[6] Множество $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^2$, обладающее свойством $\mathbb{B}_2$, — это множество, для которого существует (непустое) открытое множество Ω, $\Omega \subset \mathbb{T}^2$, такое, что $\mu(\Omega \setminus \mathfrak{A}) = 0$ (см. [10, 12]).

[7] В частности, этому условию удовлетворяют множества $\mathfrak{B}$ такие, что $\mu(int\mathfrak{B}) = \mu\mathfrak{B}$; в свою очередь последнее условие справедливо, например, для множеств $\mathfrak{B}$ таких, что $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}$ — произвольное замкнутое множество.

1. *Если для некоторого* $W^0 = W^0(J_0)$ *вида* (4) *множество* $\mathfrak{A}$ *обладает свойством* $\mathbb{B}_2(W^0)$, *то для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, *такой, что* $f(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$,

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x; f) = 0 \text{ почти всюду на } W^0.$$

Пусть дополнительно множество $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет условиям* (5), (6), *тогда*

2. *Если свойство* $\mathbb{B}_2(W^0)$ *множества* $\mathfrak{A}$ *является максимальным свойством* $\mathbb{B}_2$, *то существует функция* $f_1 \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ *такая, что* $f_1(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$, *но*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(x; f_1)| = +\infty \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^N \setminus W^0.$$

3. *В частности, если множество* $\mathfrak{A}$ *вообще не обладает свойством* $\mathbb{B}_2$, *то существует функция* $f_2 \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ *такая, что* $f_2(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$, *но*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(x; f_2)| = +\infty \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^N.$$

Полученные результаты о справедливости СОЛ для суммируемых по прямоугольникам кратных рядов Фурье поставили новый вопрос: пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$; каким (с точки зрения геометрии и структуры) должно быть "максимальное" множество, на котором сходится п.в. тригонометрический ряд Фурье функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geq 1$, равной нулю на $\mathfrak{A}$?

В [13] (см. также [14]) И. Л. Блошанским были введены понятия максимального множества неограниченной расходимости п.в. и максимального множества сходимости п.в. для указанных рядов.

Определение 4. *Максимальным множеством неограниченной расходимости* (ММНР) *почти всюду кратных рядов Фурье функций из класса* $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geq 1$, $f(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$, *будем называть множество* E_1, $E_1 \subseteq \mathbb{T}^N$, $\mu E_1 > 0$, *которое*

во-первых, является множеством неограниченной расходимости (МНР) *почти всюду указанных рядов, т.е. существует функция* $f_1 \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $f_1(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$, *такая, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(x; f_1)| = +\infty \text{ почти всюду на } E_1;$$

во-вторых, множество E_1 *является максимальным, т.е. для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |S_n(x; f)| < +\infty \text{ почти всюду на } CE_1 = \mathbb{T}^N \setminus E_1.$$

Определение 5. *Максимальным множеством сходимости* (ММС) *почти всюду кратных рядов Фурье функций из класса* $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p \geq 1$, $f(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$, *будем называть множество* E_2, $E_2 \subseteq \mathbb{T}^N$, $\mu E_2 > 0$, *которое* *во-первых, является множеством сходимости* (МС) *почти всюду указанных рядов, т.е. для любой функции* $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$, *существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x; f) = f(x) \ \text{почти всюду на} \ E_2;$$

во-вторых, множество E_2 *является максимальным, т.е. существует функция* $f_2 \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $f_2(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$, *такая, что* $S_n(x; f_2)$ *расходится при* $n \to \infty$ *почти всюду на* $CE_2 = \mathbb{T}^N \setminus E_2$.

В работе [14] для $N \geq 2$ и $p > 1$ было доказано следующее утверждение о структуре и геометрии ММНР и ММС.

Пусть Ω, $\Omega \subset \mathbb{T}^N$, — произвольное (непустое) открытое множество. Для любого J_k, $0 \leq k \leq N-2$, обозначим

$$V = V(J_k) = V(\Omega, J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} V[J_2] = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} (\Omega[J_2] \times \mathbb{T}[M \setminus J_2]), \tag{7}$$

где $\Omega[J_2] = pr_{(J_2)}\{\Omega\}$ — ортогональная проекция множества Ω на плоскость $\mathbb{R}[J_2]$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема C. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— произвольное измеримое множество,* $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 2$, $0 \leq \mu\mathfrak{A} < \mu\mathbb{T}^N$, $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$. *Тогда*

1. *Если* $\mu V(int\mathfrak{B}, J_0) = \mu\mathbb{T}^N$, *то*

   1) *множество* $V(int\mathfrak{B}, J_0)$ (7) *является максимальным множеством неограниченной расходимости почти всюду для кратных рядов Фурье функций* $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$, *при суммировании по прямоугольникам*;

   2) *множеств сходимости указанных рядов нет.*

2. *Если* $\mu V(int\mathfrak{B}, J_0) < \mu\mathbb{T}^N$ *и множество* $\mathfrak{B}$ *удовлетворяет условиям* (5), (6), *то*

   1) *множество* $V(int\mathfrak{B}, J_0)$ *— максимальное множество неограниченной расходимости почти всюду кратных рядов Фурье функций* $f \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ *на* $\mathfrak{A}$, *при суммировании по прямоугольникам*;

   2) *множество* $\mathfrak{A}_1 = \mathbb{T}^N \setminus V(int\mathfrak{B}, J_0)$ *— максимальное множество сходимости почти всюду указанных рядов, при этом*

   а) $\mathfrak{A}_1 = \bigcap_{J_2 \subset M} (\Omega_{J_2} \times \mathbb{T}[M \setminus J_2])$, *где* $\Omega_{J_2} = \mathbb{T}^2 \setminus \overline{pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\}}$;

   б) *существует множество*

$$W(\mathfrak{A}_1, J_0) = \bigcup_{J_2 \subset M} (\Omega_{J_2} \times \mathbb{T}[M \setminus J_2])$$

такое, что $\mu(W(\mathfrak{A}_1, J_0) \setminus \mathfrak{A}) = 0$*, т.е. множество* $\mathfrak{A}$ *обладает максимальным свойством* $\mathbb{B}_2(\mathfrak{A}_1)$.

4. В связи с приведенными выше результатами возникают следующие вопросы.

1) Какова должна быть структура и геометрия "самого простого" множества $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, на котором в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, была бы справедлива СОЛ для кратных рядов Фурье в случае, когда (прямоугольные) частичные суммы этих рядов $S_n(x; f)$ имеют "номер" $n = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$, в котором некоторые компоненты $n_1, \ldots, n_N$ являются элементами лакунарных последовательностей?

2) Какими должны быть структурно-геометрические характеристики произвольного измеримого множества $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$ (на котором разлагаемая в ряд Фурье функция $f(x)$ равна нулю), чтобы на этом множестве в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, была справедлива СОЛ для кратных рядов Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм"?

3) Какими (с точки зрения геометрии и структуры) для произвольного измеримого множества $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$ должны быть ММНР и ММС п.в. указанных выше рядов функций из класса $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, равных нулю на $\mathfrak{A}$?

Цель работы. Основной целью работы является изучение вопросов справедливости слабой обобщенной локализации почти всюду для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из классов $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, в случае, когда прямоугольные частичные суммы $S_n(x; f)$ рассматриваемых рядов имеют "номер" $n = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$, в котором некоторые компоненты являются элементами (однократных) лакунарных последовательностей.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Найдены структурно-геометрические характеристики "самых простых" подмножеств $\mathbb{T}^N$ (положительной меры), на которых в классах $L_p(\mathbb{T}^N), p > 1$, при $N \geq 3$ справедлива слабая обобщенная локализация почти всюду для кратных тригонометрических рядов Фурье в случае, когда прямоугольные частичные суммы $S_n(x; f)$ этих рядов имеют "номер" $n = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$, в котором некоторые компоненты n_j являются элементами лакунарных последовательностей.

2. Для широкого класса измеримых множеств (положительной меры) $\{\mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, получен критерий справедливости (в терминах структуры и геометрии множества $\mathfrak{A}$) слабой обобщенной локализации почти всюду в классах $L_p(\mathbb{T}^N), p > 1$, для кратных тригонометрических рядов Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм".

3. Для широкого класса измеримых множеств (положительной меры) $\{\mathfrak{A}\}$, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, описаны структурно-геометрические характеристики максимальных множеств схо-

димости почти всюду и максимальных множеств неограниченной расходимости почти всюду кратных рядов Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм" функций из классов $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, равных нулю на $\mathfrak{A}$.

Методы исследования. В диссертации используются методы теории функций и функционального анализа.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученный в диссертации результаты могут быть использованы для дальнейшего изучения поведения частичных сумм тригонометрических рядов Фурье, а также рядов Фурье по другим ортогональным системам.

Апробация диссертации. Полученные в диссертации результаты докладывались автором на научно-исследовательском семинаре под руководством член-корр. РАН Б. С. Кашина, проф. Б. И. Голубова, проф. М. И. Дьяченко, проф. С. В. Конягина (МГУ им. Ломоносова, 2008); на научно-исследовательском семинаре под руководством проф. М. К. Потапова, проф. В. А. Скворцова, проф. Т. П. Лукашенко, проф. М. И. Дьяченко (МГУ им. Ломоносова, 2009); неоднократно на научно-исследовательском семинаре под руководством проф. И. Л. Блошанского (МГОУ, 2006–2009); на Саратовской зимней школе "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2008); на V международном симпозиуме "Ряды Фурье и их приложения" (Ростов-на-Дону, 2008); на международной научной конференции "Моделирование нелинейных процессов и систем" (Москва, МГТУ "Станкин" , 2008); на Воронежской зимней школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" (Воронеж, 2009); на III международной научной конференции "Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования" (Воронеж, 2009); на XXIII Воронежской весенней школе "Современные методы теории краевых задач" (Воронеж, 2009); на девятой международной Казанской летней школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2009).

Тематика работы поддержана грантом РФФИ № 08-01-00669.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 10 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Общий объем работы составляет 112 страниц, список литературы содержит 47 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** дается краткий обзор результатов, связанных с вопросами сходимости рядов Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм", а также вопросами справедливости различных локализаций для кратных рядов Фурье (суммируемых по прямоугольникам), и приводятся формулировки результатов, полученных в диссертации.

Глава I диссертации посвящена изучению структурно-геометрических характеристик "самых простых" подмножеств $\mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, на которых справедлива СОЛ в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, для кратных рядов Фурье, чьи прямоугольные частичные суммы $S_n(x; f)$ имеют "номер" $n = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$, в котором некоторые компоненты являются элементами лакунарных последовательностей.

Введем следующие обозначения. Пусть $\alpha = \alpha(J_k) = (\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k}) \in \mathbb{Z}_1^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1, \ldots, k$, $1 \leq k \leq N-2$. Символом $n^{(\alpha)} = n^{(\alpha)}[J_k] = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ обозначим N-мерный вектор, у которого компоненты n_j с номерами $j = j_s$, $s = 1, \ldots, k$, являются элементами *некоторых* (однократных бесконечно больших) *последовательностей натуральных чисел* (при $j \in J_k : n_j = n_j^{(\alpha_j)}$ и $n_j^{(\alpha_j)} \to \infty$ при $\alpha_j \to \infty$). В частности, символом $n^{(\lambda)} = n^{(\lambda)}[J_k] \in \mathbb{Z}_1^N$ (где $\lambda = \lambda(J_k) = (\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}) \in \mathbb{Z}_1^k$, $j_s \in J_k$, $s = 1, \ldots, k$) будем обозначать N-мерный вектор, у которого компоненты n_j, $j \in J_k$, являются элементами некоторых (однократных) *лакунарных* последовательностей.

В § 1 главы I мы доказываем теорему, результат которой показывает, что для кратных рядов Фурье с "J_k-лакунарной последовательностью частичных сумм" $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$ СОЛ в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, при $N \geq 3$ будет справедлива на "неполном кресте из N-мерных брусков" — множестве $W = W(J_k)$ вида (3).

Теорема I.I. *Для любого $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, $N \geq 3$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на $W = W(J_k)$,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ n_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = 0 \ \text{для почти всех} \ x \in W^0 = W^0(J_k). \tag{8}$$

Отметим, что "N-мерные бруски" $W[J_2]$, образующие указанный "крест" W, имеют "основания" $\Omega[J_2]$ в тех плоскостях $\mathbb{R}[J_2]$, $J_2 = \{s, t\} \subset M$, для которых соответствующие компоненты "номера" $n^{(\lambda)}[J_k] \in \mathbb{Z}_1^N$ — компоненты n_s и n_t — являются "свободными" (т.е., в частности, не являются элементами никаких лакунарных последовательностей), и число таких "брусков" будет равно C_{N-k}^2.

Естественно, встает вопрос о том, можно ли усилить результат теоремы I.I, установив при $N \geq 3$ и $1 \leq k \leq N-2$ равенство (8) на всем множестве $W(J_k)$ вида (3)?

Ответ на поставленный вопрос зависит от размерности пространства N и числа k компонент "номера" частичной суммы $S_n(x; f)$, которые являются элементами лакунарных последовательностей. Если при $N \geq 3$ величина $k = N - 2$, то такое усиление теоремы I.I оказывается возможным, а именно, справедливо следующее утверждение.

Следствие (теоремы I.I). *При $N \geq 3$ для любого $J_{N-2} \subset M$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на $W = W(J_{N-2})$,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_{N-2}, \\ n_j \to \infty, j \in M \setminus J_{N-2}}} S_{n^{(\lambda)}[J_{N-2}]}(x; f) = 0 \ \text{\textit{для почти всех}}\ x \in W.$$

Если же при $N \geq 4$ величина k меньше $N - 2$, то усилить теорему I.I, установив равенство (8) на всем $W(J_k)$, нельзя, что показывает следующая теорема.

Теорема I.II. *Пусть $N \geq 4$ и $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-3$, тогда существуют множество $W = W(J_k)$ вида (3) и функция $f \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такие, что $f(x) = 0$ на W и для любых k последовательностей натуральных чисел $\{n_j^{(\alpha_j)}\}$, $j \in J_k$, $n_j^{(\alpha_j)} \to \infty$ при $\alpha_j \to \infty$,*[8] *справедлива оценка*

$$\overline{\lim_{\substack{\alpha_j \to \infty, j \in J_k, \\ n_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}}} |S_{n^{(\alpha)}[J_k]}(x; f)| = +\infty \ \text{\textit{почти всюду на}}\ \mathbb{T}^N \setminus W^0,$$

где множество $W^0 = W^0(J_k)$ определено формулой (4).

В § 2 главы I нами исследуется вопрос о необходимых условиях справедливости СОЛ для кратных рядов Фурье с "J_k-лакунарной последовательностью частичных сумм" на множествах $W(J_k)$ вида (3). Доказанные теоремы (**теоремы I.III — I.V**) показывают, что найденные структурно-геометрические характеристики "неполных N-мерных крестов" $W(J_k)$ являются точными в смысле числа образующих множества "N-мерных брусков", а также их ("брусков") геометрии и структуры, точнее, для рассматриваемых нами рядов Фурье СОЛ не будет справедлива на "крестах" $W(J_k)$ вида (3) в следующих случаях:

1) если указанный "крест" $W(J_k)$ (при $N \geq 3$) имеет меньшее, чем C^2_{N-k}, число "брусков" $W[J_2]$;

2) если "крест" $W(J_k)$ (при $N \geq 4$) составлен из "брусков" $W[J_3] = \Omega[J_3] \times \mathbb{T}[M \setminus J_3]$, где $\Omega[J_3]$ — ортогональная проекция (непустого) открытого множества $\Omega \subset \mathbb{T}^N$ на пространство $\mathbb{R}[J_3]$;

3) если хотя бы для одного из "брусков" $W[J_2]$ (при $N \geq 3$ образующих "крест" $W(J_k)$) множество $\Omega[J_2]$ является, например, замкнутым множеством, с не равной нулю

[8] В частности, все последовательности $\{n_j^{(\alpha_j)}\}$, $j \in J_k$, могут быть лакунарными или, например (если $N \geq 4$ и $k \geq 2$), почленно равными между собой (т.е. $n_{j_1}^{(\alpha_{j_1})} = \cdots = n_{j_k}^{(\alpha_{j_k})} = n_0$).

мерой Лебега границы.

Наконец, в § 3 главы I нами доказана теорема (**теорема I.VI**), которая показывает, что СОЛ для рассматриваемых нами рядов в классе $L_1(\mathbb{T}^N)$ на множествах $W(J_k)$ вида (3) справедлива не будет.

В **главе II** диссертации нами доказан критерий справедливости в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, СОЛ для кратных рядов Фурье с "J_k-лакунарной последовательностью частичных сумм" на произвольных подмножествах $\mathbb{T}^N$ положительной меры (удовлетворяющих некоторым ограничениям на границу множества) в терминах свойства $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$.

Введем следующие понятия.

Определение 6. *Пусть* $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, *и пусть* $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, *или* $J_k = \emptyset$, $k = 0$.

1. *Будем говорить, что множество* $\mathfrak{A}$ *обладает свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, *если найдется множество* $W = W(J_k)$ *вида* (3), *которое вписывается п.в. в* $\mathfrak{A}$, *причем свойство* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ *есть свойство* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$, *если* $W = W(W^0)$.

2. *Свойство* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ *множества* $\mathfrak{A}$ *будем называть максимальным свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ *множества* $\mathfrak{A}$, *если для любого множества* $\widehat{W}^0 = \widehat{W}^0(J_k)$ *вида* (4) *такого, что* $\mu(\widehat{W}^0 \setminus W^0) > 0$, *множество* $\mathfrak{A}$ *не обладает свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(\widehat{W}^0)$.

Заметим, что при $k = 0$ свойство $\mathbb{B}_2^{(J_0)} \equiv \mathbb{B}_2^{(\emptyset)}$ и максимальное свойство $\mathbb{B}_2^{(J_0)}(W^0(J_0)) \equiv \mathbb{B}_2^{(\emptyset)}(W^0(\emptyset))$ совпадают, соответственно, со свойством $\mathbb{B}_2$ и максимальным свойством $\mathbb{B}_2(W^0)$ (см. определение 3).

Справедлива следующая теорема.

Теорема II.I. *Пусть* $\mathfrak{A}$ *— произвольное измеримое множество,* $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$, *и пусть* J_k *— произвольная "выборка" из* M, $1 \leq k \leq N-2$. *Если множество* $\mathfrak{A}$ *удовлетворяет условиям* (5), (6′), *где*

$$\mu_2 Frpr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\} = 0, \quad J_2 \subset M \setminus J_k, \tag{6′}$$

то на множестве $\mathfrak{A}$ *в классе* $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, *для кратных рядов Фурье, чьи прямоугольные частичные суммы* $S_n(x; f)$ *имеют "номер"* $n = n^{(\lambda)}[J_k]$, *справедлива слабая обобщенная локализация почти всюду тогда и только тогда, когда множество* $\mathfrak{A}$ *обладает свойством* $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$.

Заметим, что в части достаточности теорема II.I справедлива без ограничений (5), (6′).

Критерий справедливости СОЛ в диссертации доказан в расширенной формулировке с указанием подмножества $\mathfrak{A}_1 \subset \mathfrak{A}$, на котором существует предел "J_k -лакунарной последовательности частичных сумм"

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ n_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = 0$$

при условии $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$.

Теорема II.I$'$. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, $0 < \mu\mathfrak{A} < (2\pi)^N$, и пусть $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$.*

1. *Если существует множество $W^0 = W^0(J_k)$ вида (4) такое, что множество $\mathfrak{A}$ обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$, то для любой функции $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, такой, что $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$,*

$$\lim_{\substack{\lambda_j \to \infty, j \in J_k, \\ n_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}} S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f) = 0 \text{ почти всюду на } W^0.$$

Пусть дополнительно множество $\mathfrak{A}$ удовлетворяет условиям (5), (6$'$), тогда

2. *Если свойство $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(W^0)$ множества $\mathfrak{A}$ является максимальным свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, то существует функция $f_1 \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такая, что $f_1(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$ и для любых k последовательностей натуральных чисел $\{n_j^{(\alpha_j)}\}$, $j \in J_k$, $n_j^{(\alpha_j)} \to \infty$ при $\alpha_j \to \infty$,*[9] *справедлива оценка*

$$\overline{\lim_{\substack{\alpha_j \to \infty, j \in J_k, \\ n_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}}} |S_{n^{(\alpha)}[J_k]}(x; f_1)| = +\infty \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^N \setminus W^0.$$

3. *В частности, если множество $\mathfrak{A}$ вообще не обладает свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, то существует функция $f_2 \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$ такая, что $f_2(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$ и для любых k последовательностей натуральных чисел $\{n_j^{(\alpha_j)}\}$, $j \in J_k$, $n_j^{(\alpha_j)} \to \infty$ при $\alpha_j \to \infty$, справедлива оценка*

$$\overline{\lim_{\substack{\alpha_j \to \infty, j \in J_k, \\ n_j \to \infty, j \in M \setminus J_k}}} |S_{n^{(\alpha)}[J_k]}(x; f_2)| = +\infty \text{ почти всюду на } \mathbb{T}^N.$$

Таким образом, для любого k, $1 \leq k \leq N-2$, справедливость или несправедливость СОЛ для рассматриваемых нами кратных рядов Фурье в классах $L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, на произвольном измеримом множестве $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, определяется структурой и геометрией множества $\mathfrak{A}$, которые, в свою очередь, описываются свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$, где величина k — это число "лакунарных компонент" вектора $n = (n_1, \ldots, n_N) \in \mathbb{Z}_1^N$ ("номера" частичной суммы $S_n(x; f)$).[10]

---

[9] Еще раз отметим (см. сноску к теореме I.II), что все последовательности $\{n_j^{(\alpha_j)}\}$, $j \in J_k$, могут быть, в частности, лакунарными или, например (если $N \geq 4$ и $k \geq 2$), почленно равными между собой (т.е. $n_{j_1}^{(\alpha_{j_1})} = \cdots = n_{j_k}^{(\alpha_{j_k})} = n_0$).

[10] Подчеркнем, что "N-мерные бруски" $W[J_2]$, $J_2 \subset M \setminus J_k$, образующие "неполный крест" $W(J_k)$ (3)

Сравнивая теорему B и теорему II.I$'$, мы видим, что для справедливости на измеримом множестве $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, СОЛ (для суммируемых по прямоугольникам кратных рядов Фурье функций $f \in L_p$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$) в случае, когда все компоненты вектора $n \in \mathbb{Z}_1^N$ — номера частичной суммы $S_n(x; f)$ — "свободны", на множество $\mathfrak{A}$ должны быть наложены "более жесткие" условия, описываемые свойством $\mathbb{B}_2$, чем условия на это же множество в случае, когда часть компонент вектора n — лакунарны.

Далее заметим, что чем "более мягкими" при возрастании k ($1 \leq k \leq N-2$) становятся условия на структурно-геометрические характеристики множества $\mathfrak{A}$ (описываемые в теореме II.I$'$ свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}$ множества $\mathfrak{A}$), тем "более жесткими" становятся условия на последовательности частичных сумм $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; f)$, оставляя "свободными" (не лакунарными) все меньше и меньше компонент в векторе $n = n^{(\lambda)}[J_k]$ — номере частичной суммы кратного ряда Фурье рассматриваемой функции, и, наконец, "в пределе" (т.е. когда только две переменные в векторе n остаются свободными) от структурно-геометрических свойств множества $\mathfrak{A}$ требуется "только лишь" выполнение условия: должен существовать такой "N-мерный брусок" $W[J_2]$, который вписывается п.в. в множество $\mathfrak{A}$.

Глава II диссертации состоит из двух параграфов. В §1 главы II нами получены вспомогательные оценки, которые позволяют в §2 доказать теорему II.I$'$. В параграфе §2 главы II на основе доказательства теоремы II.I$'$ мы доказываем также некоторое обобщение теоремы II.I (**теорема II.II**), ослабляющее ограничения на множество $\mathfrak{A}$.

Глава III диссертации посвящена исследованию вопросов о структуре и геометрии максимальных множеств неограниченной расходимости п.в. и максимальных множеств сходимости п.в. для рассматриваемых в настоящей работе кратных рядов Фурье.

Мы даем определения ММНР и ММС п.в. для кратных рядов Фурье с "J_k-лакунарной последовательностью частичных сумм", аналогичные определениям 4 и 5 (определениям ММНР и ММС п.в. для кратных рядов Фурье), заменяя в формулировках этих определений частичные суммы $S_n(x; \cdot)$ на частичные суммы $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x; \cdot)$.

Используя вспомогательные оценки, полученные в §1 главы II, мы устанавливаем справедливость теоремы (**теорема III.I**) о том, что для любого замкнутого множества $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, и для любого $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$, множество $V(\mathfrak{B}, J_k)$ (7), где $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$, является МНР п.в. кратных рядов Фурье с "J_k-лакунарной последовательно-

(который удовлетворяет условию $\mu(W(J_k) \setminus \mathfrak{A}) = 0$), имеют "основания" $\Omega[J_2]$ в тех плоскостях $\mathbb{R}[J_2]$, для которых соответствующие компоненты "номера" $n \in \mathbb{Z}_1^N$ — компоненты n_j, $j \in M \setminus J_k$, — являются "свободными" (т.е., в частности, не являются компонентами никаких лакунарных последовательностей).

стью частичных сумм" $S_{n^{(\lambda)}[J_k]}(x;f)$ функций $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$.

В свою очередь, результаты теорем III.I и II.I$'$ позволяют нам описать структурно-геометрические характеристик ММНР п.в. и ММС п.в. в рассматриваемом нами случае для широкого класса измеримых множеств $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$ (с некоторыми ограничениями на границу множества $\mathfrak{A}$), и для любого $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$.

Теорема III.II. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольное измеримое множество, $\mathfrak{A} \subset \mathbb{T}^N$, $N \geq 3$, $0 \leq \mu\mathfrak{A} < \mu\mathbb{T}^N$, $\mathfrak{B} = \mathbb{T}^N \setminus \mathfrak{A}$, и пусть $J_k \subset M$, $1 \leq k \leq N-2$. Тогда*

1. *Если $\mu V(int\mathfrak{B}, J_k) = \mu\mathbb{T}^N$, то*

1) *множество $V(int\mathfrak{B}, J_k)$ является максимальным множеством неограниченной расходимости почти всюду для кратных рядов Фурье с "J_k-лакунарной последовательностью частичных сумм" функций $f \in L_p(\mathbb{T}^N)$, $p > 1$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$;*

2) *множеств сходимости указанных рядов нет.*

2. *Если $\mu V(int\mathfrak{B}, J_k) < \mu\mathbb{T}^N$ и множество $\mathfrak{B}$ удовлетворяет условиям* (5), (6$'$), *то*

1) *множество $V(int\mathfrak{B}, J_k)$ — максимальное множество неограниченной расходимости почти всюду кратных рядов Фурье с "J_k-лакунарной последовательностью частичных сумм" функций $f \in L_\infty(\mathbb{T}^N)$, $f(x) = 0$ на $\mathfrak{A}$, при суммировании по прямоугольникам;*

2) *множество $\mathfrak{A}_1 = \mathbb{T}^N \setminus V(int\mathfrak{B}, J_k)$ — максимальное множество сходимости почти всюду указанных рядов, при этом*

а) $\mathfrak{A}_1 = \bigcap_{J_2 \subset M \setminus J_k} (\Omega_{J_2} \times \mathbb{T}[M \setminus J_2])$, *где* $\Omega_{J_2} = \mathbb{T}^2 \setminus \overline{pr_{(J_2)}\{int\mathfrak{B}\}}$;

б) существует множество

$$W(\mathfrak{A}_1, J_k) = \bigcup_{J_2 \subset M \setminus J_k} (\Omega_{J_2} \times \mathbb{T}[M \setminus J_2])$$

такое, что $\mu(W(\mathfrak{A}_1, J_k) \setminus \mathfrak{A}) = 0$, т.е. множество $\mathfrak{A}$ обладает максимальным свойством $\mathbb{B}_2^{(J_k)}(\mathfrak{A}_1)$.

В заключение хотелось бы выразить глубокую благодарность моему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Блошанскому Игорю Леонидовичу за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Колмогоров А. Н. *Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier* // Fund. Math. 1924. V. 5. P. 96-97.

[2] Littlewood J., Paley R. *Theorems on Fourier series and power series* // J. Lond. Math. Soc. 1931. V. 6. P. 230-233.

[3] Carleson L. *On convergence and growth of partial sums of Fourier series* // Acta Math. 1966. V. 116. P. 135-157.

[4] Hunt R. *On the convergence of Fourier series* // Proc. Conf. Edwardsville Ill. 1967, Southern Illinouis Univ. Press. Carbondale Ill. 1968. P. 235-255.

[5] Gosselin R. P. *On the divergence of Fourier series* // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V. 9. P. 278-282.

[6] Totik V. *On the divergence of Fourier series.* // Publ. math., Debrecen. 1982. V. 29. № 3-4. P. 251-264.

[7] Sjölin P. *Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series* // Arkiv Matem. 1971. V. 9. № 1. P. 65-90.

[8] Kojima M. *On the almost everywhere convergence of rectangular partial sums of multiple Fourier series* // Sci. Repts. Kanazava Univ. 1977. V. 22. № 2. P. 163-177.

[9] Fefferman C. *On the divergence of multiple Fourier series* // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. № 2. P. 191-195.

[10] Блошанский И. Л. *О критериях слабой обобщенной локализации в N-мерном пространстве* // ДАН СССР. 1983. Т. 271. № 6. С. 1294-1298.

[11] Блошанский И. Л. *О геометрии измеримых множеств в N-мерном пространстве, на которых справедлива обобщенная локализация для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из L_p, $p > 1$* // Матем. сборник. 1983. Т. 121. № 1. С. 87-110.

[12] Блошанский И. Л. *Два критерия слабой обобщенной локализации для кратных тригонометрических рядов Фурье функций из L_p, $p \geq 1$* // Изв. АН СССР. Серия матем. 1985. Т. 49. № 2. С. 243-282.

[13] Блошанский И. Л. *О максимальных множествах сходимости и неограниченной расходимости кратных рядов Фурье функций из L_1, равных нулю на данном множестве* // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 5. С. 1040-1044.

[14] Блошанский И. Л. *Некоторые вопросы многомерного гармонического анализа.* Дисс. ... докт. физ.-мат. наук. М.: МИАН, 1991.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДИССЕРТАЦИИ
ОПУБЛИКОВАНЫ В РАБОТАХ

[1] Лифанцева О.В., Блошанский И.Л. *Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности* // Матем. заметки. 2008. Т. 84. № 3. С. 334-347.

[2] Лифанцева О.В., Блошанский И.Л. *Критерий слабой обобщенной локализации для кратных рядов Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности* // ДАН России. 2008. Т. 423. № 4. С. 439-442.

[3] Лифанцева О.В. *Необходимые условия справедливости слабой обобщенной локализации для рядов Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм"* // Матем. заметки. 2009. Т. 86. № 3. С. 408-420.

[4] Лифанцева О.В., Блошанский И.Л. *Слабая обобщенная локализация для кратных рядов Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм"* // Современные проблемы теории функций и их приложения: тезисы докладов 14-ой Саратовской зимней школы. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2008. С. 29-30.

[5] Лифанцева О.В., Блошанский И.Л. *О локализации для кратных рядов Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности* // XVI междунар. конференция "Математика. Экономика. Образование". V междунар. симпозиум "Ряды Фурье и их приложения". Тезисы докладов. Ростов-на-Дону: Изд-во "ЦВВР". 2008. С. 12.

[6] Лифанцева О.В., Блошанский И.Л. *Критерий слабой обобщенной локализации для кратных разложений Фурье, прямоугольные частичные суммы которых рассматриваются по некоторой подпоследовательности* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: материалы конференции Воронежской зимней матем. школы. Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ. 2009. С. 26-27.

[7] Лифанцева О.В. *Обобщенная локализация для кратных рядов Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм"* // Современные методы теории функций

и смежные проблемы: материалы конференции Воронежской зимней матем. школы. Воронеж: Изд.-полиграф. центр ВГУ. 2009. С. 105-107.

[8] Лифанцева О.В., Блошанский И.Л. *О максимальных множествах сходимости и расходимости кратных рядов Фурье с "J_k-лакунарной последовательностью частичных сумм"* // Современные проблемы прикладной математики и матем. моделирования: материалы III междунар. научной конференции. Часть I. Воронеж: "Научная книга". 2009. С. 20-21.

[9] Лифанцева О.В. *О сходимости почти всюду кратных рядов Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм"* // Современные методы теории краевых задач: материалы Воронежской весенней матем. школы "Понтрягинские чтения - XX". Воронеж: ВГУ. 2009. С. 111-112.

[10] Лифанцева О.В., Блошанский И.Л. *Локальные условия гладкости, обеспечивающие сходимость кратных рядов Фурье с "лакунарной последовательностью частичных сумм"* // Теория функции, ее приложения и смежные вопросы: материалы Девятой междунар. Казанской летней научной школы-конференции. Казань: Изд-во Казанского матем. общ-ва, Изд-во КГУ. 2009. Т. 38. С. 48-50.

В совместных работах Блошанскому И.Л. принадлежат постановка задачи и методика исследования. Детальное доказательство проведено Лифанцевой О.В. самостоятельно.