МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 512.643, 512.552

Маркова Ольга Викторовна

ФУНКЦИЯ ДЛИНЫ И МАТРИЧНЫЕ АЛГЕБРЫ

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2009

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научные руководители:	доктор физико-математических наук, доцент Гутерман Александр Эмилевич
	доктор физико-математических наук, профессор Михалев Александр Васильевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Кожухов Игорь Борисович
	доктор физико-математических наук, профессор Туганбаев Аскар Аканович
Ведущая организация:	Московский педагогический государственный университет

Защита диссертации состоится 11 декабря 2009 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание МГУ, 14 этаж).

Автореферат разослан 11 ноября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов А.О.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования

Длиной конечной системы $\mathcal{S}$ порождающих конечномерной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ над произвольным полем называется наименьшее натуральное число $l(\mathcal{S})$, такое что слова длины не большей $l(\mathcal{S})$ порождают данную алгебру как векторное пространство. Длиной алгебры называется максимум длин ее систем порождающих, обозначим ее $l(\mathcal{A})$.

Задача вычисления длины полной алгебры матриц $M_n(\mathbb{F})$ как функции порядка матриц возникла в работах Спенсера и Ривлина[1,2] 1959–60гг. в связи с возможным применением в механике. В общей формулировке эта проблема была поставлена Пазом[3] в 1984 году и до сих пор является открытой. Существует гипотеза, состоящая в том, что зависимость между длиной и порядком матриц линейная и задается следующей формулой:

Гипотеза (Паз[3])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле. Тогда* $l(M_n(\mathbb{F})) = 2n-2$.

Известно[3], что эта гипотеза верна при $n = 2, 3, 4$. Однако, все существующие верхние оценки длины алгебры матриц не являются линейными.

Оценка, полученная в работе Паза, является квадратичной относительно порядка матриц.

Теорема 1 (Паз[3])**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле. Тогда*

$$l(M_n(\mathbb{F})) \leq \left\lceil \frac{n^2+2}{3} \right\rceil,$$

где $\lceil . \rceil$ *обозначает наименьшее целое число, большее или равное данному.*

В работе 1997 г. Паппачена[4] предложил обобщение метода комбинаторного подсчета линейно независимых слов, использованного Пазом, и с его помощью получил верхнюю оценку длины произвольной ассоциативной алгебры $\mathcal{A}$ в виде функции двух ее инвариантов: размерности и $m(\mathcal{A})$ — максимальной степени минимального многочлена элементов алгебры.

---

[1] A. J. M. Spencer, R. S. Rivlin, The theory of matrix polynomials and its applications to the mechanics of isotropic continua, Arch. Ration. Mech. Anal., **2**(1959), 309–336.

[2] A. J. M. Spencer, R. S. Rivlin, Further results in the theory of matrix polynomials, Arch. Ration. Mech. Anal., **4**(1960), 214–230.

[3] A. Paz, An application of the Cayley–Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables, Linear Multilinear Algebra, **15**(1984), 161–170.

[4] C. J. Pappacena, An upper bound for the length of a finite-dimensional algebra, J. Algebra, **197**(1997), 535–545.

Теорема 2 (Паппачена[4]). *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и пусть*

$$f(d,m) = m\sqrt{\frac{2d}{m-1}+\frac{1}{4}}+\frac{m}{2}-2.$$

Тогда $l(\mathcal{A}) < f(\dim \mathcal{A}, m(\mathcal{A}))$.

Для матричной алгебры эта теорема дает верхнюю оценку вида $O(n^{3/2})$:

Теорема 3 (Паппачена[4]). *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Тогда*

$$l(M_n(\mathbb{F})) < n\sqrt{\frac{2n^2}{n-1}+\frac{1}{4}}+\frac{n}{2}-2.$$

Некоторые системы порождающих, длины которых не превосходят $2n-2$, рассмотрены в работе Константайна и Дарнолла[5] и в работе Лонгстаффа[6]. Пример системы порождающих длины $2n-2$ в случае, когда основное поле является алгебраически замкнутым характеристики 0, построен в работе Лаффи[7].

Это направление тесно связано с изучением коммутативных подалгебр матричной алгебры — классической областью исследований, восходящей еще к работе Шура[8]. Эта область активно развивается в течение последнего столетия, достаточно упомянуть работы[9, 10, 11, 12, 13, 14, 15]. В работе Паза[3], например, было доказано, что верхняя оценка длины коммутативной матричной подалгебры над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ равна $n-1$, т.е. для коммутативных подалгебр получена линейная относительно порядка матриц точная верхняя оценка длины.

[5] D. Constantine, M. Darnall, Lengths of finite dimensional representations of PWB algebras, Linear Algebra Appl., **395**(2005), 175–181.

[6] W. E. Longstaff, Burnside's theorem: irreducible pairs of transformations, Linear Algebra Appl., **382**(2004), 247–269.

[7] T. J. Laffey, Simultaneous reduction of sets of matrices under similarity, Linear Algebra Appl., **84**(1986), 123–138.

[8] I. Schur, Zur Theorie der Vertauschbären Matrizen, J. Reine Angew. Math., **130**(1905), 66–76.

[9] M. Gerstenhaber, On dominance and varieties of commuting matrices, Ann. Math., **73** (1961), Issue 2, 324–348.

[10] R. C. Courter, The dimension of maximal commutative subalgebras of K_n, Duke Math. J., **32** (1965), 225–232.

[11] Д. А. Супруненко, Р. И. Тышкевич, Перестановочные матрицы. 2-е изд. Москва: УРСС, 2003.

[12] T. J. Laffey, The minimal dimension of maximal commutative subalgebras of full matrix algebras, Linear Algebra Appl., **71** (1985), 199–212.

[13] T. J. Laffey, S. Lazarus, Two-generated commutative matrix subalgebras, Linear Algebra Appl., **147** (1991), 249–273.

[14] W. C. Brown, F. W. Call, Maximal commutative subalgebras of $n \times n$ matrices, Commun. Algebra, **21(12)**(1993), 4439–4460.

[15] Youngkwon Song, A construction of maximal commutative subalgebra of matrix algebras, J. Korean Math. Soc., **40** (2003), No. 2, 241–250.

Приложения разрабатываемой теории возникают в следующем классе задач вычислительных методов в теории матриц (см., например, работы[16,17]): пусть дана подалгебра в полной алгебре матриц $M_n(\mathbb{F})$ порядка n над полем $\mathbb{F}$ (обычно полем комплексных или действительных чисел), заданная порождающим множеством $A_1, \dots, A_k$, и требуется проверить, обладает ли данная алгебра некоторым заданным свойством. При этом процедура проверки должна быть *рациональной*, т.е. использующей конечное число арифметических операций с элементами матриц. Такие процедуры как правило включают в себя рациональную процедуру вычисления базиса алгебры; длина порождающего множества $A_1, \dots, A_k$ ограничивает сверху число матриц, участвующих в рассматриваемых произведениях матриц, т.е. является мерой сложности этой процедуры. Также длина определяет сложность рациональной процедуры проверки, является ли некоторое множество системой порождающих для заданной алгебры.

Отметим, что в ряде вычислительных задач требуется оценить длину произвольного подмножества $\mathcal{S}'$ в алгебре $\mathcal{A}$, которое может порождать не всю алгебру, а ее собственную подалгебру $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Или, найти такое число $M \in \mathbb{N}$, что для любой подалгебры $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{A}$ будет справедлива оценка $l(\mathcal{A}') \leq M$. В силу тривиальной оценки длины $l(\mathcal{A}') \leq \dim \mathcal{A}' - 1$, всегда можно положить $M = \dim \mathcal{A} - 1$. Однако, как показывает, например, оценка в теореме 3, тривиальная оценка может не быть точной.

Таким образом, вопросы, связанные с вычислением и оцениванием длин различных матричных подалгебр, мотивированы приложениями и активно разрабатываются. Поэтому построение общей теории функции длины представляет не только самостоятельный теоретический интерес, но и является эффективным инструментом работы с различными классами вычислительных задач в прикладной и теоретической алгебре. Этим объясняется актуальность.

Цель работы

Изучение основных алгебраических свойств функции длины и применение этих результатов к вычислению или оцениванию длин классических матричных подалгебр.

[16]Ю.А. Альпин, Х.Д. Икрамов, Об унитарном подобии матричных семейств, Матем. заметки, **74**:6 (2003), 815–826.

[17]Al'pin Yu.A., Ikramov Kh.D., Reducibility theorems for pairs of matrices as rational criteria, Linear Algebra Appl., **313**(2000), 155–161.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Среди них:

- Исследование основных теоретико-кольцевых свойств функции длины:
  - сохранение длины алгебры при добавлении внешней единицы;
  - точные верхняя и нижняя оценки длины прямой суммы алгебр;
  - неубывание длины при переходе к алгебраическому расширению основного поля;
  - невозрастание длины алгебры при эпиморфизмах;
  - нижняя оценка длины тензорного произведения алгебр;
  - верхняя оценка длины локальной алгебры как функция индекса нильпотентности ее радикала Джекобсона и размерности фактора по радикалу.
- Доказательство того, что длина подалгебры может превышать длину содержащей ее алгебры на любое натуральное число, и что отношение длины подалгебры к длине алгебры может быть любым рациональным числом из отрезка $[1, 2]$.
- Нахождение точной верхней оценки длины коммутативных матричных алгебр в случае произвольного поля (теорема 2.2.1). Характеризация коммутативных матричных подалгебр максимальной длины над произвольными полями в терминах порождающих элементов (теоремы 2.4.12 и 2.2.17).
- Исследование верхней оценки длины коммутативной алгебры как функции двух инвариантов этой алгебры — размерности и максимальной степени минимального многочлена элементов алгебры (теорема 2.5.14).
- Вычисление длин следующих классических матричных подалгебр: алгебры верхнетреугольных матриц; алгебры диагональных матриц; алгебры Шура; алгебры Куртера.

Основные методы исследования

Наряду с классическими методами и результатами линейной алгебры и теории колец, используются также методы комбинаторной алгебры, ориентированные на исследование функции длины алгебр, развитые автором.

Теоретическая и практическая значимость

Работа носит теоретический характер. Полученные в ней результаты могут быть использованы в различных задачах теории колец, линейной алгебры, вычислительных методов.

Апробация результатов

Результаты диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательских семинарах: научно-исследовательский семинар по алгебре кафедры Высшей алгебры МГУ, “Кольца и модули”, “Теория матриц” и “Избранные вопросы алгебры ” кафедры Высшей алгебры МГУ (2004–2009гг.); на семинаре факультета математики университета г. Билефельда, Германия в 2005 и 2006 гг..

Также результаты докладывались на следующих конференциях:

- Международная алгебраическая конференция, посвященная 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры, Москва, 2004;

- Международный семинар по компьютерной алгебре и информатике, посвященный 30-летию лаборатории вычислительных методов, Москва, 2005;

- 2-я международная конференция по матричным методам и операторным уравнениям, Москва, 2007;

- 8-я конференция по линейной алгебре, Любляна, Словения, 2008;

- Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша, Москва, 2008;

- Международная конференция “Современные проблемы математики, механики и их приложений,” посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего, Москва, 2009;

- Научная конференция “Ломоносовские чтения” Москва, 2009.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, списка литературы и списка публикаций автора по теме диссертации. Общий объем работы составляет 129 страниц. Список литературы включает 35 наименований.

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 9 работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1–9].

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** показана актуальность темы диссертации, описано содержание диссертации и сформулированы основные результаты.

Глава 1 посвящена изучению основных теоретико-кольцевых свойств функции длины.

В разделе 1.2 показано, что длина системы порождающих не меняется при обратимых линейных заменах этой системы.

В разделе 1.3 показано, что длина алгебры не меняется при присоединении к алгебре внешней единицы.

Теорема (1.3.1)**.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — конечномерная алгебра без единицы над полем $\mathbb{F}$. Определим $\mathbb{F}$-алгебру $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} \oplus \mathbb{F}$ со следующими операциями:*

$$(a_1, f_1) + (a_2, f_2) = (a_1 + a_2, f_1 + f_2),$$
$$f_1(a, f_2) = (f_1 a, f_1 f_2),$$
$$(a_1, f_1)(a_2, f_2) = (a_1 a_2 + f_2 a_1 + f_1 a_2, f_1 f_2),$$
$$a,\ a_1,\ a_2 \in \mathcal{A},\ f_1,\ f_2 \in \mathbb{F}.$$

Тогда $\mathcal{A}_1$ — конечномерная $\mathbb{F}$-алгебра с единичным элементом $(0, 1)$ и $l(\mathcal{A}) = l(\mathcal{A}_1)$.

В разделе 1.4 получены точные оценки длины прямой суммы алгебр.

Теорема (1.4.2). *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — конечномерные ассоциативные алгебры над полем $\mathbb{F}$ длин $l_{\mathcal{A}}$ и $l_{\mathcal{B}}$, соответственно. Тогда выполнены следующие неравенства:*

$$\max\{l_{\mathcal{A}}, l_{\mathcal{B}}\} \le l(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B}) \le l_{\mathcal{A}} + l_{\mathcal{B}} + 1.$$

В качестве следствия вычислена длина алгебры верхнетреугольных матриц, найдены оценки для длин подалгебр данной алгебры.

Основной результат раздела 1.5 заключается в том, что длина алгебры не уменьшается при переходе к алгебраическому расширению основного поля. Построен пример строгого возрастания длины алгебры при переходе к алгебраическому замыканию поля.

В разделе 1.6 исследуется поведение длины при переходе от алгебры к ее фактор-алгебрам. В частности, доказана

Теорема (1.6.1). *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — алгебры над $\mathbb{F}$ и $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ — эпиморфизм. Тогда $l(\mathcal{B}) \le l(\mathcal{A})$.*

В разделе 1.7 получена точная нижняя оценка длины тензорного произведения алгебр.

В разделе 1.8 длина произвольной конечномерной локальной алгебры оценена сверху функцией от индекса нильпотентности ее радикала Джекобсона и размерности фактор-алгебры по радикалу.

Теорема (1.8.6)**.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — конечномерная локальная $\mathbb{F}$-алгебра. Пусть $J(\mathcal{A})$ — радикал Джекобсона алгебры $\mathcal{A}$, через N обозначен индекс нильпотентности радикала $J(A)$. Пусть $D = \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{A}/J(\mathcal{A})$. Тогда $l(\mathcal{A}) \leq DN - 1$.*

В **главе 2** исследуется длина коммутативных алгебр. Получено обобщение результата Паза о длине коммутативных матричных подалгебр на случай произвольного поля.

Теорема (2.2.1)**.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда $l(\mathcal{A}) \leq n - 1$.*

Также показана точность этой оценки. Более того охарактеризован класс коммутативных матричных подалгебр длины $n - 1$.

Матрица $C \in M_n(\mathbb{F})$ называется *циклической*, если

$$\dim_{\mathbb{F}}(\langle E,\ C,\ C^2, \ldots,\ C^{n-1}\rangle) = n.$$

Теорема (2.4.17)**.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле и пусть $\mathcal{A}$ — коммутативная подалгебра в $M_n(\mathbb{F})$. Тогда $l(\mathcal{A}) = n-1$ тогда и только тогда, когда подалгебра $\mathcal{A}$ порождена циклической матрицей.*

Как следствие, установлено, что максимальные по длине коммутативные подалгебры в $M_n(\mathbb{F})$ являются также максимальными по включению.

В разделе 2.3 приведены примеры вычисления длин таких классических коммутативных матричных подалгебр, как алгебра Шура, алгебра Куртера и др. Также эти примеры показывают, что длины максимальных по включению коммутативных подалгебр в $M_n(\mathbb{F})$ могут принимать любое натуральное значение в отрезке от 1 до $n - 1$, т.е. максимальные по включению коммутативные подалгебры не обязательно имеют максимальную длину.

В разделе 2.5 получена точная верхняя оценка длины коммутативной алгебры как функция таких инвариантов алгебры, как размерность алгебры и максимальная степень минимального многочлена элементов алгебры.

Теорема (2.5.14)**.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная конечномерная коммутативная $\mathbb{F}$-алгебра с единицей. Пусть*

$$g(d, m) = \begin{cases} (m-1)[\log_m d] + [m^{\{\log_m d\}}] - 1 \ \text{\textit{при}}\ m \geq 2; \\ 0 \ \text{\textit{при}}\ m = 1, \end{cases}$$

где $[x]$ *обозначает наибольшее целое число, не превосходящее* x, *и* $\{x\} = x - [x]$. *Тогда* $l(\mathcal{A}) \leq g(\dim \mathcal{A}, m(\mathcal{A}))$.

В коммутативном случае эта оценка является улучшением общей оценки Паппачены из теоремы 2. Этот результат использован для вычисления длины алгебры диагональных матриц над произвольным полем.

Теорема (2.6.1)**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле.*
1. Если поле $\mathbb{F}$ *— бесконечно, то* $l(D_n(\mathbb{F})) = n - 1$.
2. Если $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$ *— конечное поле из* q *элементов, то*

$$l(D_n(\mathbb{F}_q)) = \begin{cases} n-1, & \text{при } q \geq n; \\ (q-1)[\log_q n] + [q^{\{\log_q n\}}] - 1, & \text{при } q < n. \end{cases}$$

Глава 3 посвящена изучению вопроса о связи длины подалгебры с длиной содержащей ее алгебры. В алгебре матриц любого порядка, превышающего 3, построены примеры, показывающие, что функция длины может расти при переходе к подалгебрам. Для матричных подалгебр порядков 2 и 3 установлено, что длина подалгебры не превосходит длины содержащей ее алгебры.

Полностью решен вопрос о возможных значениях разности длины подалгебры и длины содержащей ее алгебры: показано, что длина подалгебры может превышать длину содержащей ее алгебры на любое натуральное число.

Теорема (3.1.11)**.** *Пусть* $k \in \mathbb{N}$ *— произвольное натуральное число, пусть* $n = 4k$. *Тогда существуют такие алгебры* $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A} \subset M_n(\mathbb{F})$, *что* $l(\mathcal{A}') - l(\mathcal{A}) = k$.

В разделе 3.2 рассмотрены специальные конструкции двух- и трехблочных верхнетреугольных матричных подалгебр. Заметим, что до настоящего времени существовало не много примеров алгебр с явно вычисленной длиной. Поэтому вычисление длин подалгебр данного вида представляет непосредственный интерес. Помимо этого, представленные конструкции дают пример того, что отношение длины подалгебры к длине алгебры может быть любым рациональным числом из отрезка $[1, 2]$.

Теорема (3.2.11)**.** *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,* $n \geq m$ *— натуральные числа,*

$$\mathcal{A}_{n,m} = \left\langle E,\ \sum_{i=1}^{n} E_{ii},\ E_{i,j}, \left| \begin{array}{l} 1 \leq i < j \leq n, \\ \text{или} \\ n+1 \leq i < j \leq n+m \end{array} \right. \right\rangle \subset T_{m+n}(\mathbb{F}).$$

Тогда

$$l(\mathcal{A}_{n,m}) = \begin{cases} n-1, \ \textit{при } n-m \geq 2, \\ n-1 \ \textit{при } n=m+1, \ n>3, \\ n+1 \ \textit{при } n=m=2, \\ n, \ \textit{при } n=m\neq 2, \\ n \ \textit{при } n=m+1, \ m=1,2. \end{cases}$$

Следствие (3.2.12)**.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле, $n \geq m$ — фиксированные натуральные числа. Пусть*

$$C_{n,m} = \sum_{i=1}^{n-1} E_{i,i+1} + \sum_{j=1}^{m-1} (E_{j+n,j+n} + E_{j+n,j+n+1}) + E_{n+m,n+m} \in \mathcal{A}_{n,m} -$$

циклическая матрица,

$$\mathcal{A}'_{n,m} = \langle C^j_{n,m}, |\ 0 \leq j \leq n+m-1 \rangle \subseteq \mathcal{A}_{n,m}.$$

Тогда

1. $l(\mathcal{A}'_{n,m}) = n+m-1$*;*
2. *при* $n=m=1, \ 2$ *и* $n=2, \ m=1$ *выполнено* $\mathcal{A}_{n,m} = \mathcal{A}'_{n,m}$ *и* $l(\mathcal{A}_{n,m}) = l(\mathcal{A}'_{n,m})$*;*
3. *при* $n \geq 3$ *выполнено*

$$l(\mathcal{A}'_{n,m}) - l(\mathcal{A}_{n,m}) = \begin{cases} m, \ \textit{при } n-m \geq 2, \textit{или } n=m+1, \ n>3, \\ m-1, \ \textit{при } n=m\geq 3, \ \textit{или } n=3, \ m=2, \end{cases}$$

и

$$\frac{l(\mathcal{A}'_{n,m})}{l(\mathcal{A}_{n,m})} = \begin{cases} 1+\dfrac{m}{n-1}, \ \textit{при } n-m \geq 2, \textit{или } n=m+1, \ n>3, \\ 1+\dfrac{m-1}{n}, \ \textit{при } n=m\geq 3, \ \textit{или } n=3, \ m=2. \end{cases}$$

Теорема (3.2.22)**.** *Пусть $\mathbb{F}$ — произвольное поле. Пусть $n_1, \ n_2, \ n_3 \in \mathbb{N}$, $n_1 \geq n_2+n_3+2$. Пусть $\mathcal{A}_{n_1,n_2,n_3} \subset T_{n_1}(\mathbb{F}) \oplus T_{n_2}(\mathbb{F}) \oplus T_{n_3}(\mathbb{F})$,*

$$\mathcal{A}_{n_1,n_2,n_3} = \left\langle E, \ \sum_{i=1}^{n_1} E_{i,i}, \ \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} E_{i,i}, \ E_{i,j}, \ \middle| \ \begin{matrix} 1 \leq i < j \leq n_1, \\ \textit{или} \\ n_1+1 \leq i < j \leq n_1+n_2, \\ \textit{или} \\ n_1+n_2+1 \leq i < j \leq n_1+n_2+n_3 \end{matrix} \right\rangle$$

Тогда $l(\mathcal{A}_{n_1,n_2,n_3}) = n_1 - 1$.

Следствие (3.2.23). *Пусть* $\mathbb{F}$ *— произвольное поле,* $|\mathbb{F}| \geq 3|$*, и пусть* $n_1,\ n_2,\ n_3 \in \mathbb{N}$*,* $n_1 \geq n_2+n_3+2,\ n_2 \geq n_3 \geq 3$*. Пусть* $a \in \mathbb{F}, a \neq 0,1$ *и*

$$C_{n_1,n_2,n_3} = \sum_{i=1}^{n_1-1} E_{i,i+1} + \sum_{j=n_1+1}^{n_1+n_2-1} (E_{j,j}+E_{j,j+1}) + E_{n_1+n_2,n_1+n_2} + \sum_{k=n_1+n_2+1}^{n_1+n_2+n_3-1} (aE_{k,k}+E_{k,k+1}) + aE_{n_1+n_2+n_3,n_1+n_2+n_3} \in \mathcal{A}_{n_1,n_2,n_3}$$

циклическая матрица, положим

$$\mathcal{A}'_{n_1,n_2,n_3} = \langle C^j_{n_1,n_2,n_3}, |\ 0 \leq j \leq n_1+n_2+n_3-1\rangle \subseteq \mathcal{A}_{n_1,n_2,n_3}.$$

Тогда

1. $l(\mathcal{A}'_{n_1,n_2,n_3}) = n_1+n_2+n_3-1$*;*
2. $l(\mathcal{A}'_{n_1,n_2,n_3}) - l(\mathcal{A}_{n_1,n_2,n_3}) = n_2+n_3$*;*
3. $\dfrac{l(\mathcal{A}'_{n_1,n_2,n_3})}{l(\mathcal{A}_{n_1,n_2,n_3})} = 1 + \dfrac{n_2+n_3}{n_1-1} \leq 1 + \dfrac{n_1-2}{n_1-1} < 2.$

Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям — доктору физико-математических наук, доценту Александру Эмилевичу Гутерману и доктору физико-математических наук, профессору Александру Васильевичу Михалеву за постановку задачи, постоянное внимание к работе и всестороннюю поддержку, а также всему коллективу кафедры высшей алгебры за доброжелательную и творческую атмосферу.

Публикации автора по теме диссертации

1. Маркова О.В., О длине алгебры верхнетреугольных матриц, Успехи математических наук, **60**:3 (2005), 177–178.

2. Маркова О.В., Вычисление длин матричных подалгебр специального вида, Фундаментальная и прикладная математика, **13**:4 (2007), 165–197.

3. Markova O.V., Matrix algebras and their length, в сб. Matrix methods: theory, algorithms, applications., World Scientific Publishing, 2008, 116–139.

4. Guterman A.E., Markova O.V., Commutative matrix subalgebras and length function, Linear Algebra and its Applications, **430**(2009), 1790–1805.

5. Маркова О.В., Характеризация коммутативных матричных подалгебр максимальной длины над произвольным полем, Вестник Московского университета. Сер.1. Математика. Механика. **5**(2009), 53–55.

6. Markova O.V., On the length of matrix subalgebras, Международная алгебраическая конференция, посвященная 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры, Тезисы докладов, Москва, 2004, стр. 233.

7. Markova O.V., On the commutative matrix subalgebras of maximal length, Международный семинар по компьютерной алгебре и информатике, посвященный 30-летию лаборатории вычислительных методов, Тезисы докладов, Москва, 2005, стр. 18–19

8. Markova O.V., Matrix algebras and their length, 2-я международная конференция “Матричные методы и операторные уравнения”, Тезисы докладов, Москва, 2007, 55–56.

9. Markova O.V., On the algebraic properties of the length function, Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша, Тезисы докладов,Москва, 2008, 327–328.

В работе [4], совместной с А.Э. Гутерманом — научным руководителем диссертанта, А.Э. Гутерману принадлежат формулировки основных результатов разделов 5,6,8 и предварительная формулировка теоремы 7.9. Доказательства всех основных результатов работы и формулировки основных результатов разделов 1–4 принадлежат диссертанту.