МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.518+517.52

Своровска Татьяна Александровна

ВОПРОСЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ФУНКЦИЙ РЯДАМИ И ИНТЕГРАЛАМИ В ТЕОРИИ КЛАССИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Специальность 01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор В. А. Скворцов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Н. Н. Холщевникова
	кандидат физико-математических наук, доцент Т. В. Родионов
Ведущая организация:	Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Защита диссертации состоится 20 ноября 2009 г. в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.85 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 20 октября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И.Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одним из классических направлений теории ортогональных рядов является теория единственности. Начало развитию этой теории положила известная теорема Кантора[1], доказанная в конце XIX-го века и утверждающая, что если тригонометрический ряд сходится всюду, кроме, быть может, конечного множества точек, на отрезке $[0, 2\pi]$ к нулю, то этот ряд может быть только тождественно нулевым. Вскоре У. Юнг показал, что теорема Кантора остается в силе, если требовать сходимость ряда только вне счетного множества. Дальнейший поиск исключительных множеств, ненарушающих утверждение теоремы Кантора, породил в начале XX-го века обширные исследования, выделившиеся в итоге в отдельную ветвь теории ортогональных рядов под названием "теория единственности". Основным предметом этой теории стали *множества единственности* (U*-множества*) для различных ортогональных систем. Полученные Кантором и Юнгом множества единственности для тригонометрической системы имеют меру нуль. Для тригонометрической системы нетрудно показать, что любое измеримое множество E положительной меры уже не является множеством единственности, тем не менее существуют совершенные M*-множества* (множества, не являющиеся U-множествами) меры нуль[2]. Примеры континуальных U-множеств для тригонометрической системы появились в 20-е годы XX-го века, в частности, таковым является троичное множество Кантора[3,4]. Фундаментальным структурным результатом для множеств единственности является теорема Бари[3], утверждающая, что счетное объединение замкнутых U-множеств вновь является U-множеством. Изучение метрических, топологических и алгебраических свойств множеств единственности и M-множеств привело к неожиданным результатам, выявившим глубокую связь теории единственности для тригонометрических рядов с теорией чисел и математической логикой. Только

---

[1]Cantor G., *Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz*, Crelles für Math. **72** (1870), 130—138; also in *Gesammelte Abhandlungen*, Georg Olms, Hildesheim, 1962, 80—83.

[2]Menshov D., *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **163** (1916), 433—436.

[3]Bari N., *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, C. R. Acad. Sci. Paris, **177** (1923), 1195—1197; Fundam. Math., 9 (1927), 62—118.

[4]Rajchman A., *Sur l'unicité du développement trigonométrique*, Fundam. Math., **3** (1922), 287—301, *Rectification et addition á ma Note "Sur l'unicité du développement trigonométrique"*, Fundam. Math., **IV** (1923), 366—367.

для множеств определенной структуры удалось получить критерии принадлежности множества классу U-множеств или классу M-множеств; но в общем, даже в самом простом случае геометрической структуры множества вопрос о том будет ли оно U- или M-множеством решается только с привлечением алгебраической теории чисел. В целом, проблема единственности чрезвычайно трудна, и она не решена не только для произвольных множеств, но и даже для класса замкнутых множеств. Последовательное изложение основных результатов по теории единственности для тригонометрических рядов проведено в монографиях Н. К. Бари[5] и А. Зигмунда [6].

В 60-е годы начала активно разрабатываться теория единственности для рядов по другим ортогональным системам функций. Одной из таких систем является мультипликативная система функций, введенная Дж. Прайсом[7]. Основные свойства этой системы подробно изложены в монографиях Б. И. Голубова, А. В. Ефимова, В. А. Скворцова[8] и Г. Н. Агаева, Н. Я. Виленкина, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейна[9]. Интерес в изучении данных систем связан с возросшим использованием систем Уолша[10], являющихся частным случаем мультипликативных систем, в прикладных вопросах: в теории кодирования, в цифровой обработке сигналов, в распознавании образов. При этом мультипликативные системы функций имеют также важное теоретическое значение, являясь замечательной моделью системы характеров для компактной группы в обобщенном гармоническом анализе. Результаты в данном направлении развиваются под влиянием теории единственности для тригонометрических рядов, но некоторые вопросы, уже решенные для тригонометрической системы, все еще остаются открытыми для мультиплкативных систем функций. Как и для тригонометрической системы, принадлежность множества к классу U-множеств или к классу M-множеств для рядов по мультипликативным системам зависит не только от метрических, но и от алгебраических свойств

[5]Бари Н. К., *Тригонометрические ряды*, М.: Физ.-Мат. Лит., 1961.

[6]Зигмунд А., *Тригонометрические ряды*, М.: Мир, 1965, т. 1, 2.

[7]Price J. J., *Certain groups of orthogonal step functions*, Canad. J. Math., **9** (1957), №3, 413—425.

[8]Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А., *Ряды и преобразования Уолша*, М.: ЛКИ, 2-е издание, 2008.

[9]Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И., *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нульмерных группах*, Баку, 1981.

[10]Walsh J. L., *A closed set of normal orthogonal functions*, Amer J. Math., **45**, (1923) 5—24.

множеств[11,12].

Теоретический интерес представляет также изучение множеств единственности кратных ортогональных рядов для различных видов сходимости. Однако, переход к большим размерностям значительно усложнил решение задачи. Даже получение доказательства аналога теоремы Кантора для кратных тригонометрических рядов[13], сходящихся по прямоугольникам, заняло более 70-ти лет с момента появления первого ошибочного доказательства этого факта[14]. Открытым остается вопрос, является ли каждое множество положительной меры M-множеством для кратного тригонометрического ряда для любого вида сходимости. Аналог теоремы Кантора установлен также для сферической сходимости, но до сих пор открыт вопрос, является ли пустое множество множеством единственности для кратных тригонометрических рядов, сходящихся по кубам. Континуальные множества единственности были получены сначала для кратных рядов Уолша[15], а позднее и для кратных тригонометрических рядов, сходящихся по прямоугольникам[16]. Замечательным является метод Ш. Т. Тетунашвили сведения прямоугольной сходимости к повторной, который представляет собой достаточно универсальный способ получения многомерных множеств единственности для широкого класса кратных рядов, сходящихся по прямоугольникам.

Тригонометрические ряды Фурье являются главным объектом изучения классического гармонического анализа, который занимается различными сложными движениями, представимыми в виде суммы простейших гармонических колебаний. Его область применения в приложениях ограничивается изучением только периодических во времени процессов. При этом остаются неохваченными длительные непериодические процессы, такие, как непрерывный фон шумов, лучи све-

---

[11] Скворцов В. А., *Об одном примере U-множеств для системы Уолша*, Вестн. Моск. ун-та Матем. Мех., (1982), №5, 53—55.

[12] Скворцов В. А., *О h-мере M-множеств для системы Уолша*, Мат. заметки., **21** (1977) №3, 335—340

[13] Ash J.M., Freiling C., Rinne D., *Uniqueness of rectangularly convergent trigonometric series*, Ann. Math., **137** (1993), 145—166.

[14] Geiringer H., *Trigonometrische Doppelreihen*, Monat. für Math., X **28** (1918), 65—144.

[15] Лукомский С. Ф., *О некоторых классах множеств единственности кратных рядов Уолша*, Математ. сборник, **180** (1989), № 7, 937—945.

[16] Тетунашвили Ш. Т., *О некоторых кратных функциональных рядах и решение проблемы единственности кратных тригонометрических рядов для сходимости по Прингсхейму*, Математ. сборник, **182** (1991), № 8, 1158—1176.

та. Поэтому появляется необходимость расширения гармонического анализа и введения в рассмотрение континуальных аналогов тригонометрических рядов Фурье — интегралов Фурье, и континуальных аналогов рядов по мультипликативным системам — мультипликативных преобразований. При этом естественым образом возникает теория общих тригонометрических интегралов и мультипликативных преобразований, теория единственности, а также ее связь с результатами в теории единственности для соответствующих рядов [7, 17, 18, 19, 20].

Более общим вопросом теории единственности является проблема восстановления коэффициентов сходящегося вне некоторого множества ортогонального ряда по его сумме (соответствующие множества в литературе называются U^*-множествами или V-множествами). Первая теорема о восстановлении коэффициентов, теорема Дю Буа Реймона–Лебега, появилась в конце XIX-го века. В теореме на сумму ряда накладывается требование ее ограниченности. Последовавшие за ней обобщения сохраняли ограничение на сумму тригонометрического ряда. В 1912 году был построен первый интеграл второго порядка[21], обобщающий интеграл Лебега, относительно которого оказывался интегрируем любой сходящийся всюду тригонометрический ряд. Позднее рядом авторов были построены другие интегралы второго порядка, решающие поставленную задачу, опираясь на римановскую теорию тригонометрических рядов. Интеграл первого порядка[22], полностью решающий вопрос восстановления коэффициентов всюду сходящегося тригономерического ряда на основе результатов лебеговской теории тригонометрических рядов, был предложен только в 1989 году. Параллельно задача восстановления функции по ее тригономерическому интегралу решалась в теории общих тригонометрических интегралов. Одним из последних наиболее общих результатов является теорема Оффорда[19], позволяющая восстанавливать функцию по ее тригоно-

---

[17] Burkill J. C., *Uniqueness theorems for trigonometric series and integrals*, Proc. London Math. Soc., **(3) 1** (1951), 163—169.

[18] Henstock R., *Sets of uniqueness for trigonometric series and integrals*, Proc. Cambridge Phil. Soc., **46** (1950), 538—548.

[19] Offord A. C., *On the uniqueness of the representation of a function by a trigonometric integral*, Proc. London Math. Soc., **(2) 42** (1937), 422—480.

[20] Wolf F., *"Contributions to a theory of summability of trigonometric integrals"*, University of California Press, 1947.

[21] Denjoy A., *Une extension de l'intégrale de M. Lebesgue*, C. R. Acad. Sci. Paris, **154** (1912), 859—862.

[22] Preiss D., Thomson B. S., *The approximate symmetric integral*, Can. J. Math. **XLI** (1989), №3, 508—555.

метрическому интегралу с дополнительным условием локальной интегрируемости по Лебегу функции, задаваемой тригонометрическим интегралом. Открытым оставался вопрос о возможности отказаться от этого требования и восстановить функцию для каждого сходящегося всюду тригонометрического интеграла с помощью более общего, чем интеграл Лебега, интеграла.

Диссертация продолжает исследования в теории единственности представления функции рядом по ортогональным системам функций или интегралом по континуальному аналогу соответствующей ортогональной системы функций. Исследования в этом направлении активно ведутся и в настоящее время, как в нашей стране, так и за рубежом. Обзор результатов по теории единственности можно найти в работах Дж. Эша, Г. Ванга[23], М. И. Дьяченко[24] и У. Уэйда[25].

Цель работы. Показать возможность восстановления любой функции, для которой корректно определен ее тригонометрический интеграл, по этому интегралу. Установить связь между множествами единственности для рядов по мультипликативным системам и множествами единственности для мультипликативных преобразований. Получить новые множества единственности и U^*-множества для кратных ортогональных рядов по смешанным системам ограниченных функций, сходящихся по прямоугольникам, расширяя известные классы таких множеств.

Методы исследований. В работе использованы методы теории функций действительного переменного, теории ортогональных рядов, обобщенного гармонического анализа и функционального анализа, а также некоторые оригинальные идеи.

Научная новизна. Главные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

1. Развита лебеговская теория для общих тригонометрических интегралов. Доказано, что любую функцию, интегрируемую по Лебегу на каждом конечном отрезке, тригонометрический интеграл которой сходится всюду вне не более чем счетного множества к конечной функции f, можно восстановить по функции f почти

[23]Ash J. M., Wang G., *A survey of uniqueness questions in multiple trigonometric series*, Contemp. Math., **208** (1997), 35 – 71.

[24]Дьяченко М. И., *Некоторые проблемы теории кратных тригонометрических рядов*, УМН, **47**, вып. 5 (287), (1992), 97–162.

[25]Wade W. R., *Dyadic harmonic analysis,* Contemp. Math., **208** (1997), 313 – 350.

всюду. Доказано, что любой сходящийся всюду вне не более чем счетного множества тригонометрический интеграл можно интегрировать на почти всех отрезках прямой. Доказан ряд результатов из теории интегралов Фурье.

2. Показано, что теория единственности для мультипликативных преобразований и теория единственности для рядов по мультипликативным системам тесно связаны друг с другом. А именно, каждое множество единственности для мультипликативного преобразования задается счетным набором множеств единственности для рядов по соответствующей мультипликативной системе, а каждое множество единственности для ряда по мультипликативной системе является порцией на $[0, 1)$ некоторого множества единственности для соответствующего мультипликативного преобразования.

3. Расширены классы множеств единственности и U^*-множеств для кратных рядов по некоторым ортогональным системам, в частности, в качестве систем функций могут выступать тригонометрическая система и мультипликативная система функций.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер и является вкладом в теорию ортогональных рядов и в теорию соответствующих им континуальных аналогов. Полученные результаты могут найти применение в теории ортогональных рядов и обобщенном гармоническом анализе.

Апробация работы. Результаты настоящей диссертации неоднократно докладывались на научно-исследовательском семинаре по теории ортогональных и тригонометрических рядов под руководством д.ф.-м.н., профессора М. К. Потапова, д.ф.-м.н., профессора М. И. Дьяченко, д.ф.-м.н., профессора В. А. Скворцова и д.ф.-м.н., профессора Т. П. Лукашенко в 2006 — 2009 г., на семинарах по теории функций под руководством д.ф.-м.н., профессора В. А. Скворцова, д.ф.-м.н., профессора Т. П. Лукашенко и к.ф.-м.н. А. П. Солодова в 2005 — 2006 гг., а также на Воронежской зимней математической школе "Современные методы теории функций и смежные проблемы" в 2007 и 2009 гг., 13-й и 14-й Саратовских зимних школах "Современные проблемы теории функций и их приложения" в 2006 и 2008 гг., на 21-й и 23-й Международной конференции по теории действительных функций в г. Неджица, Польша, в 2007 и 2009 гг.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в 8 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 80 наименований. Общий объем диссертации составляет 95 страниц (из них 88 страниц — текст диссертации и 7 страниц — список литературы).

Краткое содержание диссертации

Во **введении** содержится обзор исследований по тематике настоящей диссертации.

В **первой главе** развита лебеговская теория для общих тригонометрических интегралов,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} d\chi(\lambda) = \lim_{\omega\to\infty} (L) \int_{-\omega}^{\omega} e^{i\lambda x} d\chi(\lambda), \tag{1}$$

где χ имеет ограниченную вариацию на каждом конечном интервале и удовлетворяет условию $\mathcal{N}_0$: $\lim\limits_{\lambda\to\pm\infty} \Big\{ \sup\limits_{0\leqslant h\leqslant 1} |\chi(\lambda+h) - \chi(\lambda)| \Big\} = 0$. Решается задача восстановления функции по ее тригонометрическому интегралу, тем самым обобщается

Теорема D (Оффорда). *Пусть функция c интегрируема по Лебегу на каждом конечном отрезке и интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} c(\lambda) d\lambda \tag{2}$$

сходится всюду к конечной интегрируемой по Лебегу на каждом конечном отрезке функции f.

Тогда

$$c(\lambda) = (C,1) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi\omega} \int_{0}^{\omega} \left(\int_{-t}^{t} f(x) e^{-i\lambda x}\, dx \right) dt$$

для почти всех λ.

В **первом параграфе** приводятся вспомогательные результаты из римановской и лебеговской теорий тригонометрических рядов.

Затем вводится понятие аппроксимативной симметрической базы интегрирования, относительно которой определяется интеграл хенстоковского типа — аппроксимативный симметрический интеграл Хенстока–Курцвейля.

Определение 1.2. Функция f, определенная всюду на прямой, называется *аппроксимативно симметрически интегрируемой по Хенстоку–Курцвейлю* (*ASH-интегрируемой*), если существует множество B полной меры и функция F на B такие, что для любого $\varepsilon > 0$ существует аппроксимативный симметрический элемент β, содержащий хотя бы по одному разбиению каждого отрезка с концами в B, такой, что для любого отмеченного подразбиения $\pi = \{([y_i, z_i], (y_i + z_i)/2)\} \subset \beta$ прямой, с $y_i, z_i \in B$, выполняется неравенство $\left|\sum_{\pi}\big(f((y_i+z_i)/2)(z_i-y_i)-(F(z_i)-F(y_i))\big)\right| < \varepsilon$. Для каждой пары точек $a, b \in B$ число $F(b) - F(a)$ будем называть *ASH-интегралом* функции f по отрезку $[a, b]$ и обозначать $(ASH)\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Функция F, определенная на множестве B, называется *неопределенным ASH-интегралом* функции f.

Это определение обобщает определение обычного интеграла Хенстока–Курцвейля на отрезке и прямой, а тем самым и определение интеграла Лебега.

Затем формулируются основные свойства введенного интеграла, необходимые в дальнейших доказательствах. А также излагается результат Прейсса и Томсона о восстановлении с помощью этого интеграла коэффициентов тригонометрических рядов, сходящихся всюду, кроме, быть может, не более чем счетного множества.

Второй параграф посвящен изложению римановской теории тригонометрических интегралов. Формулируются две теоремы равносходимости: теорема 1.Р и теорема 1.Т. Первая из них позволяет переносить результаты теории тригонометрических рядов на тригонометрические интегралы, а вторая теорема позволяет на каждом конечном отрезке переходить от рассмотрения произвольного тригонометрического интеграла (1) к более простому для изучения интегралу вида (2) с непрерывной подинтегральной функцией.

Основным результатом данного параграфа является теорема 1.3, уточняющая первую теорему равносходимости, а также вспомогательные лемма 1.4 и теорема 1.5, необходимые для ее доказательства.

Теорема 1.3. *Если функция* χ *постоянна в единичной окрестности нуля и удовлетворяет условию* $\mathcal{N}_0$, *то для любого интервала* J *длины, меньшей* 2π, *существует тригонометрический ряд* $\sum\limits_n c_n e^{inx}$, *с коэффициентами* $c_n = o(1/n)$, $n \to \infty$, *такой, что*

$$\int\limits_{-\omega}^{\omega} \frac{e^{i\lambda x}}{\lambda}\, d\chi(\lambda) - \sum_{|n|\leqslant\omega} c_n e^{inx} \rightrightarrows 0,\ x \in J,\ \omega \to \infty.$$

Третий параграф посвящен основным результатам первой главы. В нем развита лебеговская теория для тригонометрических интегралов, основным предметом которой является аналог функции Лебега

$$L(x) = \int\limits_{|\lambda|<1} \frac{e^{i\lambda x} - 1}{i\lambda}\, d\chi(\lambda) + \int\limits_{|\lambda|\geqslant 1} \frac{e^{i\lambda x}}{i\lambda}\, d\chi(\lambda),$$

получаемый однократным формальным интегрированием тригонометрического интеграла (1).

Введенная таким образом функция L в силу теорем равносходимости обладает свойствами, аналогичными свойствам функции Лебега для тригонометрических рядов. А именно, имеют место следующие утверждения.

Лемма 1.6. *Функция* $L(x)$ *определена для почти всех* x.

Теорема 1.7. *Функция* L *всюду аппроксимативно симметрически непрерывна и аппроксимативно непрерывна в каждой точке, где* L *конечна. Если интеграл* (1) *сходится в точке* x_0 *к числу* s, *то существует* $L'_{\mathrm{sap}}(x_0) = s$.

Затем установлены вспомогальные результаты, относящиеся к теории интеграла Фурье, которые ранее в теории интеграла Фурье были установлены при других предположениях.

Лемма 1.8. *Пусть функция* c *интегрируема по Лебегу на каждом конечном отрезке и* $\int\limits_0^\lambda c(t)\, dt$ *удовлетворяет свойству* $\mathcal{N}_0$, *тогда*

$$\lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} c(x+t) \frac{2\sin^2 \frac{\omega t}{2}}{\omega t^2}\, dt = c(x)$$

для почти всех x *(интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ *понимается как* $\lim\limits_{\omega\to\infty}(L)\int\limits_{-\omega}^{\omega}$*).*

Утверждение 1.9. *Пусть функция* c *интегрируема по Лебегу на каждом конечном отрезке. Если ее тригонометрический интеграл* (2) *сходится к конечной функции всюду вне некоторого не более чем счетного множества, то* $\lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{1}{\omega\pi}\int\limits_{0}^{\omega}\int\limits_{-\infty}^{\infty}c(\lambda+\mu)\,\frac{\sin\lambda t}{\lambda}\,d\lambda\,dt = c(\mu)$ *для почти всех* μ*, то есть сингулярные интегралы функции* c *сходятся в смысле* $(C,1)$ *к* $c(\mu)$ *почти всюду (интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{\infty}$ *понимается как* $\lim\limits_{\omega\to\infty}(L)\int\limits_{-\omega}^{\omega}$*).*

Отметим, что для доказательства этого утверждения были совместно привлечены римановская и лебеговская теории общих тригонометрических интегралов.

На основе этих утверждений доказывается основная теорема первой главы, обобщающая теорему Оффорда.

Теорема 1.10. *Пусть функция* c *интегрируема по Лебегу на каждом конечном отрезке и ее тригонометрический интеграл* (2) *всюду вне некоторого не более чем счетного множества* E *сходится к конечной функции* f. *Тогда функции* $f(x)$ *и* $f(x)e^{-i\mu x}$ *являются* ASH*-интегрируемыми и*

$$c(\mu) = (C,1)\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\mu x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi\omega}\int\limits_{0}^{\omega}\left(\int\limits_{-t}^{t} f(x)e^{-i\mu x}\,dx\right)dt \tag{3}$$

для почти всех μ*, где интеграл по переменной* x *понимается в смысле аппроксимативного симметрического интеграла Хенстока–Курцвейля, а интеграл по переменной* t *понимается в смысле интеграла Лебега.*

Во **второй главе** определяется мультипликативная система функций, приводятся основные свойства этой системы и устанавливается связь множеств единственности для рядов по мультипликативной системе и множеств единственности для мультипликативных преобразований.

В **первом параграфе** дается определение мультипликативных систем и их континуальных аналогов. Вводится понятие множеств единственности для рядов по мультипликативной системе и для мультипликативных преобразований.

Определения 2.1, 2.3. Множество $E \subset [0,1)$ называется *множеством единственности* (U_s*-множеством*) *для мультипликативной системы функций* $\{\chi_m\}_m$, если каждый ряд $\sum\limits_{m=0}^{\infty} a_m \chi_m(x)$, сходящийся к нулю вне этого множества, может быть только тождественно нулевым.

Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *множеством единственности* (U_i*-множеством*) *для мультипликативного преобразования, задаваемого функцией* $\chi(x,y)$, если из сходимости интеграла

$$\int\limits_0^{\infty} a(x)\chi(x,y)dx$$

к нулю вне множества E следует, что $a(x)=0$ почти всюду.

Приводятся необходимые в дальнейшем утверждения и доказываются аналоги теорем Бари для множеств единственности рядов по мультипликативной системе функций.

Второй параграф является основным. В нем доказывается теорема о связи множеств единственности.

Теорема 2.12. *Множество* $E \subset [0,\infty)$ *является множеством единственности для мультипликативного преобразования, задаваемого функцией* $\chi(x,y)$, *тогда и только тогда, когда множества* $E_k = \{\{y\}\colon y \in E \cap [k,k+1)\}$ *при каждом целом неотрицательном* k *являются множествами единственности для мультипликативной системы функций* $\{\chi_n^{(P')}\}_n$.

Далее доказывается ряд следствий.

Следствие 2.15 (аналог теоремы Бари). *Если* E_1, $E_2, \ldots$ *являются* U_i*-множествами и каждое* E_n *сосредоточено в некотором отрезке* I_n, *причем* $I_n \cap I_m = \varnothing$, *то* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ *также является* U_i*-множеством.*

Следствие 2.16. *Если множество* E *является* M_i*-множеством, то существвет отрезок* I *сколь угодно малой длины такой, что* $E \cap I$ *также является* M_i*-множеством.*

Следствие 2.17 (аналог теоремы Бари). *Если* E_1, $E_2, \ldots$ *являются замкнутыми* U_i*-множествами, то* $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ *также является* U_i*-множеством.*

Предметом **третьей главы** являются многомерные множества единственности и U^*-множества для кратных рядов по смешанным системам функций, сходящихся по прямоугольникам.

В **первом параграфе** устанавливается ряд вспомогательных лемм. Основными из них являются:

Лемма 3.2. *Пусть ряд*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_d=0}^{\infty} a_{n_1 n_2 \ldots n_d} \chi_{n_1}(x) \tag{4}$$

сходится по прямоугольникам в точках всюду плотного множества E *к конечной функции. Тогда существуют величины* $A > 0$ *и* $N > 0$ *такие, что для любого* n_1 *и любого набора* $(j_2, \ldots, j_d)$*, удовлетворяющего условию* $\min(j_2, \ldots, j_d) > N$*,*

$$\Big| \sum_{n_2=0}^{j_2} \ldots \sum_{n_d=0}^{j_d} a_{n_1 n_2 \ldots n_d} \Big| \leqslant A.$$

Замечание 3.3. Дополнение до произвольного множества единственности и U^*-множества для мультипликативной системы может выступать в качестве множества E в лемме 3.2.

Лемма 3.6. *Пусть ряд*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_d=-\infty}^{\infty} a_{n_1 n_2 \ldots n_d} e^{i n_1 x} \tag{5}$$

сходится по прямоугольникам в точках несчетного множества E *к конечной функции. Тогда существует номер* $N > 0$ *такой, что для любого фиксированного* n_1 *найдется величина* $A > 0$ *со свойством:*

$$\Big| \sum_{n_2=-j_2}^{j_2} \ldots \sum_{n_d=-j_d}^{j_d} a_{n_1 n_2 \ldots n_d} \Big| \leqslant A$$

для любого набора $(j_2, \ldots, j_d)$, *удовлетворяющего условию* $\min(j_2, \ldots, j_d) > N$.

Замечание 3.7. Дополнение до произвольного множества единственности или U^*-множества для тригонометрической системы является несчетным множеством и может выступать в качестве множества E в лемме 3.7.

Второй параграф является основным в третьей главе. В нем описаны новые классы многомерных U- и U^*-множеств для функциональных рядов, сходящихся по прямоугольникам.

Пусть $\{g_n^{(k)}\}_n$ является системой ортогональных функций на отрезке $[0,1]$ для каждого $k = 1, \ldots, d$. Для единообразия будем считать, что индекс n пробегает все целочисленные значения. Для систем функций, нумеруемых только неотрицательными целыми числами, будем предполагать, что все функции с отрицательными значениями индекса тождественно равны нулю и суммирование в рядах по соответствующим системам ведется по неотрицательным индексам.

Множество $E \subset [0,1]^d$ называется *множеством единственности* (U-*множеством*) для системы функций $\{g_{n_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot g_{n_d}^{(d)}\}_{n_1,\ldots,n_d}$, если из сходимости по прямоугольникам вне множества E произвольного ряда $\sum\limits_{n_1,\ldots,n_d=-\infty}^{\infty} a_{n_1\ldots n_d} g_{n_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot g_{n_d}^{(d)}$ к нулю следует, что все его коэффициенты нулевые.

Множество $E \subset [0,1]^d$ называется U^*-*множеством* для системы функций $\{g_{n_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot g_{n_d}^{(d)}\}_{n_1,\ldots,n_d}$, если из сходимости по прямоугольникам вне множества E произвольного ряда $\sum\limits_{n_1,\ldots,n_d=-\infty}^{\infty} a_{n_1\ldots n_d} g_{n_1}^{(1)} \cdot \ldots \cdot g_{n_d}^{(d)}$ к конечной интегрируемой по Лебегу функции f следует, что данный ряд является рядом Фурье функции f.

Пусть $\{h_n\}_n$ — система ограниченных ортогональных функций на $[0,1]$, для которой в классах U- и U^*-множеств существуют множества E, удовлетворяющие следующему свойству.

Свойство BS. *Пусть ряд*

$$\sum_{n_1,\ldots,n_d=-\infty}^{\infty} a_{n_1 n_2 \ldots n_d} h_{n_1}(x) \tag{6}$$

сходится по прямоугольникам вне множества E *к конечной функции. Тогда для любого фиксированонного* n_1 *существуют номер* $N > 0$

и величина $A > 0$ *со свойством:*

$$\Big| \sum_{n_2=-j_2}^{j_2} \dots \sum_{n_d=-j_d}^{j_d} a_{n_1 n_2 \dots n_d} \Big| \leqslant A$$

для любого набора $(j_2, \dots, j_d)$*, удовлетворяющего условию* $\min(j_2, \dots, j_d) > N$.

Подклассы указанных U-, U^*-множеств будем обозначать U_{BS}, U^*_{BS}, соответственно.

Согласно леммам 3.2 и 3.6, в качестве $\{h_n\}_n$ могут выступать мультипликативная система функций или тригонометрическая система. При этом в качестве E можно брать произвольное U-множество или U^*-множество для соответствующей системы функций, то есть в обоих случаях $U_{\mathrm{BS}} = U$, $U^*_{\mathrm{BS}} = U^*$.

Теорема 3.8. *Пусть ряд* $\sum\limits_{n_1,\dots,n_d=-\infty}^{\infty} a_{n_1\dots n_d} h_{n_1}(x)$ *сходится по прямоугольникам к конечной функции* $f(x)$ *при* $x \notin V$ *(к нулю при* $x \notin U$*), где* V *является* U^*_{BS}*-множеством для системы* $\{h_n\}_n$ *(*U *является* U_{BS}*-множеством для системы* $\{h_n\}_n$*), тогда*

1) *ряды* $\sum\limits_{n_2,\dots,n_d=-\infty}^{\infty} a_{n_1 n_2 \dots n_d}$ *сходятся по прямоугольникам при всех* n_1;

2) *ряд* $\sum\limits_{n_1=-\infty}^{\infty} \Big(\sum\limits_{n_2,\dots,n_d=-\infty}^{\infty} a_{n_1 n_2 \dots n_d} \Big) h_{n_1}(x)$ *сходится к* $f(x)$ *при* $x \notin V$ *и*

$$\sum_{n_2,\dots,n_d=-\infty}^{\infty} a_{n_1 n_2 \dots n_d} = \int_0^1 f(x) \overline{h_{n_1}(x)}\, dx \;\Big(\sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{n_2,\dots,n_d=-\infty}^{\infty} a_{n_1 n_2 \dots n_d} \Big) h_{n_1}(x)$$

сходится к нулю при $x \notin U$ *и* $\sum\limits_{n_2,\dots,n_d=-\infty}^{\infty} a_{n_1 n_2 \dots n_d} = 0 \Big)$.

Пусть для каждого $k = 2, \dots, d$ система $\{g_n^{(k)}\}_n$ является системой ограниченных ортогональных функций на $[0,1]$ и пусть система функций $\{g_{n_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot g_{n_d}^{(d)}\}_{n_2,\dots,n_d}$ имеет непустой класс $(d-1)$-мерных множеств единственности. Мы построим класс множеств единственности $\mathcal{U}_d$, в котором каждое множество E задается набором множеств $\{U, \{U_{(x_2,\dots,x_d)}\}_{(x_2,\dots,x_d)\notin U}\}$, где U — $(d-1)$-мерное множество единственности для системы $\{g_{n_2}^{(2)} \cdot \ldots \cdot g_{n_d}^{(d)}\}_{n_2,\dots,n_d}$ в случае сходимости по прямоугольникам, а $\{U_{(x_2,\dots,x_d)}\}_{(x_2,\dots,x_d)\notin U}$ — одномерные U_{BS}-множества для функций $\{h_n\}_n$. Если обозначить $P =$

$\bigl\{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in [0,1]^d : (x_2, \dots, x_d) \in U, x_1 \in [0,1]\bigr\}$, и $R = \bigl\{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in [0,1]^d : \ (x_2, \dots, x_d) \notin U, x_1 \in U_{(x_2,\dots,x_d)}\bigr\}$, то $E = P \cup R$.

Теорема 3.9. *Каждое множество из класса $\mathcal{U}_d$ является U-множеством для системы функций $\{h_{n_1} g^{(2)}_{n_2} \cdot \ldots \cdot g^{(d)}_{n_d}\}_{n_1,\dots,n_d}$.*

Пусть теперь для каждого $k = 2, \dots, d$ система $\{v^{(k)}_n\}_n$ является системой ограниченных ортогональных функций на $[0,1]$ и пусть система функций $\{v^{(2)}_{n_2} \cdot \ldots \cdot v^{(d)}_{n_d}\}_{n_2,\dots,n_d}$ имеет непустой класс $(d-1)$-мерных U^*-множеств. Мы построим класс U^*-множеств $\mathcal{U}^*_d$, в котором каждое множество E задается набором множеств $\{V, \{V_{(x_2,\dots,x_d)}\}_{(x_2,\dots,x_d)\notin V}\}$, где V — $(d-1)$-мерное U^*-множество для системы $\{v^{(2)}_{n_2} \cdot \ldots \cdot v^{(d)}_{n_d}\}_{n_2,\dots,n_d}$, в случае сходимости по прямоугольникам, $\{V_{(x_2,\dots,x_d)}\}_{(x_2,\dots,x_d)\notin V}$ — одномерные U^*_{BS}-множества для функций $\{h_n\}_n$. Если обозначить $P = \bigl\{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in [0,1]^d : (x_2, \dots, x_d) \in V, x_1 \in [0,1]\bigr\}$ и $R = \bigl\{(x_1, x_2, \dots, x_d) \in [0,1]^d : (x_2, \dots, x_d) \notin V, x_1 \in V_{(x_2,\dots,x_d)}\bigr\}$, то $E = P \cup R$.

Теорема 3.10. *Пусть $E \in \mathcal{U}^*_d$ и ряд*

$$\sum_{n_1,\dots,n_d=-\infty}^{\infty} a_{n_1 n_2 \dots n_d} h_{n_1}(x_1) \cdot v^{(2)}_{n_2}(x_2) \cdot \ldots \cdot v^{(d)}_{n_d}(x_d) \qquad (7)$$

сходится по прямоугольникам всюду вне множества E к конечной интегрируемой по Лебегу на $[0,1]^d$ функции f, то данный ряд является рядом Фурье функции f, то есть

$$a_{n_1 n_2 \dots n_d} = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_d) \overline{h_{n_1}(x_1)} \cdot \overline{v^{(2)}_{n_2}(x_2)} \cdot \ldots \cdot \overline{v^{(d)}_{n_d}(x_d)}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_d.$$

Автор сердечно благодарна научному руководителю доктору физико-математических наук, профессору В. А. Скворцову за постановку задач и их плодотворные обсуждения, профессору Т. П. Лукашенко и участникам семинара по теории функций за советы в затрагиваемых диссертацией темах.

Работы автора по теме диссертации

1. *Жеребьева Т.А.* Об одном классе множеств единственности для кратных рядов Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2009. № 2, С. 14—21.

2. *Жеребьева Т.А.* Об одном классе множеств единственности для двойных рядов по системе Уолша // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 2007. №5. С. 13 — 18.

3. *Sworowska T.A.* On recovery of a function from its trigonometric integral //23rd International Conference on Real Functions Theory: Abstracts — Niedzica. 2009. P. 67 — 68.

4. *Жеребьева Т.А.* О восстановлении функции по ее тригонометрическому интегралу // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции — Воронеж: Воронежский государственный университет. 2009. С. 68 — 69.

5. *Жеребьева Т.А.* Связь множеств единственности для систем мультипликативных функций и множеств единственности для мультипликативных преобразований // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 14-й Саратовской зимней школы — Саратов: Изд-во Саратовского университета. 2008. С. 72 — 73.

6. *Zherebyova T.A.* Sets of uniqueness for double trigonometric series //21st International Conference on Real Functions Theory: Abstracts — Niedzica. 2007. P. 63 — 64.

7. *Жеребьева Т.А.* Теорема единственности для двойных рядов по мультипликативной системе функций // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конференции — Воронеж: Воронежский государственный университет. 2007. С. 79 — 80.

8. *Жеребьева Т.А.* Прямоугольная и повторная сходимость двойных рядов Уолша // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тезисы докладов 13-й Саратовской зимней школы — Саратов: ООО Изд-во "Научная книга" 2006. С. 69 — 70.