Московский Государственный Университет
им. М.В.Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 519.214.4

СЮЛЮКИН Александр Викторович

Неравномерные и квазинеравномерные оценки для асимптотических разложений в ЦПТ

01.01.05 - теория вероятностей
и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2009

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета в Московском Государственном Университете имени М.В.Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук **Сенатов Владимир Васильевич.**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Круглов Виктор Макарович,** доктор физико-математических наук, профессор **Хохлов Юрий Степанович.**
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское Отделение математического института им. В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 11 декабря 2009 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском Государственном Университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, Главное Здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 10 ноября 2009 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И.Н.Сергеев

1 Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Асимптотические разложения в центральной предельной теореме впервые появились в работе П. Л. Чебышева "О двух теоремах относительно вероятностей" 1887 года[1]. В этой работе им был выписан следующий формальный ряд (этот ряд был выписан для вероятностей, нам же будет удобнее использовать плотности вероятностей)

$$p_n(x) = \phi(x) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\Gamma_l(x, P)\phi(x)}{n^{\frac{l}{2}}}. \tag{1.1}$$

Здесь $p_n(x)$ – плотность (если она существует) распределения нормированной суммы $(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)n^{-\frac{1}{2}}$ независимых случайных величин $X_j, j \in \overline{1, n}$, с нулевым средним, единичной дисперсией и общим распределением P, $\phi(x)$ – плотность стандартного нормального закона, $\Gamma_l(x, P)$ – некоторые многочлены степени $3l$, зависящие от первых $l + 2$ моментов распределения P и не зависящие от n.

Позже Шарлье, по видимому не зная об упомянутой работе П. Л. Чебышева, использовал возможность разложения произвольной функции в формальный ряд по ортогональным с весом $\phi(x)$ многочленам, которые сейчас называют многочленами Чебышева-Эрмита, чтобы приближать такими рядами неизвестную плотность распределения[2]. Для $p_n(x)$ этот ряд имеет вид

$$p_n(x) = \phi(x) + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\theta_l(P_n)}{l!} H_l(x)\phi(x). \tag{1.2}$$

Здесь $H_l(x) = (-1)^l \frac{\phi^{(l)}(x)}{\phi(x)}, l = 0, 1, \ldots$ – многочлены Чебышева-Эрмита,

$$\theta_l(P_n) = \int_{-\infty}^{\infty} H_l(x) p_n(x) dx$$

– моменты Чебышева-Эрмита плотности $p_n(x)$, P_n обозначает распределение, соответствующее плотности $p_n(x)$.

Ф. Эджворт также изучал асимптотические разложения в ЦПТ[3] и, вслед за П. Л. Чебышевым, вновь получил ряд (1.1). Все перечисленные исследователи ограничивались поиском формальных разложений, и только в 1920-х Г. Крамер получил первый строгий результат об оценках скорости сходимости

[1] *Чебышев П. Л.* Избранные труды, М., Изд. АН СССР, 1955.

[2] *Кендалл М., Стюарт А.* Теория распределений, М., Наука, 1966.

[3] *Edgeworth F. Y.* The law of error. — Proc. Camb. Philos. Soc., 1905, 20, P. 36-65.

остаточных частей разложений для функций распределения в терминах o-символики[4]. Начиная с 50-х в след за Г. Крамером асимптотические разложения активно изучались другими исследователями. Упомянем Г. Бергстрема, который, получил ряд (1.1), используя следующее асимптотическое разложение

$$p_n(x) = \sum_{l=0}^{n} C_n^l \phi_{1-\frac{l}{n}}(x) * \big(p_1(x) - \phi_{\frac{1}{n}}(x)\big)^{*(l)},$$

называемое теперь разложением Берстрема[5]. Здесь $*$ – операция свертки плотностей распределений, $\phi_{1-\frac{l}{n}}(x)$ – плотность нормального распределения с нулевым средним и дисперсией $1-\frac{l}{n}$, $p_1(x) = p(\sqrt{n}x)$, где $p(x)$ – некоторая плотность распределения с нулевым средним и единичной дисперсией. Отметим отдельно известную работу Л. В. Осипова[6], в которой он выписал оценку скорости сходимости асимптотического разложения в ЦПТ.

Исследователи периода 50-х – 70-х годов получили важные результаты, обладавшие, однако, одним существенным недостатком: оценки остаточных частей разложений давались в формах, не позволяющих получать явные оценки погрешностей. Первая явная оценка для остаточных частей асимптотических разложений, известная автору, получена Р. Шимицу[7] в 1974 году. Долгое время после этого никаких обобщений работы Шимицу не было. Лишь в последние годы появились явные оценки остаточных частей асимптотических разложений. Упомянем работы В. Добрича и Б. К. Гоша[8], А. Е. Кондратенко и В. В. Сенатова[9].

Основные результаты по исследованию явных оценок асимптотических разложений в ЦПТ были получены В. В. Сенатовым. В. В. Сенатов предложил для аппроксимации плотности $p_n(x)$ использовать следующее разложение

$$p_n(x) = \phi(x) + \sum_{l=3}^{m+1} \frac{\theta_l(P_n)}{l!} H_l(x)\phi(x) + \sum_{\substack{l=m+2 \\ l\neq 3m-4}}^{3m-3} \frac{\theta_l^{(m)}(P_n)}{l!} H_l(x)\phi(x) + R_m, \quad (1.3)$$

где $\theta_l^{(m)}(P_n)$ – квазимоменты распределения P_n, которые зависят от моментов

[4] *Крамер Г.* Математические методы статистики, М., Мир, 1975.

[5] *Bergsrom H.* On asymptotic expansions of probability functions. — Skandinw. actuarietidskrift, 1951, H. 1-2, P. 1-34.

[6] *Осипов Л. В.* Об асимптотических разложениях функции распределения сумм случайных величин с неравномерными оценками остаточного члена. — Вестник Ленинград. Унив., 1972, №1, С. 51-59.

[7] *Shimizu R.* On the remained term for the central limit theorem. — Springer Netherlands, 1974, V. 26, №1, P. 195-201.

[8] *Dobric V., Ghosh B. K.* Some analogs of the Berry–Esseen bound for first-order Chebyshev–Edgeworth expansions. — Statist. Decisions, 1996, V. 14, №4, P. 383-404.

[9] *Кондратенко А. Е., Сенатов В. В.* Об оценке точности асимптотических разложений в ЦПТ. — Доклады РАН, 2001, Т. 378, №6, С. 748-750.

распределения P порядка не выше m-го и вычисляются по формулам

$$\frac{\theta_l^{(m)}(P_n)}{l!} = \sum_{\substack{k_0+k_3+\dots+k_m=n,\\ 3k_3+\dots+mk_m=l}} \frac{n!}{k_0!k_3!\dots k_m!}\left(\frac{\theta_3}{3!n^{\frac{3}{2}}}\right)^{k_3}\dots\left(\frac{\theta_m}{m!n^{\frac{m}{2}}}\right)^{k_m},$$

$$\theta_j = \int_{-\infty}^{\infty} H_j(x)P(dx), j = 3, 4, \dots,$$

где $k_0, k_3, \dots, k_m$ – произвольный набор неотрицательных целых чисел, лишь бы выполнялись равенства $k_0+k_3+\dots+k_m = n$, $3k_3+\dots+mk_m = l$, R_m – остаточная часть разложения, которая при некоторых условиях на распределение P есть $O\left(\frac{1}{n^{\frac{m}{2}}}\right)$, другие обозначения определены выше. Им были получены явные равномерные оценки остаточных частей разложения (1.3) и остаточных частей некоторых модификаций этого разложения[10], однако эти оценки являются довольно громоздкими, некоторые из них содержат десятки слагаемых. Поэтому задача поиска разложений с простыми оценками остаточных частей является достаточно актуальной. Кроме того известные асимптотические разложения для $p_n(x)$ с явными оценками остаточных частей обладают недостатком, который состоит в том, что эти оценки являются равномерными по x, то есть в них не учитывается, что точность аппроксимации, которую гарантируют асимптотические разложения, должна увеличиваться при $|x| \to \infty$. Задача поиска явных неравномерных оценок, или, хотя бы, оценок у которых некоторые их части неравномерны по x, а другие части быстрее убывают при $n \to \infty$ также актуальна.

Цель работы.

Целью диссертации является развитие методов, позволяющих получать асимптотические разложения в центральной предельной теореме и явные оценки их остаточных частей. Основное внимание в диссертации уделено явным неравномерным и квазинеравномерным оценкам остаточных частей разложений.

Научная новизна.

Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- Получены асимптотические разложения в ЦПТ, названные разложениями Бергстрема-Чебышева. Для разложений Бергстрема-Чебышева для плотностей на $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ и для распределений на $\mathbb{R}$ выписаны явные равномерные оценки остаточных частей.

[10] *Сенатов В. В.* Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения, М., Либроком, 2009.

- Для разложений Бергстрема-Чебышева для плотностей и для функций распределения на $\mathbb{R}$ получено несколько квазинеравномерных оценок остаточных частей. Для короткого разложения Бергстрема-Чебышева для плотностей получена явная неравномерная оценка остаточной части разложения.

- Показано, что разложения Бергстрема-Чебышева являются предпочтительными перед разложениями Эджворта-Крамера и Грама-Шарлье в смысле получения "хороших" оценок остаточных частей.

Методы исследования.

В диссертации используются методы математического анализа и теории вероятностей. В частности, для построения асимптотических разложений применяется формула Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, используется разложение Бергстрема для сверток распределений. При получении неравномерных оценок остаточных частей разложений применяется метод характеристических функций. Также используются новые технические приемы, изложенные в диссертации.

Теоретическая и практическая значимость.

Результаты диссертации являются теоретическими. Полученные результаты могут быть использованы в задачах оценки точности аппроксимации распределений асимптотическими разложениями. Разработанные методы могут быть полезны специалистам МГУ им. М.В.Ломоносова, Санкт-Петербургского государственного университета, Математического института им. В.А. Стеклова и Института математики им. С.Л.Соболева СО РАН.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на Большом семинаре кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ под руководством члена-корр. РАН А. Н. Ширяева в 2008 году, на семинаре кафедры статистики ВМК МГУ (руководитель–академик Ю. В. Прохоров) в 2008 году, а также на семинаре "Прикладные аспекты теории вероятностей и математической статистики" кафедры теории вероятностей и математической статистики факультета физико-математических и естественных наук РУДН (руководитель–профессор Ю. С. Хохлов) в 2009 году.

Публикации.

По теме диссертации опубликовано 3 печатные работы из официального перечня ВАК, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, содержащего 33 наименования. Общий объем работы составляет 69 страниц.

2 Краткое содержание диссертации

Диссертация посвящена оценкам остаточных частей асимптотических разложений в ЦПТ. Изложение ведется в терминах плотностей распределений (о том, как переходить от разложений для плотностей к разложениям для функций распределения говорится в разделе 3.2 диссертации).

Пусть $X_1, X_2, \dots$ – независимые случайные величины с нулевым средним, единичной дисперсией и общим распределением P. Пусть $p(x)$ – плотность (если она существует) случайной величины X_1 , $p_n(x)$ – плотность (если существует) распределения нормированной суммы $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)n^{-\frac{1}{2}}$.

В первом параграфе первой главы диссертации дается определение асимптотического разложения в ЦПТ, названного разложением Бергстрема-Чебышева. Приведен формальный вывод этого разложения.

Обозначим $P(x)$ – функцию распределения, соответствующую вероятностной мере P, $\Phi(x)$ – функцию распределения стандартного нормального закона, $\phi_D(x)$ – плотность нормального закона с нулевым средним и дисперсией D,

$$\Delta_j = \int_{-\infty}^{\infty} x^j d(P - \Phi)(x), j \in \mathbb{Z}_+.$$

Пусть у распределения P конечен момент порядка $m+2, m \in \mathbb{N}$, пусть для $n > m$ существует плотность $p_n(x)$. Правая часть формального равенства

$$p_n(x) = \phi(x) + \\ + \sum_{l=1}^{m} C_n^l \sum_{k=0}^{m-l} \frac{(-1)^{3l+k}\phi^{(3l+k)}_{1-\frac{l}{n}}(x)}{n^{\frac{3l+k}{2}}} \sum_{\substack{i_1, i_2, \dots, i_l \geq 3 \\ i_1+i_2+\dots+i_l=3l+k}} \frac{\Delta_{i_1}\Delta_{i_2}\dots\Delta_{i_l}}{i_1! i_2! \dots i_l!} + o\left(n^{-\frac{m}{2}}\right)$$

названа разложением Бергстрема-Чебышева плотности $p_n(x)$.

В разделах 1.2, 1.3 доказываются два утверждения о формулах для остаточных частей разложения Бергстрема-Чебышева. В разделе 1.2 доказывается следующая лемма.

Лемма 1.2. Пусть у распределения P с плотностью $p(x)$ шестой момент конечен, среднее равно нулю, а дисперсия единице. Обозначим $Q(x) = P(x) -$

$\Phi(x)$, тогда для $n \geq 4$ верно равенство

$$p_n(x) = \phi(x) - \frac{\Delta_3}{3!\sqrt{n}}\phi^{(3)}_{1-\frac{1}{n}}(x) + \frac{\Delta_4}{4!n}\phi^{(4)}_{1-\frac{1}{n}}(x) - \frac{\Delta_5}{5!n^{\frac{3}{2}}}\phi^{(5)}_{1-\frac{1}{n}}(x)$$
$$+ C_n^2\frac{\Delta_3^2}{(3!)^2n^3}\phi^{(6)}_{1-\frac{2}{n}}(x) - 2C_n^2\frac{\Delta_3\Delta_4}{3!4!n^{\frac{7}{2}}}\phi^{(7)}_{1-\frac{2}{n}}(x) - C_n^3\frac{\Delta_3^3}{(3!)^3n^{\frac{9}{2}}}\phi^{(9)}_{1-\frac{3}{n}}(x) + R_4,$$

где

$$R_4 = \tfrac{1}{n^2}\int\limits_{[0,1]\times\mathbb{R}} \tfrac{(1-\beta)^5}{5!}\phi^{(6)}_{1-\frac{1}{n}}\left(x - \tfrac{\beta z}{\sqrt{n}}\right) z^6 d\beta dQ(z) +$$
$$+ \tfrac{2C_n^2\Delta_3}{3!n^4}\int\limits_{[0,1]\times\mathbb{R}} \tfrac{(1-\beta)^4}{4!}\phi^{(8)}_{1-\frac{2}{n}}\left(x - \tfrac{\beta z}{\sqrt{n}}\right) z^5 d\beta dQ(z) +$$
$$+ \tfrac{C_n^2}{n^4}\int\limits_{[0,1]^2\times\mathbb{R}^2} \tfrac{(1-\beta_1)^3}{3!}\tfrac{(1-\beta_2)^3}{3!}\phi^{(8)}_{1-\frac{2}{n}}\left(x - \tfrac{\beta_1 z_1+\beta_2 z_2}{\sqrt{n}}\right) {z_1}^4{z_2}^4 d\beta_1 d\beta_2 dQ(z_1)dQ(z_2) +$$
$$+ \tfrac{C_n^3\Delta_3^2}{(3!)^2n^5}\int\limits_{[0,1]\times\mathbb{R}} \tfrac{(1-\beta)^3}{3!}\phi^{(10)}_{1-\frac{3}{n}}\left(x - \tfrac{\beta z}{\sqrt{n}}\right) z^4 d\beta dQ(z) +$$
$$+ \tfrac{C_n^3\Delta_3}{3!n^5}\int\limits_{[0,1]^2\times\mathbb{R}^2} \tfrac{(1-\alpha)^2}{2!}\tfrac{(1-\beta)^3}{3!}\phi^{(10)}_{1-\frac{3}{n}}\left(x - \tfrac{\alpha y+\beta z}{\sqrt{n}}\right) y^3z^4 d\alpha d\beta dQ(y)dQ(z) +$$
$$+ \tfrac{C_n^3}{n^5}\int\limits_{[0,1]^3\times\mathbb{R}^3} \tfrac{(1-\alpha_1)^2}{2!}\tfrac{(1-\alpha_2)^2}{2!}\tfrac{(1-\beta)^3}{3!}\phi^{(10)}_{1-\frac{3}{n}}\left(x - \tfrac{\alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2+\beta z}{\sqrt{n}}\right) \times$$
$$\times {y_1}^3{y_2}^3z^4 d\alpha_1 d\alpha_2 d\beta dQ(y_1)dQ(y_2)dQ(z) + R_4^B$$

и

$$R_4^B = \sum_{j=0}^{n-4} C_{n-j-1}^3\phi^{*(n-j-4)}_{\frac{1}{n}}(x) * p_1^{*j}(x) * \left(p_1 - \phi_{\frac{1}{n}}\right)^{*4}(x).$$

В разделе 1.3 доказывается обобщение леммы 1.2 в случае, когда у распределения P конечен момент порядка $m, m \geq 4$. Справедлива теорема.

Теорема 1.1. Пусть у распределения P с плотностью $p(x)$ момент порядка $m+3, m \in \mathbb{N}$, конечен, среднее равно нулю, а дисперсия единице. Обозначим $Q(x) = P(x) - \Phi(x)$, тогда для $n \geq m+1$ верно равенство

$$p_n(x) = \phi(x) +$$
$$+ \sum_{l=1}^{m} C_n^l \sum_{k=0}^{m-l} \frac{(-1)^{3l+k}\phi^{(3l+k)}_{1-\frac{l}{n}}(x)}{n^{\frac{3l+k}{2}}} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_l\geq 3\\ i_1+i_2+\ldots+i_l=3l+k}} \frac{\Delta_{i_1}\Delta_{i_l}\ldots\Delta_{i_1}}{i_1!i_2!\ldots i_l!} + R_{m+1},$$

где

$$R_{m+1} = \sum_{l=1}^{m} C_n^l \frac{(-1)^{2l+m+1}}{n^{\frac{2l+m+1}{2}}} \times$$

$$\times \sum_{\substack{m_0+m_1+\ldots+m_t=l,\\ 3m_0+4m_1+\ldots+(3+t)m_t=2m+l+1}} C_{m_0+\ldots+m_t}^{m_1+\ldots+m_t} \left(\frac{\Delta_3}{3!}\right)^{m_0} \times C_{m_1+\ldots+m_t}^{m_2+\ldots+m_t} \left(\frac{\Delta_4}{4!}\right)^{m_1} \times \ldots$$

$$\times C_{m_{t-2}+\ldots+m_t}^{m_{t-1}+m_t} \left(\frac{\Delta_{3+(t-2)}}{(3+(t-2))!}\right)^{m_{t-2}} \times \sum_{i=0}^{m_{t-1}} C_{m_{t-1}+m_t-i-1}^{m_t-1} \left(\frac{\Delta_{3+(t-1)}}{(3+(t-1))!}\right)^{m_{t-1}-i} \times$$

$$\times \int\limits_{\substack{(y_1,\ldots,y_i,z_1,\ldots,z_{m_t})\in\mathbb{R}^{i+m_t}\\ (\alpha_1,\ldots,\alpha_i,\beta_1,\ldots,\beta_{m_t})\in[0,1]^{\times(i+m_t)}}} \phi_{1-\frac{l}{n}}^{(2l+m+1)} \left(x - \tfrac{1}{\sqrt{n}} \left\{ \textstyle\sum_{u=1}^{i} \alpha_u y_u + \sum_{v=1}^{m_t} \beta_v z_v \right\}\right) \times$$

$$\times \prod_{u=1}^{i} \frac{(1-\alpha_u)^{3+(t-1)-1}}{(3+(t-1)-1)!} y_u^{3+(t-1)} d\alpha_u dQ(y_u) \prod_{v=1}^{m_t} \frac{(1-\beta_v)^{3+t-1}}{(3+t-1)!} z_v^{3+t} d\beta_v dQ(z_v) + R_B^{m+1},$$

где $m_0, m_1, \ldots, m_{t-1} \in \mathbb{Z}_+, m_t \in \mathbb{N}$, а величина R_B^{m+1} определяется из равенства

$$R_{m+1}^B = \sum_{j=0}^{n-m-1} C_{n-j-1}^m \phi_{\frac{1}{n}}^{*(n-m-j-1)}(x) * p_1^{*j}(x) * \left(p_1 - \phi_{\frac{1}{n}}\right)^{*(m+1)}(x).$$

В первой главе в разделе 1.4 приводятся и доказываются равномерные оценки остаточных частей разложения Бергстрема-Чебышева.

Пусть характеристическая функция $f(t)$ распределения P такова, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^\nu dt < \infty, \tag{2.1}$$

для некоторого $\nu > 0$. Пусть функция $\mu(t), e^{\frac{-t^2}{2}} \leq \mu(t) \leq 1$, и число $T > 0$ таковы, что

$$\mu(t) \geq |f(t)| \text{ для всех } |t| \leq T. \tag{2.2}$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
|\Delta|_j &= \int_{-\infty}^{\infty} |x|^j |d(P-\Phi)(x)|, j \in \mathbb{Z}_+,\\
B_k^j &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |t|^j e^{-\frac{t^2 k}{2n}} dt, \text{ где } j \in \mathbb{Z}_+, k, n \in \mathbb{N},\\
B_{n-m}^{j,\mu,T} &= \frac{1}{2\pi}\int_{-T\sqrt{n}}^{-T\sqrt{n}} |t|^j \mu^{n-m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \text{ где } j, m \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}, n > m,\\
\alpha(T) &= \max_{t \geq T} \max\Big(|f(t)|, e^{-\frac{t^2}{2}}\Big).
\end{aligned}
$$

Замечание 1. Отметим, что справедливо неравенство $B_k^j \geq \max_{x\in\mathbb{R}} |\phi^{(j)}_{\frac{k}{n}}(x)|$. Если выполнено условие (2.1), то $\alpha(T) < 1$ для любого $T > 0$ и существует непрерывная плотность $p_n(x)$ при всех $n \geq \nu$. Для распределения P с нулевым средним, единичной дисперсией и конечным четвертым моментом пару μ, T всегда можно подобрать так[11], что $B_{n-m}^{j,\mu,T} \to B_n^j$ при $n \to \infty$ для любых фиксированных m и j. Также отметим, что величина $|\Delta|_j$ – это расстояние полной вариации с весом $|x|^j$, а числа $B_k^j, B_{n-m}^{j,\mu,T}$ зависят и от n, но, для краткости мы эту зависимость указывать не будем.

Доказывается следующая теорема.

Теорема 1.5. Пусть момент порядка $m+3$, $m \in \mathbb{N}$, распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией конечен и выполнены условия (2.1), (2.2). Тогда для $n > \nu + m + 1$ существует плотность $p_n(x)$ распределения $P^{*n}(\sqrt{n}A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, такая, что

$$
\begin{aligned}
p_n(x) = \phi(x) + \\
+ \sum_{l=1}^{m} C_n^l \sum_{k=0}^{m-l} \frac{(-1)^{3l+k}\phi^{(3l+k)}_{1-\frac{l}{n}}(x)}{n^{\frac{3l+k}{2}}} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_l \geq 3\\ i_1+i_2+\ldots+i_l = 3l+k}} \frac{\Delta_{i_1}\Delta_{i_1}\ldots\Delta_{i_1}}{i_1! i_2! \ldots i_l!} + \\
+ R_{m+1},
\end{aligned}
$$

где для любого $x \in \mathbb{R}$

$$
|R_{m+1}| \leq \sum_{l=1}^{m} C_n^l \frac{B_{n-l}^{2l+m+1}}{n^{\frac{2l+m+1}{2}}} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_l \geq 3\\ i_1+i_2+\ldots+i_l = 2l+m+1}} \frac{|\Delta|_{i_1}|\Delta|_{i_1}\ldots|\Delta|_{i_l}}{i_1! i_2! \ldots i_l!} +
$$

[11] *Сенатов В. В.* Центральная предельная теорема: точность аппроксимации и асимптотические разложения, М., Либроком, 2009.

$$+ C_n^{m+1}\frac{|\Delta|_3^{m+1}B_{n-m-1}^{3(m+1),\mu,T}}{(3!)^{m+1}n^{\frac{3(m+1)}{2}}}+$$
$$+\frac{2^{m+1}}{\pi}\sqrt{n}C_n^{m+1}\alpha^{n-\nu-m-1}(T)\int_T^\infty \max{}^\nu\big(|f(t)|, e^{-\frac{(t,t)}{2}}\big)dt.$$

В разделе 2.1 доказывается теорема о неравномерной оценке для короткого разложения Бергстрема-Чебышева для плотностей. Пусть $\beta_j(P), \beta_j(\Phi), j \in \mathbb{N}$ – j-е абсолютные моменты распределений P, Φ соответственно. Обозначим $m_j = \max(\beta_j(P), \beta_j(\Phi)), j \in \mathbb{N}$.

Теорема 2.1. Если четвертый момент распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией конечен и выполнены условия (2.1), (2.2), то для $n > 6 + \nu$ существует плотность $p_n(x)$ и верно разложение

$$p_n(x) = \phi(x) - \frac{\Delta_3}{3!\sqrt{n}}\phi^{(3)}_{1-\frac{1}{n}}(x) + R_2,$$

где для любого x, не равного нулю,

$$|R_2| \le \frac{|\Delta|_4}{n|x|^4}\left(\frac{1}{24}B_{n-1}^8 + B_{n-1}^6 + 6B_{n-1}^4 + 7B_{n-1}^2 + B_{n-1}^0\right)+$$
$$+\frac{|\Delta|_3^2}{n|x|^4}\left(\frac{1}{72}B_{n-6}^{10,\mu,T} + \frac{5}{12}B_{n-5}^{8,\mu,T} + 12B_{n-4}^{6,\mu,T} + 17B_{n-3}^{4,\mu,T} + 5B_{n-2}^{2,\mu,T}\right)+$$
$$+\frac{|\Delta|_3}{n|x|^4}\left(\frac{|\Delta|_3 m_3 B_{n-4}^{7,\mu,T}}{18\sqrt{n}} + \frac{|\Delta|_3 m_3 B_{n-3}^{5,\mu,T}}{3\sqrt{n}} + \frac{|\Delta|_4 B_{n-2}^{3,\mu,T}}{6\sqrt{n}} + \frac{|\Delta|_3 m_4 B_{n-3}^{6,\mu,T}}{72n}\right)+$$
$$+\frac{310m_4}{\pi|x|^4}n^{\frac{9}{2}}\alpha^{n-6-\nu}(T)\int_T^\infty \max{}^\nu\big(|f(t)|, e^{-\frac{t^2}{2}}\big)dt.$$

В разделе 2.2 приводятся и доказываются три квазинеравномерные оценки для остаточных членов разложения Бергстрема-Чебышева. Выпишем две из них. Обозначим

$$\psi_k^j(x) = \max_{y\ge|x|}\left|\phi^{(j)}_{\frac{k}{n}}(y)\right|, j \in \mathbb{Z}_+, k, n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 2.2. Если четвертый момент распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией конечен и выполнены условия (2.1), (2.2), то для $n > \nu + 3$ существует плотность $p_n(x)$ и верно разложение

$$p_n(x) = \phi(x) - \frac{\Delta_3}{3!\sqrt{n}}\phi^{(3)}_{1-\frac{1}{n}}(x) + R_2,$$

где для любого x, не равного нулю,

$$|R_2| \le \frac{|\Delta|_4}{n}\left(\frac{\psi^4_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)}{4!} + \frac{2^4 B^0_{n-1}}{|x|^4} + \frac{2^4\phi_{1-\frac{1}{n}}(x)}{|x|^4} + \frac{2^3|\phi^{(1)}_{1-\frac{1}{n}}(x)|}{|x|^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{2|\phi^{(2)}_{1-\frac{1}{n}}(x)|}{|x|^2} + \frac{|\phi^{(3)}_{1-\frac{1}{n}}(x)|}{3|x|}\right) + C_n^2 \frac{\psi^6_{n-2}\left(\frac{x}{2}\right)|\Delta|_3^2}{(3!)^2 n^3} +$$

$$+ 2C_n^2 \frac{B^6_{n-2}|\Delta|_3|\Delta|_4}{9n^{\frac{7}{2}}|x|} + 4C_n^2\frac{B^6_{n-2}|\Delta|_4^2}{9n^4|x|^2} +$$
$$+ C_n^3\frac{|\Delta|_3^3 B^{9,\mu,T}_{n-3}}{(3!)^3 n^{\frac{9}{2}}} + \frac{8}{\pi}\sqrt{n}C_n^3\alpha^{n-\nu-3}(T)\int_T^\infty \max{}^\nu\left(|f(t)|, e^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt.$$

Замечание 2. В приведенной оценке одна часть слагаемых имеет порядок $O\left(\frac{1}{nx^4}\right)$, при $n \to \infty, |x| \to \infty$, а другая $O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)$, $n \to \infty$.

Теорема 2.4. Если пятый момент распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией конечен и выполнены условия (2.1), (2.2), то для $n > \nu + 4$ существует плотность $p_n(x)$ и верно разложение

$$p_n(x) = \phi(x) - \frac{\Delta_3}{3!\sqrt{n}}\phi^{(3)}_{1-\frac{1}{n}}(x) + \frac{\Delta_4}{4!n}\phi^{(4)}_{1-\frac{1}{n}}(x) + C_n^2\frac{\Delta_3^2}{(3!)^2 n^3}\phi^{(6)}_{1-\frac{2}{n}}(x) + R_3,$$

где для любого x, не равного нулю,

$$|R_3| \le \frac{|\Delta|_5}{n^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{\psi^5_{n-1}\left(\frac{x}{2}\right)}{5!} + \frac{2^5 B^0_{n-1}}{|x|^5} + \frac{2^5\phi_{1-\frac{1}{n}}(x)}{|x|^5} + \right.$$
$$\left. + \frac{2^4|\phi^{(1)}_{1-\frac{1}{n}}(x)|}{|x|^4} + \frac{4|\phi^{(2)}_{1-\frac{1}{n}}(x)|}{|x|^3} + \frac{2|\phi^{(3)}_{1-\frac{1}{n}}(x)|}{3|x|^2} + \frac{|\phi^{(4)}_{1-\frac{1}{n}}(x)|}{12|x|}\right) +$$
$$+ C_n^2\frac{\left\{\psi^7_{n-2}\left(\frac{x}{2}\right) + \psi^7_{n-2}\left(\frac{x}{3}\right)\right\}|\Delta|_3|\Delta|_4}{3!4!n^{\frac{7}{2}}} + C_n^3\frac{\psi^9_{n-3}\left(\frac{x}{4}\right)|\Delta|_3^3}{(3!)^3 n^{\frac{9}{2}}} +$$

$$+ \frac{C_n^2}{n^4}\left(\frac{5B^7_{n-2}|\Delta|_3|\Delta|_5}{3!4!|x|} + \frac{3B^7_{n-2}|\Delta|_4^2}{3!4!|x|} + \frac{9B^7_{n-2}|\Delta|_4|\Delta|_5}{3!4!|x|^2}\right) +$$
$$+ \frac{C_n^3}{n^5}\left(\frac{B^9_{n-3}|\Delta|_3^2|\Delta|_4}{18|x|} + \frac{2B^9_{n-3}|\Delta|_3|\Delta|_4^2}{9n^4|x|^2} + \frac{8B^9_{n-3}|\Delta|_4^3}{27n^4|x|^3}\right) +$$
$$+ C_n^4\frac{|\Delta|_3^4 B^{12,\mu,T}_{n-4}}{(3!)^4 n^6} + \frac{16}{\pi}\sqrt{n}C_n^4\alpha^{n-\nu-4}(T)\int_T^\infty \max{}^\nu\left(|f(t)|, e^{-\frac{t^2}{2}}\right)dt.$$

Замечание 3. В приведенном неравенстве слагаемые из первых трех строк имеют порядок $O\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}x^5}\right)$, при $n \to \infty, |x| \to \infty$, а оставшиеся слагаемые суть $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, $n \to \infty$.

В третьей главе в разделе 3.1 дается определение разложения Бергстрема-Чебышева для плотности $p_n(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$. Выписывается оценка остаточной части такого разложения.

Пусть P – распределение на $\mathbb{R}^d$ с нулевым средним и единичным ковариационным оператором, $p_n(x)$ – плотность (если она существует), соответствующая распределению $P^{*n}(\sqrt{n}A), A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d), x \in \mathbb{R}^d$, Φ – нормальное распределение на $\mathbb{R}^d$ с нулевым средним и единичным ковариационным оператором, $\phi(x)$ – плотность нормального распределения Φ, $x \in \mathbb{R}^d$, $\phi_D(x)$ – плотность распределения с нулевым средним и ковариационным оператором $DI, D > 0, I$ – единичный оператор в $\mathbb{R}^d, x \in \mathbb{R}^d$, $Q(dx) = (P-\Phi)(dx), x \in \mathbb{R}^d$.

$$|\Delta|_j = \sup_{|e|=1} \int_{\mathbb{R}^d} |(e,x)|^j |Q(dx)|, e \in \mathbb{R}^d.$$

Предположим, что распределение P имеет конечный момент порядка $m+2, m \in \mathbb{N}$, пусть для $n > m$ существует плотность $p_n(x)$. Мы будем правую часть формального равенства

$$p_n(x) = \phi(x) + \\ + \sum_{l=1}^{m} C_n^l \sum_{k=0}^{m-l} (-1)^{3l+k} \int\limits_{\mathbb{R}^{ld}} \frac{\phi_{1-\frac{l}{n}}^{(3l+k)}(x)[h_1 + \dots + h_l]}{n^{\frac{3l+k}{2}}(3l+k)!} Q(dh_1)\dots Q(dh_l) + \\ + o\left(n^{-\frac{m}{2}}\right)$$

называть разложением Бергстрема-Чебышева для плотности $p_n(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Здесь величина $\phi_{1-\frac{l}{n}}^{(3l+k)}(x)[h_1 + \dots + h_l]$ – действие $(3l+k)$-й производной по Фреше функции $\phi_{1-\frac{l}{n}}(x)$ на вектор $h_1 + \dots + h_l$. Точнее

$$\phi_{1-\frac{l}{n}}^{(3l+k)}(x)[h_1 + \dots + h_l] = \phi_{1-\frac{l}{n}}^{(3l+k)}(x)\Big[\overbrace{h_1 + \dots + h_l, \dots, h_1 + \dots + h_l}^{3l+k}\Big].$$

Обозначим

$$
\begin{aligned}
B_k^j &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} |t|^j e^{-\frac{(t,t)k}{2n}} dt, \text{ где } j \in \mathbb{Z}_+, k, n \in \mathbb{N}, \\
B_{n-j}^{3j,\mu,T} &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{|t|<T\sqrt{n}} |t|^{3j} \mu^{n-j}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) dt, \text{ где } j \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{N}, n > j, \\
\alpha(T) &= \max_{|t|\geq T} \max\Big(|f(t)|, e^{-\frac{(t,t)}{2}}\Big).
\end{aligned}
$$

Справедлива теорема.

Теорема 3.1. Пусть абсолютный момент порядка $m+3$, $m \in \mathbb{N}$, распределения P с нулевым средним и единичным ковариационным оператором конечен. Пусть характеристическая функция $f(t), t \in \mathbb{R}^d$, распределения P такова, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(t)|^\nu dt < \infty,$$

для некоторого $\nu > 0$. Пусть функция $\mu(t), e^{\frac{-(t,t)}{2}} \leq \mu(t) \leq 1$, и число $T > 0$ таковы, что

$$\mu(t) \geq |f(t)| \text{ для всех } |t| \leq T.$$

Тогда для $n > \nu+m+1$ существует плотность $p_n(x)$ распределения $P^{*n}(\sqrt{n}A)$, $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$, такая, что

$$
\begin{aligned}
p_n(x) = \phi(x) + \\
+ \sum_{l=1}^{m} C_n^l \sum_{k=0}^{m-l} (-1)^{3l+k} \int\limits_{\mathbb{R}^{ld}} \frac{\phi_{1-\frac{l}{n}}^{(3l+k)}(x)[h_1 + \cdots + h_l]}{n^{\frac{3l+k}{2}}(3l+k)!} Q(dh_1)\ldots Q(dh_l) + \\
+ R_{m+1},
\end{aligned}
$$

где для любого $x \in \mathbb{R}^d$

$$
\begin{aligned}
|R_{m+1}| \leq \sum_{l=1}^{m} C_n^l \frac{B_{n-l}^{2l+m+1}}{n^{\frac{2l+m+1}{2}}} \sum_{\substack{i_1, i_2, \ldots, i_l \geq 3 \\ i_1+i_2+\ldots+i_l = 2l+m+1}} \frac{|\Delta|_{i_1} |\Delta|_{i_1} \ldots |\Delta|_{i_l}}{i_1! i_2! \ldots i_l!} + \\
+ C_n^{m+1} \frac{|\Delta|_3^{m+1} B_{n-m-1}^{3(m+1),\mu,T}}{(3!)^{m+1} n^{\frac{3(m+1)}{2}}} + \\
+ \frac{2^{m+1}}{(2\pi)^d} n^{\frac{d}{2}} C_n^{m+1} \alpha^{n-\nu-m-1}(T) \int\limits_{|t|\geq T} \max{}^\nu\big(|f(t)|, e^{-\frac{(t,t)}{2}}\big) dt.
\end{aligned}
$$

В разделе 3.2 приводится определение разложения Бергстрема-Чебышева для функции распределения $P_n(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Выписывается равномерная оценка остаточной части такого разложения.

Пусть у распределения P конечен момент порядка $m+2, m \in \mathbb{N}$. Правая часть формального равенства

$$P_n(x) = \Phi(x) + \\ + \sum_{l=1}^{m} C_n^l \sum_{k=0}^{m-l} \frac{(-1)^{3l+k}\Phi^{(3l+k)}_{1-\frac{l}{n}}(x)}{n^{\frac{3l+k}{2}}} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_l \geq 3 \\ i_1+i_2+\ldots+i_l=3l+k}} \frac{\Delta_{i_1}\Delta_{i_2}\ldots\Delta_{i_l}}{i_1! i_2! \ldots i_l!} + o\left(n^{-\frac{m}{2}}\right)$$

названа разложением Бергстрема-Чебышева функции распределения $P_n(x)$.

Теорема 3.3. Если момент порядка $m+3$, $m \in \mathbb{N}$, распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией конечен, то для функции распределения $P_n(x)$, $n > m+1$, соответствующей мере $P^{*n}(\sqrt{n}A), A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, верно разложение

$$P_n(x) = \Phi(x) + \\ + \sum_{l=1}^{m} C_n^l \sum_{k=0}^{m-l} \frac{(-1)^{3l+k}\Phi^{(3l+k)}_{1-\frac{l}{n}}(x)}{n^{\frac{3l+k}{2}}} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_l \geq 3 \\ i_1+i_2+\ldots+i_l=3l+k}} \frac{\Delta_{i_1}\Delta_{i_1}\ldots\Delta_{i_1}}{i_1! i_2! \ldots i_l!} + \overline{R}_{m+1},$$

где для любого $x \in \mathbb{R}$

$$|\overline{R}_{m+1}| \leq \sum_{l=1}^{m} C_n^l \frac{B^{2l+m}_{n-l}}{n^{\frac{2l+m+1}{2}}} \sum_{\substack{i_1,i_2,\ldots,i_l \geq 3 \\ i_1+i_2+\ldots+i_l=2l+m+1}} \frac{|\Delta|_{i_1}|\Delta|_{i_1}\ldots|\Delta|_{i_l}}{i_1! i_2! \ldots i_l!} + \\ + \frac{3^{\frac{m+1}{2}} C_n^{m+1} |\Delta|_3^{m+1} B^{3m+2}_{n-m-1}}{2^{\frac{5}{2}m+\frac{3}{2}} n^{\frac{3(m+1)}{2}}} + \frac{24\eta_{m,n}\beta_3^{m+2}}{\pi n^{\frac{m+2}{2}}} + \\ + \frac{2^{m+2}(m+1)}{\pi} C_n^{m+1}\theta^{n-m-1} \max\left\{0, \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\beta_3}\right)\right\},$$

$\eta_{m,n} = \min\left(\sum_{j=0}^{m} \frac{B^{3j}_{n-j}|\Delta|_3^j}{6^j n^{\frac{j}{2}}}, \sum_{j=0}^{m} \frac{C_n^j B^{2j}_{n-j}}{n^j}\right)$, $\theta = \sup\limits_{|t| \geq \frac{1}{\beta_3}} |f(t)|$, $f(t)$ – характеристическая функция P.

Замечание 4. Если характеристическая функция $f(t)$ распределения P такова, что $\overline{\lim}_{|t|\to\infty}|f(t)| < 1$, то число $\theta < 1$; $\eta_{m,n} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, n \to \infty$.

Также в разделе 3.2 выписывается несколько квазинеравномерных оценок остаточных частей разложения Бергстрема-Чебышева для функций распределения. Например, сформулированы следующие теоремы.

Обозначим

$$\Psi_k^j(x) = \max_{y \geq |x|} \left| \Phi_{\frac{k}{n}}^{(j)}(y) \right|, j, k, n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3.4. Если четвертый момент распределения P с нулевым средним и единичной дисперсией конечен, то для $n > 3$ верно разложение

$$P_n(x) = \Phi(x) - \frac{\Delta_3}{3!\sqrt{n}} \Phi_{1-\frac{1}{n}}^{(3)}(x) + \overline{R}_2,$$

где для любого x, не равного нулю,

$$|\overline{R}_2| \leq \frac{|\Delta|_4}{n} \left(\frac{\Psi_{n-1}^4\left(\frac{x}{2}\right)}{4!} + \frac{2^4}{|x|^4} + \frac{2^4 \Phi_{1-\frac{1}{n}}(x)}{|x|^4} + \frac{2^3 |\Phi_{1-\frac{1}{n}}^{(1)}(x)|}{|x|^3} + \right.$$
$$\left. + \frac{2|\Phi_{1-\frac{1}{n}}^{(2)}(x)|}{|x|^2} + \frac{|\Phi_{1-\frac{1}{n}}^{(3)}(x)|}{3|x|} \right) + C_n^2 \frac{\Psi_{n-2}^6\left(\frac{x}{2}\right) |\Delta|_3^2}{(3!)^2 n^3} +$$

$$+ 2C_n^2 \frac{B_{n-2}^5 |\Delta|_3 |\Delta|_4}{9 n^{\frac{7}{2}} |x|} + 4C_n^2 \frac{B_{n-2}^5 |\Delta|_4^2}{9 n^4 |x|^2} + \frac{3^{\frac{3}{2}} C_n^3 |\Delta|_3^3 B_{n-3}^8}{2^{\frac{13}{2}} n^{\frac{9}{2}}} + \frac{24 \eta_{2,n} \beta_3^4}{\pi n^2} +$$
$$+ \frac{3 \cdot 2^4}{\pi} C_n^3 \theta^{n-3} \max\left\{0, \ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\beta_3}\right)\right\}.$$

Теорема 3.5. Пусть выполнены условия теоремы 3.4, тогда верна следующая, более точная в смысле убывания по x, оценка для величины $\overline{R}_2$

$$|\overline{R}_2| \leq \frac{|\Delta|_4}{n} \left(\frac{\Psi_{n-1}^4\left(\frac{x}{2}\right)}{4!} + \frac{2^4}{|x|^4} + \frac{2^4 \Phi_{1-\frac{1}{n}}(x)}{|x|^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{2^3 |\Phi_{1-\frac{1}{n}}^{(1)}(x)|}{|x|^3} + \frac{2|\Phi_{1-\frac{1}{n}}^{(2)}(x)|}{|x|^2} + \frac{|\Phi_{1-\frac{1}{n}}^{(3)}(x)|}{3|x|} \right) +$$

$$+ C_n^2 \frac{\Psi_{n-2}^6\left(\frac{x}{2}\right) |\Delta|_3^2}{(3!)^2 n^3} + C_n^2 \frac{|\Delta|_3 |\Delta|_4}{n^{\frac{7}{2}}} \left(\frac{4^4 B_{n-2}^2}{3|x|^4} + \right.$$
$$\left. + \frac{4^4 \Psi_{n-2}^3\left(\frac{3x}{4}\right)}{3|x|^4} + \frac{4^3 \Psi_{n-2}^4\left(\frac{3x}{4}\right)}{3|x|^3} + \frac{4^2 \Psi_{n-2}^5\left(\frac{3x}{4}\right)}{6|x|^2} \right) +$$

$$+C_n^2\frac{|\Delta|_4^2}{n^4}\left(3\frac{4^8}{x^8}+\frac{4^8\Phi_{1-\frac{2}{n}}(x)}{x^8}+2\frac{4^7B_{n-2}^0}{x^7}+2\frac{4^7|\Phi^{(1)}_{1-\frac{2}{n}}(x)|}{x^7}+\right.$$
$$\left.+\frac{4^6B_{n-2}^1}{x^6}+3\frac{4^6|\Phi^{(2)}_{1-\frac{2}{n}}(x)|}{2x^6}+\frac{4^5|\Phi^{(3)}_{1-\frac{2}{n}}(x)|}{x^5}+\frac{4^3|\Phi^{(4)}_{1-\frac{2}{n}}(x)|}{x^4}\right)+$$
$$+\frac{3^{\frac{3}{2}}C_n^3|\Delta|_3^3B_{n-3}^8}{2^{\frac{13}{2}}n^{\frac{9}{2}}}+\frac{24\eta_{2,n}\beta_3^4}{\pi n^2}+\frac{3\cdot 2^4}{\pi}C_n^3\theta^{n-3}\max\left\{0,\ln\left(\frac{\sqrt{n}}{\beta_3}\right)\right\}.$$

В разделе 3.3 строятся асимптотические разложения Бергстрема-Чебышева для решетчатых распределений, найдены явные оценки остаточных частей таких разложений. В разделе 3.4 на нескольких примерах показано, как из разложения Бергстрема-Чебышева получать разложения Грама-Шарлье и Эджворта-Крамера, записанные в терминах псевдомоментов Δ_j, а не моментов Чебышева-Эрмита и семиинвариантов соответственно. Продемонстрировано, как при переходе от разложения к разложению меняются их остаточные части. Сделан вывод, что разложения Бергстрема-Чебышева являются предпочтительными перед разложениями Эджворта-Крамера и Грама-Шарлье в смысле получения "хороших" оценок остаточных частей.

3 Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность доктору физико-математических наук Владимиру Васильевичу Сенатову за постоянное внимание и помощь при подготовке диссертации.

4 Список публикаций автора по теме диссертации

1. Сюлюкин А. В. Об асимптотических разложениях Бергстрема-Чебышева. — *Теория вероятностей и ее применения*, 2009, 54-1, с.176-185.

2. Сюлюкин А. В. О квазинеравномерных оценках остаточных частей для разложения Бергстрема-Чебышева. — *Теория вероятностей и ее применения*, 2009, 54-2, с.391-399

3. Сюлюкин А. В. О неравномерных оценках остаточных частей для разложения Бергстрема-Чебышева. — *Вестник Тверского государственного университета. Серия: прикладная математика*, 2009, Вып. 1(12), с.79-88.