

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. М.В.Ломоносова

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи

УДК 539.3

Голиков Сергей Николаевич

**Решение задач линейной и нелинейной теорий вязкоупругости
модифицированным методом аппроксимаций А.А.Ильюшина
и методами нелинейной эндохронной теории
стареющих вязкоупругих материалов**

Специальность 01.02.04 – механика деформируемого твёрдого тела

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2009 г.

Работа выполнена на кафедре Теории Упругости Механико-Математического факультета Московского Государственного Университета имени М.В.Ломоносова

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук,
профессор Быков Дмитрий Леонидович

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук,
ст.н.с. Пшеничнов Сергей Геннадьевич
Доктор физико-математических наук,
профессор Шачнев Владимир Алексеевич

Ведущая организация: ФГУП “ФЦДТ”Союз”.

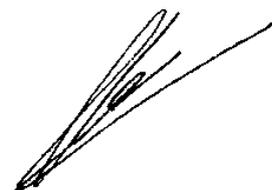
Защита диссертации состоится « 18 » декабря 2009 г. в 16:00 часов на заседании диссертационного совета Д.501.001.91 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу: 119991, РФ, г.Москва, ГСП-1, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан « 16 » ноября 2009 года.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 501.001.91 при МГУ,
доктор физико-математических наук, профессор



С.В.Шешенин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность темы. Развитие современной техники неразрывно связано с появлением новых материалов, обладающих свойствами, отличающими их от всех ранее известных. Примерами могут служить материалы, изготовленные с использованием нанотехнологий, в которых частицы, имеющие размеры от одного до нескольких десятков нанометров, соединяются тем или иным способом с материалами, структурные размеры которых могут достигать от десятых долей до нескольких миллиметров.

В результате появляются новые материалы с более высокими физико-механическими характеристиками по сравнению с теми, которые имелись у материалов, не соединяемых с наночастицами. Появление таких материалов находит широкое внедрение в новой технике, однако это становится возможным только при более тщательном, чем прежде, изучении свойств уже известных материалов.

Рассматривая в качестве примера практического использования нанотехнологий для изготовления космических отражателей, выводимых на орбиту вокруг Земли, следует отметить, что в них тонкий металлический слой толщиной от 4 до 40 нм наносился ионным напылением на полимерную “подложку” толщиной 0.5 мм.

Эта подложка при длительном пребывании в космическом пространстве может получать повреждения, вызванные действием различных термо-силовых факторов. Поэтому вопрос о долговечности отражателей будет зависеть от правильной оценки их прочности при длительной эксплуатации. Следовательно, учёт повреждений подложки и деформирования нанопокрывтия приобретает решающее значение.

Из этого примера можно сделать вывод о необходимости тщательного исследования любых современных материалов, предназначенных для применения в технике. В настоящей диссертации основное внимание уделяется разработке новых методов расчёта прочности наполненных полимерных материалов (НПМ), обладающих характерными свойствами, связанными с технологией их изготовления.

НПМ имеют различную структуру, связанную с её фазами: “связующим” и “наполнителями”. В качестве связующих обычно выбирают каучукообразные материалы, приклеенные к наполнителям и образующие композит, в общем случае, многофазной структуры.

В представленной работе рассматривается частный случай НПМ, а именно, предполагается, что имеются только две фазы материала: жёсткий, недеформируемый наполнитель, имеющий некоторую кристаллическую форму, и эластичное связующее, склеенное с частицами наполнителя. Деформирование такого НПМ проявляется за счёт деформирования или разрушения связующего, а также за счёт отрыва (нарушения “адгезии”) наполнителей от связующего.

Допуская, что все частицы наполнителя имеют близкие характерные размеры и распределены по объёму НПМ равномерно, приходим к имитационной модели реального материала, представляющей собой квазиоднородный и квазиизотропный материал. Это упрощает постановку задачи, но, как будет показано в дальнейшем, оставляет проблему исследования сопротивления подобных материалов достаточно сложной.

Суть задачи, решаемой в диссертации, сводится к следующему: найти и использовать применительно к конкретным примерам новые определяющие соотношения нелинейной теории вязкоупругости, позволяющие учитывать физические свойства НПМ, которые выявляются при экспериментальных лабораторных исследованиях НПМ с “пониженной адгезионной прочностью”. Последнее соответствует тому, что разрушение таких материалов начинается главным образом с отслоения наполнителей от связующего и только затем нарушается “когезионная” прочность, т.е. происходит разрыв связующего.

Практически такое явление начинается в высоконаполненных полимерных материалах, когда объём наполнителя в несколько раз превосходит объём связующего. В настоящее время наиболее подходящей для применения на практике и описания указанных явлений является “Нелинейная эндохронная теория стареющих вязкоупругих материалов” (НЭТСВУМ), получившая теоретическое развитие и экспериментальную проверку в работах Д.Л.Быкова, Д.Н.Коновалова, В.Э.Апетьяна. Этой теории предшествовали многие работы в области линейной и нелинейной теорий вязкоупругости отечественных и зарубежных авторов, среди которых наиболее важное значение имеют монографии А.А.Ильюшина и Б.Е.Победри, Ю.Н.Работнова, В.В.Москвитина. В этих монографиях была проведена важная с практической точки зрения систематизация опубликованных в нашей стране и за рубежом работ, посвящённых развитию теорий термо-вязкоупругости по состоянию на начало 70-х годов прошлого столетия. В последующих статьях указанных авторов, а также их учеников и соратников были развиты идеи, предложенные ранее А.А.Ильюшиным, в том числе эффективный “метод аппроксимаций” для решения задач линейной теории вязкоупругости.

Развитие механики полимерных материалов протекало в тесной связи с созданием экспериментальных установок для проведения опытов, позволяющих уточнять механические характеристики таких материалов. Одновременно с этим совершенствовалась вычислительная техника, расширяющая возможность использования всё более сложных определяющих соотношений, которые могли с высокой точностью описывать результаты экспериментов, имитирующих реальные режимы нагружения конструкций.

Если в 50-е – 70-е годы прошлого века, когда происходило интенсивное развитие линейной теории вязкоупругости, в основном преобладало представление ядер релаксации и ползучести в виде функций времени, содержащих от 2-х до 4-х материальных констант материала, подлежащих экспериментальному определению в конкретных опытах, то уже в конце прошлого столетия и в настоящее время стало широко использоваться представление указанных ядер с помощью сумм большого числа убывающих экспоненциальных функций, позволяющих описывать кривые ползучести и релаксации с погрешностью не более 1%. Наличие численных программ значительно облегчило идентификацию таких функций и, что важно, эти виды представления ядер релаксации и ползучести стали входить в стандартные пакеты для решения задач линейной и нелинейной теорий вязкоупругости.

Это, конечно, не обесценивает ранее предложенные аналитические выражения упомянутых ядер, поскольку всегда можно указать задачи, в которых их использование оправдано практическими соображениями. Но сокращение времени расчётов конструкций из НПМ, достигаемое применением отрезков

рядов Прони и других комбинаций из убывающих экспоненциальных функций, заставляет во многих задачах отдавать предпочтение последним.

Следует заметить, что ранее в работах А.К.Малмейстера была реализована идея о получении для железобетонной конструкции ядра ползучести, пригодного для одновременного описания деформационного процесса при постоянном растяжении и при циклическом нагружении. Это удалось сделать благодаря введению не одного, а двух собственных времён ползучести, что является частным случаем подхода по увеличению числа неизвестных констант (на примере отрезков рядов Прони) для расширенного описания одновременно различных деформационных процессов.

В монографии А.А.Адамова, В.П.Матвеевко, Н.А.Труфанова, И.Н.Шардакова “Методы прикладной вязкоупругости” указан другой метод описания ядер ползучести и релаксации при одновременной реализации различных режимов нагружения. При этом аналитические представления ядер не сводились к отрезкам рядов Прони, а брались в виде других ранее известных функций времени (в частности, в виде ядра М.А.Колтунова). В этом случае использовались также “усреднённые” ядра, которые для конкретных видов испытаний давали вполне удовлетворительное согласование с данными экспериментов.

Цель работы. Целью работы является исследование и разработка методов идентификации НЭТСВУМ, а также расчёт конструкций из НПМ с учётом конечных деформаций.

Для достижения этой цели предстояло решить следующие **задачи**:

1. Вычислить сопряжённые ядра релаксации и ползучести с целью их использования в модифицированном методе аппроксимаций;
2. Провести идентификацию НЭТСВУМ различными методами, в том числе и методом генетического алгоритма;
3. Вывести инкрементальные соотношения НЭТСВУМ для расчёта конструкций методом конечных элементов;
4. Произвести расчёт конструкций из НПМ модифицированным методом аппроксимаций А.А.Ильюшина и методом конечных элементов при малых деформациях;
5. Произвести расчёт конструкций из НПМ методом конечных элементов при учёте физической и геометрической нелинейности материала.

Научная новизна работы. В диссертации предложена модификация метода аппроксимаций А.А.Ильюшина, заключающаяся в специальном выборе ядер релаксации и ползучести, отвечающих постановке решаемой задачи линейной теории вязкоупругости. При идентификации НЭТСВУМ использован метод «генетического алгоритма», для которого указаны области допустимого изменения 16-ти неизвестных механических параметров ядер релаксации. Используя инкрементальные представления соотношений НЭТСВУМ и логарифмические меры деформаций, впервые произведён расчёт неосесимметричного плоского деформирования вязкоупругого цилиндра, имеющего внутренний вырез типа “мальтийский крест” и заключённого в упругую оболочку, при действии внутреннего давления с учётом физической и геометрической нелинейности материала.

Достоверность основных положений и выводов базируется на физической и математической корректности постановки решаемых задач, использовании апробированных численных методов расчёта систем инкрементальных уравнений и сопоставлении найденных решений, полученных разными методами. Физическая корректность подтверждается хорошим совпадением результатов расчётов, проведённых ранее в рамках НЭТСВУМ, с данными многочисленных экспериментов, включая случаи использования логарифмических мер деформаций. Математическая корректность подтверждается применением широко известного метода конечных элементов, анализом полученных решений и их сопоставлением при использовании различных методов расчёта.

Научно-практическая значимость работы.

Диссертация посвящена решению практических задач современной техники, связанных с обеспечением прочности конструкций, сделанных из наполненных полимеров с низкой адгезионной прочностью. Их особенность состоит в зависимости ядер релаксации и ползучести от конкретных деформационных процессов уже при малых деформациях, то есть неуниверсальности механических характеристик. Кроме того, низкая адгезионная прочность приводит к необходимости одновременно учитывать физическую и геометрическую нелинейность материала. В диссертации предложены методы учёта указанных особенностей: применительно к линейной теории вязкоупругости – на основе модифицированного метода аппроксимаций А.А.Ильюшина, а применительно к нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов – на основе инкрементального метода численного интегрирования НЭТСВУМ с использованием логарифмических мер деформаций.

Разработанные в диссертации методы позволяют найти практические применения для прогнозирования прочности конструкций из НПМ.

Расчетом задач методами НЭТСВУМ можно получить не только напряжённо-деформированные состояния, позволяющие при известных критериях разрушения судить о несущей способности конструкций, но и рекомендации технологам по совершенствованию материалов из наполненных полимеров, исходя из анализа их повреждённости в процессах нагружения.

Апробация работы. Основные результаты, полученные в диссертации, были доложены на Ломоносовских чтениях в МГУ (Москва 2005-2008 гг.), на научно-исследовательском семинаре кафедры теории упругости МГУ под руководством проф. И.А.Кийко (2004-2009 гг.), на научно-исследовательском семинаре кафедры механики композитов МГУ под руководством проф. Б.Е.Победря.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 6 работ, из них 1 статья в центральном журнале и 5 тезисов докладов.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения с обзором литературы, трёх глав, выводов и списка литературы, включающего 76 наименований отечественных и зарубежных источников. Работа изложена на 105 страницах машинописного текста содержит 42 рисунка.

Некоторые из основных результатов диссертации получили внедрение в производственную практику предприятия ФГУП ФЦДТ “Союз”.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Во введении обоснована актуальность темы диссертационной работы, сформулированы цели и задачи данной работы, приведена аннотация содержания диссертации с обзором литературы.

В первой главе описывается разработанный в диссертации модифицированный метод аппроксимаций А.А.Ильюшина.

В п.1.1 рассматривается общая постановка решения задач линейной теории вязкоупругости методом аппроксимаций А.А.Ильюшина.

Соотношения линейной теории вязкоупругости между тензорами напряжений и деформаций берутся в виде:

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_0^t K(t-\tau) d\theta(\tau), & S_{ij}(t) &= \int_0^t 2G(t-\tau) d\varepsilon_{ij}(\tau), \\ \theta(t) &= \int_0^t \Pi_\theta(t-\tau) d\sigma(\tau), & \varepsilon_{ij}(t) &= \int_0^t \Pi(t-\tau) dS_{ij}(\tau), \end{aligned} \quad (1)$$

здесь $S_{ij}(t)$, $\varepsilon_{ij}(t)$ – девиаторы тензоров напряжений и деформаций; $\sigma(t)$ – среднее напряжение; $\theta(t)$ – объёмная деформация; $2G(t)$, $K(t)$ – ядра сдвиговой и объёмной релаксации; $\Pi(t)$, $\Pi_\theta(t)$ – ядра сдвиговой и объёмной ползучести.

Применим к этим соотношениям интегральное преобразование Лапласа-Карсона (Л-К):

$$f^*(s) = s \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

здесь $f(t)$ – функция-оригинал, возрастание которой при $t \rightarrow \infty$ не превосходит убывания экспоненциальной функции $e^{-\gamma t}$, $\gamma > 0$; $f^*(s)$ – изображение функции $f(t)$ в пространстве Л-К; s – положительная действительная переменная.

Учитывая известные свойства преобразования Л-К, выражения напряжений и деформаций (1) в определяющих соотношениях примут вид:

$$\begin{aligned} \sigma^*(s) &= K^*(s) \theta^*(s), & S_{ij}^*(s) &= 2G^*(s) \varepsilon_{ij}^*(s), \\ \theta^*(s) &= \Pi_\theta^*(s) \sigma^*(s), & \varepsilon_{ij}^*(s) &= \Pi^*(s) S_{ij}^*(s). \end{aligned} \quad (2)$$

Будем называть простым нагружением конструкции случай, когда все массовые и поверхностные нагрузки меняются пропорционально некоторой функции времени $\lambda(t)$, причём $\lambda(0) = 0$.

Общие уравнения, определяющие математическую модель рассматриваемой задачи, можно представить в виде

$$\text{уравнений равновесия: } \sigma_{ij,j} = X_i^0(x) \lambda(t),$$

$$\text{граничных условий: } \sigma_{ij} l_j \Big|_{\Sigma_1} = \sigma_i^0(x) \lambda(t), \quad u_i \Big|_{\Sigma_2} = u_i^0 \mu(t),$$

где связь деформаций ε_{ij} и перемещений u_i : $\varepsilon_{ij} = (u_{i,j} + u_{j,i})/2$.

Пользуясь формулами Сомильяна, полученными в теории упругости, можно записать изображения искомых функций в виде

$$u_i^*(s) = \lambda^*(s) L_i(2G^*(s), K^*(s), \Pi^*(s), \Pi_\theta^*(s), x, m) + \mu^*(s) P_i(2G^*(s), K^*(s), \Pi^*(s), \Pi_\theta^*(s), x, m).$$

В формуле для $u_i^*(s)$ x – координаты точки тела, а m – параметр его геометрии.

Из формул (2) следуют равенства: $2G^*(s)\Pi^*(s)=1$, $K^*(s)\Pi_\theta^*(s)=1$. Учитывая эти зависимости между $2G^*(s)$ и $\Pi^*(s)$, считая, что коэффициент Пуассона $\nu = const$, можно представить выражение $u_i^*(s)$ в виде

$$u_i^*(s) = \lambda^*(s) l_i(2G^*(s)) + \mu^*(s) p_i(2G^*(s)).$$

В этом выражении опущены все аргументы, не зависящие от параметра s . Это означает, в частности, что граничные условия записываются относительно геометрии тела, не зависящей от времени.

Аппроксимацию этих функций в пространстве изображений можно проводить разными способами. Одним из них является представление указанных функций отрезками рядов Лорана. В качестве примера рассмотрим такое представление для функции $l_i(2G^*(s))$

$$l_i(2G^*(s)) = a_i + b_i 2G^*(s) + c_i \frac{1}{2G^*(s)} + \dots$$

Найдя искомые коэффициенты a_i, b_i, c_i, \dots , мы можем добиться аппроксимаций функции $l_i(2G^*(s))$ с необходимой точностью в пространстве изображений, после чего построить её оригинал в виде

$$l_i(x) = a_i + b_i 2G(t) + c_i \Pi(t) + \dots \quad (3)$$

Здесь мы воспользовались равенством $2G^*(s)\Pi^*(s)=1$. Зная функции $2G(s)$ и $\Pi(s)$, можно найти приближённое решение задачи. Используя формулу (3), находим оригинал перемещений

$$u_i(t) = \int_0^t l_i(t-\tau) d\lambda(\tau). \quad (4)$$

Рассматривая для простоты только первые слагаемые в правой части формулы (4), получим

$$u_i(t) = a_i \lambda(t) + b_i \int_0^t 2G(t-\tau) d\lambda(\tau) + c_i \int_0^t \Pi(t-\tau) d\lambda(\tau) + \dots$$

Таким образом, модификация метода аппроксимаций А.А.Ильюшина состоит в следующем:

- 1) Для использования метода аппроксимаций на основе преобразований Л-К необходимо, чтобы ядра релаксации и ползучести находились из одного и того же опыта;
- 2) При выборе эксперимента для нахождения ядер релаксации и ползучести следует руководствоваться соображениями о наилучшем достижимом совпадении соответствующего деформационного процесса с процессом реального нагружения конструкции.

В п.1.2 рассматривается определение сопряжённого ядра $\Pi(t)$ через ядро $R(t)$ из экспериментов на релаксацию $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot h(t)$ и растяжение образца с постоянной скоростью деформаций $\varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_0 \cdot t$.

Закон связи напряжений и деформаций для одноосного представления Больцмана-Вольтерра имеет вид:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau). \quad (5)$$

Из этого уравнения может быть найдено ядро релаксации $R(t)$, если из какого-либо опыта известны значения $\sigma(t)$ и $\varepsilon(t)$. Это интегральное уравнение можно переписать в виде, разрешенном относительно $\varepsilon(t)$. Из теории Вольтерра

известно, что
$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau). \quad (6)$$

Подставив соотношение (5) в (6), получим уравнение:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d \left(\int_0^{\tau} R(\tau-x) d\varepsilon(x) \right), \quad (7)$$

согласно которому

1) при релаксации $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot h(t)$, где $h(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$ – функция Хевисайда,

получим
$$1 = \Pi(t)R(0) + \int_0^t \Pi(t-\tau)R'(\tau) d\tau, \text{ при } t > 0; \quad (8)$$

2) при $\varepsilon = \dot{\varepsilon}_0 \cdot t$, получим

$$t = \int_0^t \Pi(t-\tau)R(\tau) d\tau \text{ или } t = \int_0^t \Pi(\tau)R(t-\tau) d\tau. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) решаются с помощью метода квадратурных формул, суть которого состоит в замене интегрального уравнения аппроксимирующей системой алгебраических уравнений относительно дискретных значений искомой функции и решении этой системы. В основе такой замены лежит приближение интеграла квадратурными формулами.

Пусть $i = 1, 2, 3, \dots, (t_{\max} - 0)/h$, тогда

$$1) \varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cdot h(t), \quad \Pi(0) = \frac{1}{R(0)}, \quad \Pi(ih) = \frac{1 - \frac{\Pi(0)R'(ih)}{2}h - \sum_{j=1}^{i-1} \Pi(ih-jh)R'(jh)h}{R(0) + \frac{R'(0)}{2}h},$$

$$2) \varepsilon(t) = \dot{\varepsilon}_0 \cdot t, \quad \Pi(0) = \frac{1}{R(0)}, \quad \Pi(ih) = \frac{i - \frac{\Pi(0)R(h)}{2} - \sum_{j=1}^{i-1} \Pi(ih-jh)R(jh)}{\frac{R(0)}{2}}.$$

В п.1.3 модифицированным методом аппроксимаций А.А.Ильюшина решается тестовая задача о растяжении вязкоупругого бруса с прямоугольным поперечным сечением. Далее производится сравнение с решением, рассчитанным по методу конечных элементов при использовании инкрементальных соотношений линейной теории вязкоупругости. Получено хорошее совпадение решений.

В п.1.4 модифицированным методом аппроксимаций А.А.Ильюшина решается задача о полом вязкоупругом цилиндре, заключённом в упругую оболочку, с неосесимметричным вырезом типа "мальтийский крест" при действии внутреннего давления. Сравнение данного решения с решением, полученным при использовании инкрементальных соотношений линейной теории вязкоупругости, даёт хорошее совпадение.

Во второй главе диссертации рассматривается нелинейная эндохронная теория стареющих вязкоупругих материалов (НЭТСВУМ) и её идентификация.

В п.2.1 даны необходимые сведения о НЭТСВУМ.

Рассматривается обобщённая модель Максвелла (рисунок 1), образуемая путем соединения параллельно расположенных элементарных моделей Максвелла.

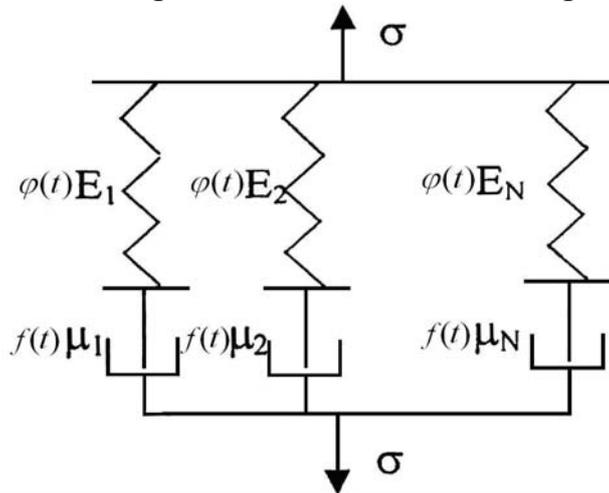


Рисунок 1. Обобщённая модель Максвелла.

Чтобы расширить область применения теории вязкоупругости, считается, что константы E_k и μ_k в обобщенной модели Максвелла, при определенных условиях нагружения начинают меняться во времени и зависят от вида напряженно-деформированного состояния, что делает рассматриваемую модель физически нелинейной.

Трудности расчета конструкций на основе нелинейной модели возрастают по сравнению с расчетами, проводимыми при использовании линейной модели. Имея это в виду, заменим величины E_k и μ_k на произведения $E_k\varphi(t)$ и $\mu_k f(t)$, где $\varphi(t)$ и $f(t)$ – некоторые функции времени, подлежащие определению в дальнейшем с использованием экспериментальных данных.

Связь одномерных напряжений $\sigma(t)$ и деформаций $\varepsilon(t)$ в НЭТСВУМ записывается в виде

$$\sigma(t) = \varphi(t) \int_0^t R(t_*(t) - t_*(\tau)) d\varepsilon(\tau),$$

где $R(t) = E_\infty + \sum_{k=1}^N E_k e^{-\alpha_k t}$ – ядро сдвиговой релаксации; $t_*(t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau)}{f(\tau)} d\tau$ – приведенное время; $\varphi(t)$ – функция старения и $f(t)$ – функция изменения вязкости, характеризующие необратимое изменение и старение материала.

Для использования данной теории имеет большое значение правильное понимание структуры удельной работы внутренних сил, представляемой в виде

$$A(t) = \int_0^t \sigma(\tau) d\varepsilon(\tau) = A_e(t) + A_v(t) + A_*(t) + A_c(t),$$

где

$$A_e = \frac{1}{2\varphi(t)} \frac{1}{E} \left(\sum_{k=1}^N \sigma_k(t) \right)^2 \quad \text{– удельная мгновенно-обратимая энергия;}$$

$$A_v = \frac{1}{2\varphi(t)} \left(\sum_{k=1}^N \frac{\sigma_k^2(t)}{E_k} - \frac{1}{E} \left(\sum_{k=1}^N \sigma_k(t) \right)^2 \right) \quad \text{– удельная замедленно-обратимая энергия;}$$

$$A_{ev}(t) = A_e(t) + A_v(t) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{2E_k} \frac{\sigma_k^2(t)}{\varphi(t)} \quad \text{– удельная запасённая энергия;}$$

$$A_*(t) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\mu_k} \int_0^t \frac{\sigma_k^2(\tau)}{f(\tau)} d\tau \quad \text{– удельная рассеянная энергия;}$$

$$A_c(t) = - \sum_{k=1}^N \frac{1}{2E_k} \int_0^t \frac{\sigma_k^2(\tau)}{\varphi^2(\tau)} d\varphi(\tau) \quad \text{– удельная энергия старения.}$$

В числе необратимых процессов, протекающих при нагружении и нагреве НПМ, можно выделить процесс изменения внутренней структуры материала, который будем считать его “повреждённостью” и процесс изменения температуры материала в результате деформирования. Исходя из этого, стремясь при решении практических задач избегать применения связанных задач нелинейной теории термовязкоупругости, можно принять следующую “пороговую” модель для выделения удельной поглощённой энергии $A_a(t)$, расходуемой исключительно на повреждённость материала.

$$dA_a(t)/dt = k_a [W_*(t) - W_s] \cdot H(W_*(t) - W_s), \quad (10)$$

где W_s – пороговая мощность энергии рассеивания; $H(x)$ – функция Хевисайда; $k_a = e^{-\lambda \cdot \varepsilon}$ – коэффициент поглощения энергии, с помощью которого выделяется часть “избыточной” мощности рассеяния $W_*(t) - W_s$, поглощаемая в процессе накопления повреждений ($0 < k_a < 1$).

В п.2.2 рассматривается задача о нахождении ядра релаксации при начальном приближении в виде ядер обобщённой модели Максвелла, определяемых из опыта на релаксацию с малой деформацией.

В п.2.3 находится ядро релаксации из опыта на растяжение образца с постоянной скоростью деформаций при монотонной и немонотонной зависимости напряжений от деформаций.

В п.2.4 указан приближённый метод идентификации функций старения и вязкости.

В п.2.5 представлено краткое изложение метода генетического алгоритма. Далее, при использовании данного метода, рассматривается идентификация НЭТСВУМ из опытов на растяжение образца с постоянной скоростью деформации при наличии немонотонной зависимости напряжений от деформаций (рисунок 2).

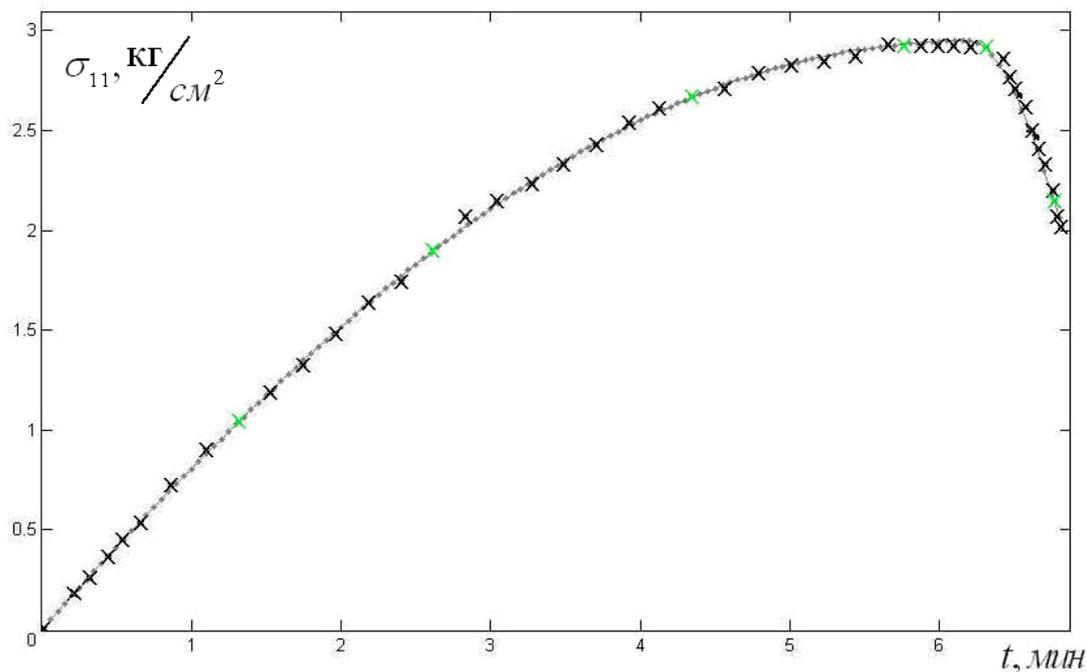


Рисунок 2. Зависимость $\sigma_{11}(t)$ от времени t при растяжении образца с постоянной скоростью деформации $\dot{\epsilon}_0 = 0.01472$ 1/мин. Крестиками показаны экспериментальные значения напряжений в моменты времени t_i , пунктиром показана теоретическая кривая, найденная при использовании метода ГА.

В третьей главе диссертации рассматривается решение задач при использовании НЭТСВУМ с учётом конечных деформаций.

В п.3.1 описана суть решения задач при использовании НЭТСВУМ. Модель описывается системой соотношений инкрементального типа. Последовательность вывода этих соотношений включает три этапа. На первом этапе делается допущение о “вмороженности” главных направлений тензора истинных напряжений в материал частицы и формулируются три скалярных соотношения связи наследственного типа между главными истинными напряжениями и логарифмическими деформациями. Форма этих соотношений аналогична форме соотношений эндохронной теории. На втором этапе выводятся скалярные соотношения инкрементального типа, основанные на допущении о постоянстве скоростей логарифмических деформаций и скоростей изменения приведённых времён на малых интервалах времени $[t, t + \Delta t]$. На третьем этапе инкрементальные соотношения формулируются в тензорном виде и обобщаются на случай произвольной истории деформирования материальной частицы.

Алгоритм численного решения пространственных краевых задач для предложенной системы инкрементальных определяющих соотношений основан на конечно-элементной дискретизации слабой формы уравнений равновесия, отнесённой к конфигурации тела в начале текущего временного шага. Учёт зависимостей материальных функций старения и функций скоростей приведённых времён от параметров состояния проводится в рамках явной схемы.

В п.3.2 рассматриваются определяющие соотношения между истинными напряжениями и логарифмическими мерами деформаций в рамках НЭТСВУМ.

Вначале предполагается, что главные оси тензора истинных напряжений неподвижны относительно материала частицы. Тогда деформированное состояние частицы может характеризоваться тремя логарифмическими деформациями:

$\varepsilon_\alpha(t) = \ln \lambda_\alpha(t)$, где $\lambda_\alpha(t)$ – растяжение материального волокна, направленного вдоль главной оси тензора истинных напряжений с номером α ($\alpha = 1, 2, 3$).

Связь между главными истинными напряжениями $\sigma_\alpha(t)$ и логарифмическими деформациями $\varepsilon_\alpha(t)$ принимается в следующем виде:

$$\sigma(t) = \varphi_1(t) \int_0^t K(t_1(t) - t_1(\tau)) d\theta(\tau), \quad S_\alpha(t) = 2\varphi_2(t) \int_0^t G(t_2(t) - t_2(\tau)) d\mathcal{E}_\alpha(\tau), \quad (11)$$

$$\theta(t) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_\alpha(t), \quad \mathcal{E}_\alpha(t) = \varepsilon_\alpha(t) - \frac{1}{3}\theta(t), \quad \sigma(t) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_i(t), \quad S_\alpha(t) = \sigma_\alpha(t) - \sigma(t), \quad (12)$$

$$K(t) = \sum_{n=1}^N K_n e^{-t/\tau_n} + K_{N+1}, \quad G(t) = \sum_{n=1}^N G_n e^{-t/\tau_n} + G_{N+1},$$

где $\theta(t)$ - логарифмическая объёмная деформация; $\mathcal{E}_\alpha(t)$ – компоненты девиатора логарифмических деформаций ($\alpha = 1, 2, 3$); $\sigma(t)$ – среднее истинное напряжение; $S_\alpha(t)$ – главные компоненты девиатора истинных напряжений; $K(t)$, $G(t)$ – ядра объёмной и сдвиговой релаксации соответственно; K_1, \dots, K_{N+1} , G_1, \dots, G_{N+1} , τ_1, \dots, τ_N – набор неотрицательных параметров ядер; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ – функции старения; $t_1(t)$, $t_2(t)$ – приведённые времена.

Соотношения (11), (12) могут быть представлены в следующем виде:

$$\sigma_\alpha(t) = \varphi_1(t) \sum_{n=1}^{N+1} K_n \theta^{(n)}(t) + 2\varphi_2(t) \sum_{n=1}^{N+1} G_n \mathcal{E}_\alpha^{(n)}(t), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \theta^{(n)}(t) &= \int_0^t \exp\left[-(t_1(t) - t_1(\tau)) / \tau_n\right] d\theta(\tau), \\ \mathcal{E}_\alpha^{(n)}(t) &= \int_0^t \exp\left[-(t_2(t) - t_2(\tau)) / \tau_n\right] d\mathcal{E}_\alpha(\tau), \end{aligned} \quad (14)$$

где $\alpha = 1, 2, 3$; $n = 1, \dots, N+1$; $\tau_{N+1} = \infty$.

Каждому из уравнений (11) может быть поставлена в соответствие структурная модель в виде системы параллельно соединённых одномерных стареющих вязкоупругих элементов типа “пружина-демпфер” с синхронным изменением коэффициентов жёсткости упругих элементов, описываемым функцией $\varphi_k(t)$, и синхронным изменением коэффициентов вязкости демпфирующих элементов, описываемым функцией $f_k(t)$. В рамках этих структурных моделей функции $\theta^{(n)}(t)$ и $\mathcal{E}_\alpha^{(n)}(t)$ могут интерпретироваться, как деформация n-го упругого элемента соответствующей модели.

В п.3.3 приведён вывод инкрементальных соотношений НЭТСВУМ.

Для вывода инкрементальных соотношений на основе соотношений наследственного типа (13), (14) принимается допущение о постоянстве скоростей логарифмических деформаций и скоростей изменения приведенных времён $t_1(\tau)$, $t_2(\tau)$ на интервале $[t, t+\Delta t]$:

$$\begin{aligned}\varepsilon_\alpha(\tau) &= \varepsilon_\alpha(t) + \frac{\Delta\varepsilon_\alpha}{\Delta t}(\tau - t), \quad \Delta\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha(t+\Delta t) - \varepsilon_\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ t_k(\tau) &= t_k(t) + \frac{\Delta t_k}{\Delta t}(\tau - t), \quad \Delta t_k = t_k(t+\Delta t) - t_k(t), \quad k = 1, 2.\end{aligned}\quad (15)$$

При этом допущении функции $\theta^{(n)}(\tau)$ и $\mathcal{E}_\alpha^{(n)}(\tau)$ на интервале $[t, t+\Delta t]$ будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\theta^{(n)}(\tau) &= \theta^{(n)}(t) \exp\left(-\frac{\Delta t_1}{\Delta t} \frac{\tau - t}{\tau_n}\right) + \frac{\Delta\theta}{\Delta t}(\tau - t) F_1\left(-\frac{\Delta t_1}{\Delta t} \frac{\tau - t}{\tau_n}\right), \\ \mathcal{E}_\alpha^{(n)}(\tau) &= \mathcal{E}_\alpha^{(n)}(t) \exp\left(-\frac{\Delta t_2}{\Delta t} \frac{\tau - t}{\tau_n}\right) + \frac{\Delta\mathcal{E}_\alpha}{\Delta t}(\tau - t) F_1\left(-\frac{\Delta t_2}{\Delta t} \frac{\tau - t}{\tau_n}\right),\end{aligned}\quad (16)$$

где $F_1(x) = \frac{(1 - e^{-x})}{x}$; $\Delta\theta = \Delta\varepsilon_1 + \Delta\varepsilon_2 + \Delta\varepsilon_3$; $\Delta\mathcal{E}_\alpha = \Delta\varepsilon_\alpha - \Delta\theta/3$; $\alpha = 1, 2, 3$.

С учётом (16) определяющие уравнения (13) могут быть представлены в следующем инкрементальном виде:

$$\begin{aligned}\sigma_\alpha(t+\Delta t) &= \varphi_1(t+\Delta t)\sigma^*(t, \Delta t_1) + \varphi_2(t+\Delta t)S_\alpha^*(t, \Delta t_2) + \\ &+ \left[\varphi_1(t+\Delta t)K^*(\Delta t_1) - 2/3\varphi_2(t+\Delta t)G^*(\Delta t_2)\right]\Delta\theta + 2\varphi_2(t+\Delta t)G^*(\Delta t_2)\Delta\varepsilon_u,\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}\sigma^*(t, \Delta t_1) &= \sum_{n=1}^{N+1} K_n \theta^{(n)}(t) \exp\left(-\frac{\Delta t_1}{\tau_n}\right), \quad S_\alpha^*(t, \Delta t_2) = 2 \sum_{n=1}^{N+1} G_n \mathcal{E}_\alpha^{(n)}(t) \exp\left(-\frac{\Delta t_2}{\tau_n}\right), \\ K^*(\Delta t_1) &= \sum_{n=1}^{N+1} K_n F_1\left(\frac{\Delta t_1}{\tau_n}\right), \quad G^*(\Delta t_2) = \sum_{n=1}^{N+1} G_n F_1\left(\frac{\Delta t_2}{\tau_n}\right).\end{aligned}\quad (18)$$

В рамках принятых допущений выражение для приращения удельной рассеянной энергии ΔA_* (на единицу объёма недеформированной частицы) может быть представлено следующим образом:

$$\Delta A_* = \int_t^{t+\Delta t} W_*(\tau) \exp(\theta(\tau)) d\tau = \psi_1(t + \delta_1 \Delta t) \Delta t_1 \sum_{n=1}^N \frac{K_n}{\tau_n} [\bar{\theta}^{(n)}]^2 + 3\psi_2(t + \delta_2 \Delta t) \Delta t_2 \sum_{n=1}^N \frac{G_n}{\tau_n} [\bar{\varepsilon}_u^{(n)}]^2, \quad (19)$$

где $\psi_1(\tau) = \varphi_1(\tau) \exp(\theta(\tau))$, $\psi_2(\tau) = \varphi_2(\tau) \exp(\theta(\tau))$;

$$[\bar{\theta}^{(n)}]^2 = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} [\theta^{(n)}(\tau)]^2 d\tau = [\theta^{(n)}(t)]^2 F_1\left(\frac{2\Delta t_1}{\tau_n}\right) + \theta^{(n)}(t) (\Delta\theta) F_1^2\left(\frac{\Delta t_1}{\tau_n}\right) + (\Delta\theta)^2 F_2\left(\frac{\Delta t_1}{\tau_n}\right),$$

$$[\bar{\varepsilon}_u^{(n)}]^2 = \frac{2}{3\Delta t} \sum_{i=1}^3 \int_t^{t+\Delta t} [\mathcal{E}_i^{(n)}(\tau)]^2 d\tau = \quad (20)$$

$$= \frac{2}{3} \sum_{i=1}^3 \left[[\mathcal{E}_i^{(n)}(t)]^2 F_1\left(\frac{2\Delta t_2}{\tau_n}\right) + \mathcal{E}_i^{(n)}(t) (\Delta\mathcal{E}_i) F_1^2\left(\frac{\Delta t_2}{\tau_n}\right) + (\Delta\mathcal{E}_i)^2 F_2\left(\frac{\Delta t_2}{\tau_n}\right) \right],$$

$$F_2(x) = \frac{F_1(2x) - 2F_1(x) + 1}{x^2}.$$

Величины δ_1, δ_2 лежат в диапазоне от 0 до 1 (использовалась теорема о среднем).

Для перехода к тензорному представлению инкрементальных соотношений (17), (19), через $\mathbf{e}_\alpha(\tau)$ ($\alpha=1,2,3$) обозначается ортонормированный базис из главных направлений тензора истинных напряжений в момент времени τ и введены следующие тензоры:

$$\boldsymbol{\sigma}(\tau) = \sum_{\alpha=1}^3 \sigma_\alpha(\tau) \mathbf{e}_\alpha(\tau) \otimes \mathbf{e}_\alpha(\tau), \quad \mathfrak{A}^{(n)}(\tau) = \sum_{\alpha=1}^3 \mathfrak{A}_\alpha^{(n)}(\tau) \mathbf{e}_\alpha(\tau) \otimes \mathbf{e}_\alpha(\tau),$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t(t+\Delta t) = \sum_{\alpha=1}^3 \Delta \varepsilon_\alpha \mathbf{e}_\alpha(t+\Delta t) \otimes \mathbf{e}_\alpha(t+\Delta t) = \sum_{\alpha=1}^3 \ln \left(\frac{\lambda_\alpha(t+\Delta t)}{\lambda_\alpha(t)} \right) \mathbf{e}_\alpha(t+\Delta t) \otimes \mathbf{e}_\alpha(t+\Delta t), \quad (21)$$

где \otimes - символ операции тензорного произведения двух векторов; тензор $\boldsymbol{\sigma}(\tau)$ является тензором истинных напряжений, а тензор $\boldsymbol{\varepsilon}_t(t+\Delta t)$ - левым тензором логарифмических деформаций по отношению к конфигурации в момент времени t . Обозначим через $\mathbf{R}_t(t+\Delta t)$ ортогональный тензор поворота, переводящий базис $\mathbf{e}_\alpha(t)$ в базис $\mathbf{e}_\alpha(t+\Delta t)$, тогда:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_\alpha(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_t(t+\Delta t) \mathbf{e}_\alpha(t), \\ \mathbf{e}_\alpha(t+\Delta t) \otimes \mathbf{e}_\alpha(t+\Delta t) &= \mathbf{R}_t(t+\Delta t) \mathbf{e}_\alpha(t) \otimes \mathbf{e}_\alpha(t) \mathbf{R}_t^T(t+\Delta t). \end{aligned} \quad (22)$$

С учётом введённых тензорных обозначений (21) и соотношений связи (22) между элементами тензорных базисов $\mathbf{e}_\alpha(t+\Delta t) \otimes \mathbf{e}_\alpha(t+\Delta t)$ и $\mathbf{e}_\alpha(t) \otimes \mathbf{e}_\alpha(t)$ инкрементальные соотношения (17) могут быть представлены в следующем виде:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}(t+\Delta t) &= \varphi_1(t+\Delta t) \boldsymbol{\sigma}^*(t, \Delta t_1) \mathbf{I} + \varphi_2(t+\Delta t) \mathbf{R}_t(t+\Delta t) \mathbf{S}^*(t, \Delta t_2) \mathbf{R}_t^T(t+\Delta t) + \\ &+ \left[\varphi_1(t+\Delta t) K^*(\Delta t_1) - 2/3 \varphi_2(t+\Delta t) G^*(\Delta t_2) \right] \theta_t(t+\Delta t) \mathbf{I} \\ &+ 2\varphi_2(t+\Delta t) G^*(\Delta t_2) \boldsymbol{\varepsilon}_t(t+\Delta t), \end{aligned} \quad (23)$$

где \mathbf{I} - единичный тензор; $\theta_t(t+\Delta t) = \Delta \theta$ - след тензора $\boldsymbol{\varepsilon}_t(t+\Delta t)$;

$$\mathbf{S}^*(t, \Delta t_2) = 2 \sum_{n=1}^{N+1} G_n \exp \left(-\frac{\Delta t_2}{\tau_n} \right) \mathfrak{A}^{(n)}(t).$$

В инкрементальном соотношении (23) величины $\theta^{(n)}(t)$ и $\mathfrak{A}^{(n)}(t)$ играют роль параметров состояния. После решения краевой задачи на текущем временном шаге эти параметры должны вычисляться для момента времени $t+\Delta t$ с использованием соотношений, вытекающих из скалярных соотношений (16) и определений (21) тензоров $\mathfrak{A}^{(n)}(t+\Delta t)$ и $\boldsymbol{\varepsilon}_t(t+\Delta t)$:

$$\begin{aligned} \theta^{(n)}(t+\Delta t) &= \theta^{(n)}(t) \exp \left(-\frac{\Delta t_1}{\tau_n} \right) + \theta_t(t+\Delta t) F_1 \left(-\frac{\Delta t_1}{\tau_n} \right), \\ \mathfrak{A}_\alpha^{(n)}(t+\Delta t) &= \exp \left(-\frac{\Delta t_2}{\tau_n} \right) \mathbf{R}_t(t+\Delta t) \mathfrak{A}_\alpha^{(n)}(t) \mathbf{R}_t^T(t+\Delta t) + F_1 \left(-\frac{\Delta t_2}{\tau_n} \right) \mathfrak{A}_t(t+\Delta t), \\ \mathfrak{A}_t(t+\Delta t) &= \boldsymbol{\varepsilon}_t(t+\Delta t) - \theta_t(t+\Delta t) \mathbf{I} / 3. \end{aligned} \quad (24)$$

Тензорные аналоги выражений (20) для величин $\left[\bar{\varepsilon}_u^{(n)} \right]^2$, входящих в выражение (19) для приращения удельной рассеянной энергии ΔA_* , будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \left[\bar{\varepsilon}_u^{(n)} \right]^2 &= \frac{2}{3} F_1 \left(\frac{2\Delta t_2}{\tau_n} \right) \text{tr} \left[\mathfrak{E}^{(n)}(t) \right]^2 + \frac{2}{3} F_2 \left(\frac{\Delta t_2}{\tau_n} \right) \text{tr} \left[\mathfrak{E}_t(t+\Delta t) \right]^2 + \\ &+ \frac{2}{3} F_1^2 \left(\frac{\Delta t_2}{\tau_n} \right) \text{tr} \left[\mathbf{R}_t(t+\Delta t) \mathfrak{E}_i^{(n)}(t) \mathbf{R}_t^T(t+\Delta t) \mathfrak{E}_i^{(n)}(t+\Delta t) \right], \end{aligned}$$

где tr – след тензора.

Полученные для частного случая деформирования, когда главные оси тензора истинных напряжений “вморожены” в материал частицы, инкрементальные определяющие соотношения (23) в сочетании с соотношениями (24) для скалярных $\theta^{(n)}(t)$ и тензорных $\mathfrak{E}^{(n)}(t)$ параметров состояния допускают естественное обобщение на общий случай деформирования. При этом $\varepsilon_t(t+\Delta t)$ следует трактовать, как логарифм левого тензора растяжения по отношению к конфигурации в момент времени t , а тензор $\mathbf{R}_t(t+\Delta t)$ – как тензор жёсткого поворота частицы при её переходе от конфигурации в момент времени t к конфигурации в момент времени $t+\Delta t$.

Алгоритм численного решения квазистатической краевой задачи с использованием инкрементальных соотношений эндохронной модели.

Для решения краевой задачи в момент времени $t+\Delta t$ используется слабая форма уравнений равновесия для этого момента времени:

$$\begin{aligned} \int_{V(t+\Delta t)} \text{tr} \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t+\Delta t) \mathbf{d}(\mathbf{x}) \right] dV - \int_{V(t+\Delta t)} \rho(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t+\Delta t) \mathbf{v}(\mathbf{x}) dV - \\ - \int_{S(t+\Delta t)} \left[\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t+\Delta t) \mathbf{n}(\mathbf{x}) \right] \mathbf{v}(\mathbf{x}) dS = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

где $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t+\Delta t)$ – поле тензора истинных напряжений в момент времени $t+\Delta t$; $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t+\Delta t)$ – поле вектора массовых сил; $\rho(\mathbf{x})$ – поле плотности в момент времени $t+\Delta t$; $V(t+\Delta t)$ – объем, занимаемый телом в момент времени $t+\Delta t$; $S(t+\Delta t)$ – поверхность тела в момент времени $t+\Delta t$; $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности $S(t+\Delta t)$; $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ – поле вектора виртуальной скорости; $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ – поле тензора скоростей деформаций, соответствующее полю $\mathbf{v}(\mathbf{x})$; $\mathbf{d}(\mathbf{x}) = \left(\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}) + (\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x}))^T \right) / 2$.

Уравнение (25) должно удовлетворяться для любого кусочно-гладкого поля виртуальных скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, удовлетворяющего однородным граничным условиям на тех участках границы тела, где заданы граничные условия в перемещениях.

После замены $\mathbf{x} = \boldsymbol{\chi}_i(\mathbf{X})$, соответствующей переходу от конфигурации в момент t к конфигурации в момент $t+\Delta t$, уравнение (25) примет вид:

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \text{tr} \left[\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{X}, t+\Delta t) \mathbf{d}^0(\mathbf{X}) \right] J_t(\mathbf{X}) dV^0 - \int_{V(t)} \rho^0(\mathbf{X}) \mathbf{b}^0(\mathbf{X}) \mathbf{v}^0(\mathbf{X}) dV^0 - \\ - \int_{S(t)} \left[\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{X}, t+\Delta t) \mathbf{F}_t^{-T}(\mathbf{X}) \mathbf{n}^0(\mathbf{X}) \right] \mathbf{v}^0(\mathbf{X}) J_t(\mathbf{X}) dS^0 = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{X}, t + \Delta t) = \boldsymbol{\sigma}^0(\boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X}), t + \Delta t)$ – тензор напряжений в момент времени $t + \Delta t$ в частице, которая в момент времени t занимала пространственное положение \mathbf{X} ; $\mathbf{F}_t^{-T}(\mathbf{X}) = \nabla \boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})$ – тензор градиента деформации (по отношению к конфигурации в момент t); $\rho^0(\mathbf{X})$ – поле плотности в момент времени t ; $\mathbf{n}^0(\mathbf{X})$ – единичный вектор внешней нормали к поверхности $S(t)$:

$$J_t(\mathbf{X}) = \det(\mathbf{F}_t(\mathbf{X})), \quad \mathbf{b}^0(\mathbf{X}) = \mathbf{b}(\boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X}), t + \Delta t), \quad \mathbf{v}^0(\mathbf{X}) = \mathbf{v}(\boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})),$$

$$\mathbf{d}^0(\mathbf{X}) = \mathbf{d}^0(\boldsymbol{\chi}_t(\mathbf{X})) = \left[(\nabla \mathbf{v}^0(\mathbf{X})) \mathbf{F}_t^{-1}(\mathbf{X}) + \mathbf{F}_t^{-T}(\mathbf{X}) (\nabla \mathbf{v}^0(\mathbf{X}))^T \right] / 2.$$

“Приведенное” к конфигурации в момент времени t поле $\boldsymbol{\sigma}^0(\mathbf{X}, t + \Delta t)$ тензора истинных напряжений в момент $t + \Delta t$, естественно, зависит от градиента деформаций $\mathbf{F}_t(\mathbf{X})$. Эта зависимость описывается инкрементальными соотношениями (23). Следует отметить, что эндохронная модель базируется на допущении о том, что мгновенные значения функций старения $\varphi_1(\tau)$, $\varphi_2(\tau)$ и скоростей изменения приведенных времён $dt_1(\tau)/d\tau$, $dt_2(\tau)/d\tau$ зависят от мгновенных значений некоторых параметров состояния, т.е.

$$\varphi_k(\tau) = F_k(p_i^{(e)}(\tau), p_m^{(i)}(\tau)), \quad (k=1,2); \quad dt_k(\tau)/d\tau = \Phi_k(p_i^{(e)}(\tau), p_m^{(i)}(\tau)), \quad (k=1,2),$$

где $p_i^{(e)}(\tau)$ – набор “внешних” параметров состояния, не зависящих от процесса нагружения (температура, влажность, степень полимеризации); $p_m^{(i)}(\tau)$ – набор деформационных, силовых и/или энергетических параметров, зависящих от процесса нагружения. Из этого следует, что входящие в инкрементальные соотношения (23) величины $\varphi_k(t + \Delta t)$ и Δt_k ($k=1,2$), вообще говоря, зависят от решения задачи в конце временного шага. В применяемом алгоритме используется аналог явной схемы, т.е. величины $\varphi_k(t + \Delta t)$ и Δt_k заменяются в соотношениях (23) их оценками, полученными на основе имеющихся к моменту времени t предыстории параметров состояния.

При численном решении уравнения (25) методом конечных элементов используются аппроксимации функций $\boldsymbol{\chi}_i(\mathbf{X})$ и $\mathbf{v}^0(\mathbf{X})$, линейно зависящие от наборов соответствующих узловых переменных:

$$x_i(\mathbf{X}) = X_i + \sum_N N_N(\mathbf{X}) u_{3N-3+i}, \quad v_i^0(\mathbf{X}) = \sum_N N_N(\mathbf{X}) v_{3N-3+i}, \quad (27)$$

где $N_N(\mathbf{X})$ – набор финитных интерполирующих функций, определяемый сеткой конечных элементов и типом этих элементов; u_M – набор узловых перемещений; v_M – набор узловых виртуальных скоростей.

После подстановки аппроксимации (27) в уравнение (26), последнее сводится к линейной комбинации узловых перемещений u_M . Полученная система нелинейных уравнений относительно узловых перемещений u_M решается методом Ньютона.

В п.3.4 с использованием данного алгоритма решены задачи о толстостенной вязкоупругой трубе, заключённой в тонкую упругую оболочку. В первой задаче внутренний радиус подвержен осесимметричному расширению с постоянной

радиальной скоростью, во второй задаче цилиндр подвержен постоянному внутреннему давлению. Обе задачи решаются с помощью как линейной, так и нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов. Также решаются задачи о действии внутреннего давления на стареющий вязкоупругий цилиндр, заключённый в упругую оболочку, с неосесимметричным вырезом типа “мальтийский крест”. Дается сравнение решений геометрически линейной, но физически нелинейной задачи, а также задачи как геометрически нелинейной (с логарифмической мерой деформации), так и физически нелинейной задачи.

Задача о деформировании вязкоупругой трубы, заключённой в упругую оболочку, при расширении её внутреннего радиуса с постоянной скоростью.

Рассматривается толстостенный вязкоупругий цилиндр, заключённый в тонкую оболочку. В задаче рассматривается плоская деформация. Внешний радиус цилиндра равен $R = 60 \text{ см}$, внутренний $r = 15 \text{ см}$. Считается, что материал цилиндра имеет постоянный коэффициент Пуассона $\nu = 0.473$, а также характеристики ядра сдвиговой и объёмной релаксации $2G(t)$, $K(t) = 2G(t) \frac{(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$ [МПа]. Оболочка является упругой с характеристиками модуля Юнга $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, $\nu = 0.3$ и толщиной $d = 0.4 \text{ см}$. Граничные условия таковы, что внутренняя граница цилиндра расширяется равномерно по радиусу со скоростью $V = 0.2 \text{ см/с}$, а внешняя поверхность свободна от нагрузок.

Задача решается в двух вариантах (рисунок 3) в первом материал вязкоупругого цилиндра описывается линейной вязкоупругой теорией, во втором нелинейной эндохронной теорией стареющих вязкоупругих материалов (НЭТСВУМ) с функцией старения $\varphi(t) = \exp(-0.5 \cdot \varepsilon_u)$ и функцией изменения вязкости $f(t) = \exp(-1 \cdot \varepsilon_u - 1 \cdot A_*)$, где ε_u - интенсивность деформаций, а A_* - удельная рассеянная энергия. В результате расширения в материале в обоих случаях возникают конечные деформации. Мера деформаций в обеих задачах логарифмическая.

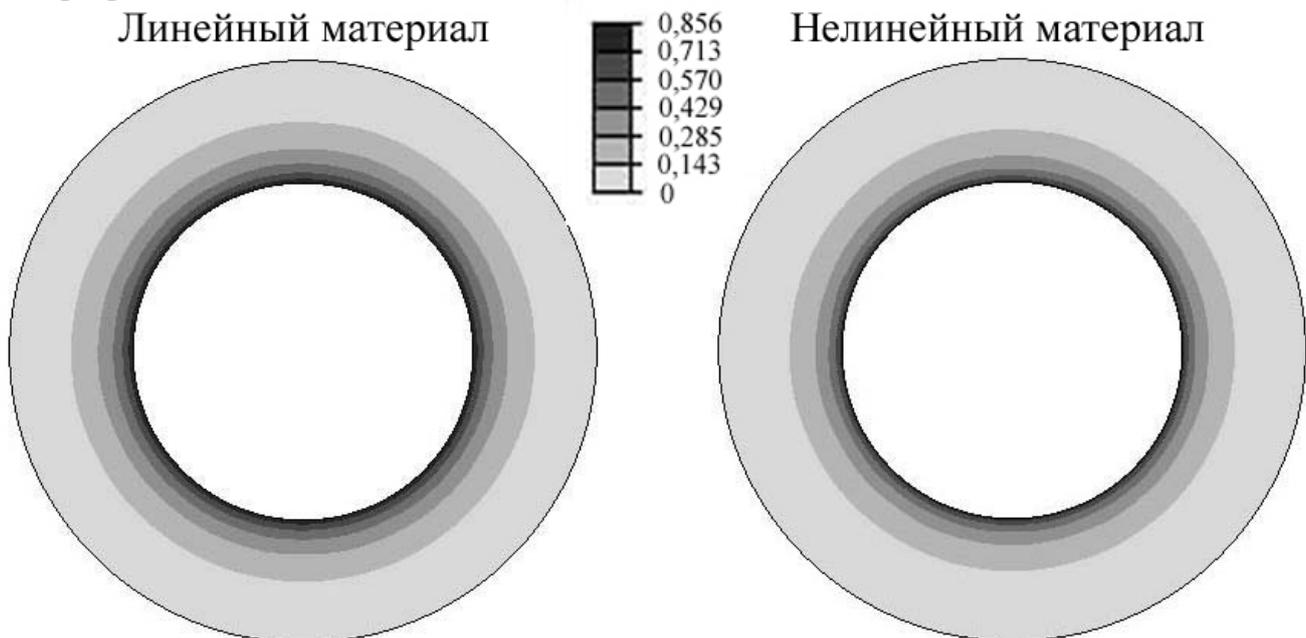


Рисунок 3. Распределение кольцевой деформации ε_θ (логарифмическая мера) на 100 секунде.

В результате расчётов (рисунок 3) оказалось, что материал, прилегающий к внутреннему радиусу, имеет кольцевую деформацию в нелинейном случае больше, чем в линейном, при условии, что внутренняя граница в обоих случаях равномерно расширялась при одинаковых скоростях. В нелинейном случае это можно объяснить тем, что материал у внутреннего радиуса старел быстрее, чем материал, удалённый от внутреннего радиуса. Таким образом, в нелинейном случае старение привело к большему деформированию материала, прилегающего к внутреннему радиусу, чем в линейном.

Задача о деформировании вязкоупругой трубы, заключённой в упругую оболочку и находящейся под действием постоянного внутреннего давления.

Рассматривается задача плоского деформирования толстостенного вязкоупругого цилиндра, заключённого в тонкую упругую оболочку. На цилиндр действует постоянное внутреннее давление $p = 0.25 \text{ МПа}$, внешняя граница оболочки свободна от нагрузок.

Все материальные функции берутся такими же, как и в предыдущей задаче о трубе при расширении её внутреннего радиуса с постоянной скоростью.

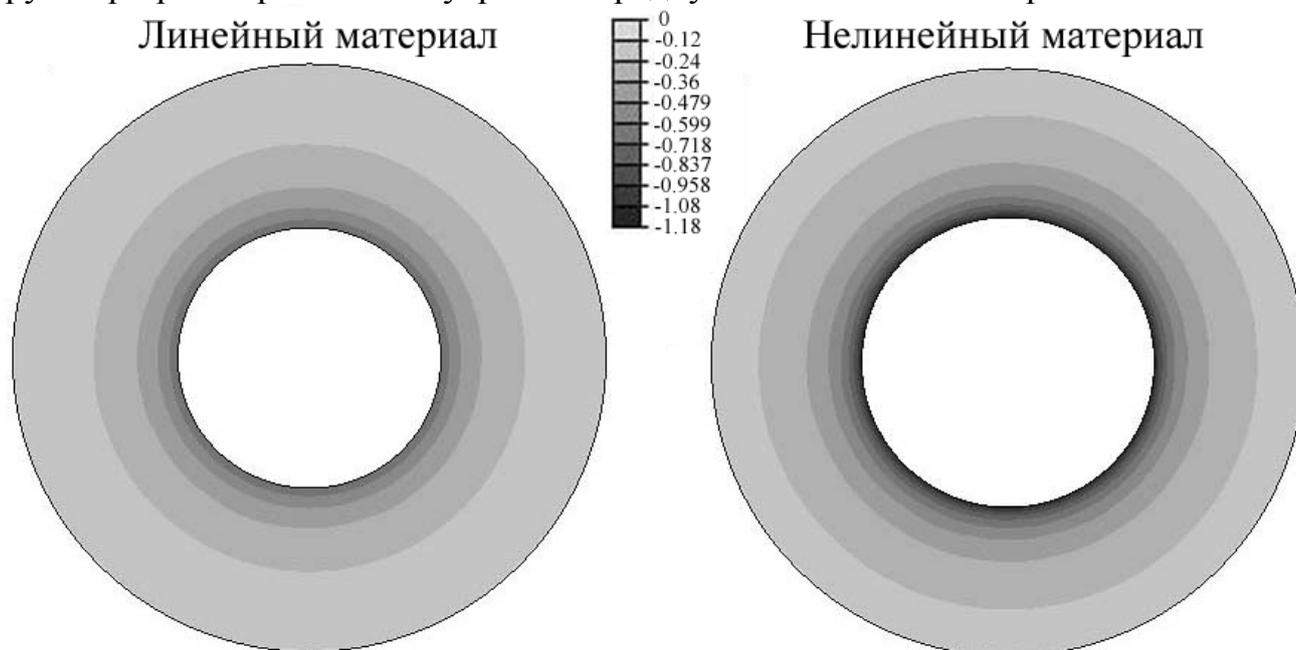


Рисунок 4. Распределение радиальной деформации ε_r (логарифмическая мера) на 100 секунде.

Расчёты показали (рисунок 4), что цилиндр, материал которого описывается НЭТСВУМ, деформируется (по абсолютному значению) больше, чем цилиндр из линейного вязкоупругого материала. Это объясняется старением нелинейного материала, в результате чего, его прочностные характеристики уменьшаются и он деформируется сильнее, чем линейный материал.

Задача о деформировании вязкоупругого, заключённого в упругую оболочку цилиндра, с вырезом типа "мальтийский крест" под действием внутреннего давления.

Задача решается в двух вариантах (рисунок 5,6,7) в первом материал геометрически линейный физически нелинейный, во втором материал геометрически (логарифмическая мера деформаций) и физически нелинейный.

Материал цилиндра имеет характеристики ядра сдвиговой и объёмной релаксации:

Для логарифмической меры деформации использовались ядра $2G_{\text{лог}}(t)$, $K_{\text{лог}}(t)$

$$2G_{\text{лог}}(t) = 0.0275 + 3.17e^{-\frac{t}{0.502}} + 0.00777e^{-\frac{t}{1.06}} + 0.0778e^{-\frac{t}{2.08}} + 0.117e^{-\frac{t}{12.3}} + 0.125e^{-\frac{t}{67.1}} \text{ МПа}, t[\text{мин}].$$

$$K_{\text{лог}}(t) = 2G_{\text{лог}}(t) \frac{(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \text{ МПа}$$

Для линейной меры деформаций использовалось ядра $2G_{\text{лин}}(t)$, $K_{\text{лин}}(t)$

$$2G_{\text{лин}}(t) = 0.045 + 0.692e^{-\frac{t}{0.0556}} + 0.541e^{-\frac{t}{0.511}} + 2.322e^{-\frac{t}{0.595}} + 0.277e^{-\frac{t}{0.637}} + 0.00983e^{-\frac{t}{9.05}} \text{ МПа}, t[\text{мин}].$$

$$K_{\text{лин}}(t) = 2G_{\text{лин}}(t) \frac{(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \text{ МПа},$$

а также постоянный коэффициент Пуассона $\nu = 0.473$,

В отличие от п.2.5 о идентификации НЭТСВУМ из опытов на растяжение образца с ниспадающим участком напряжений, при решении задач с конечными деформациями использовались кривые растяжения, в которых деформация растяжения при разрушении достигает 300%.

$$\varphi(t) = \exp(-c_1 \cdot \varepsilon_u), f(t) = \exp(-d_1 \cdot \varepsilon_u - d_2 \cdot A_*), \text{ где } c_1 = 0.5, d_1 = 1, d_2 = 1 \frac{1}{\text{МПа}}.$$

Оболочка является упругой с характеристиками модуля Юнга: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$, коэффициентом Пуассона $\nu = 0.3$, толщиной $d = 0.4 \text{ см}$.

Внутреннее давление $P(t) = 0.7 \cdot H(t) \text{ МПа}$.

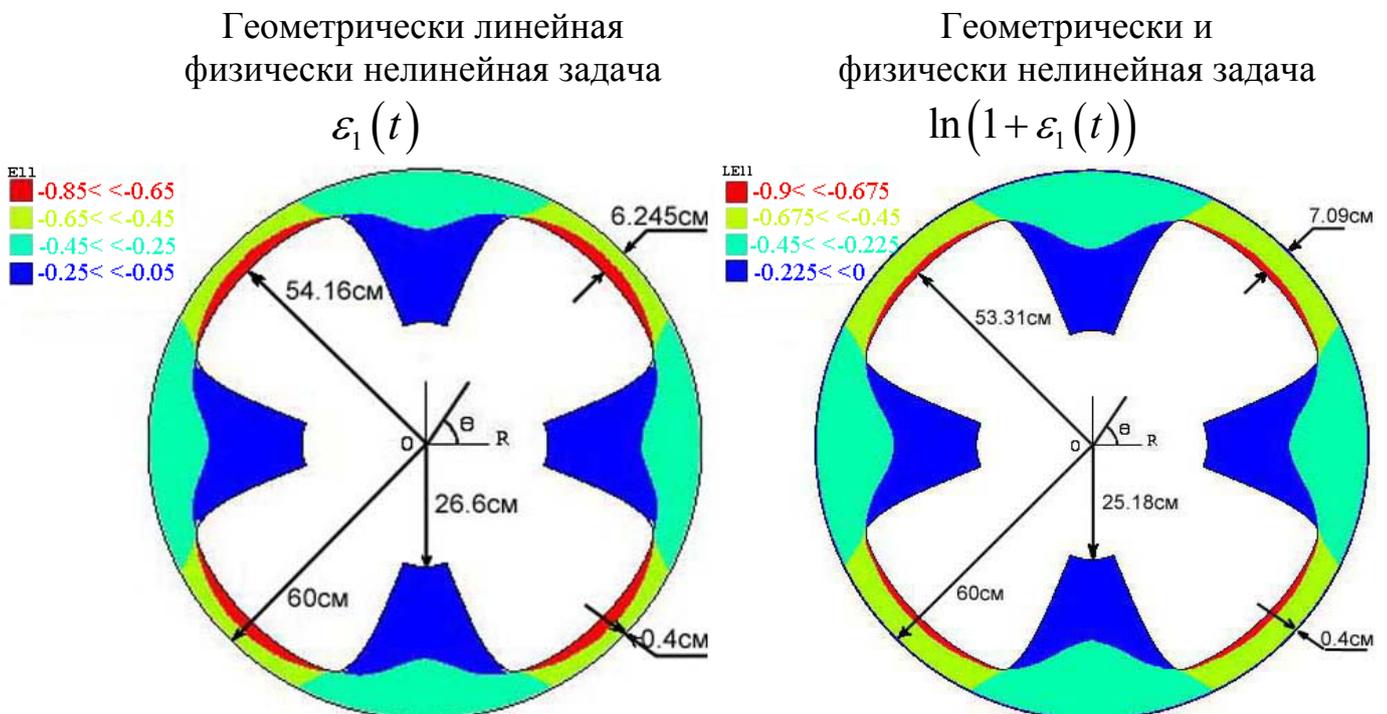


Рисунок 5. Значения главных минимальных деформаций ε_1 в момент времени $t = 10 \text{ мин}$.

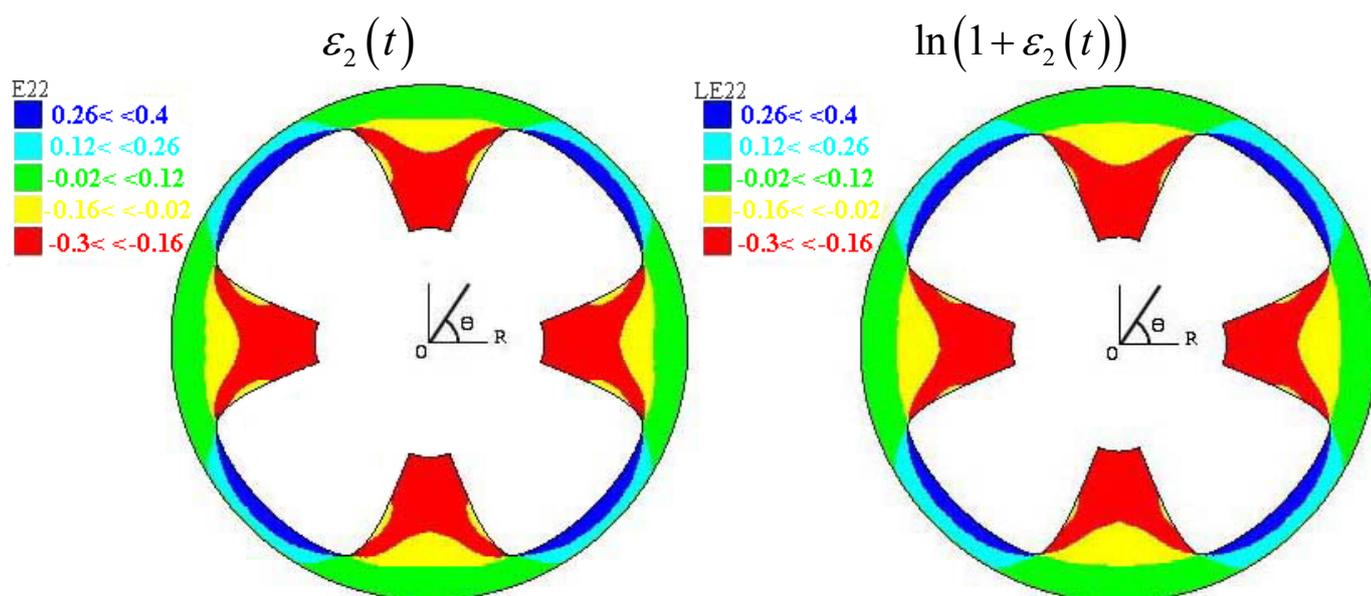


Рисунок 6. Значения главных максимальных деформаций ε_2 в момент времени $t = 10$ мин.

Сравнение границ цилиндра до деформации и после (рисунок 7).

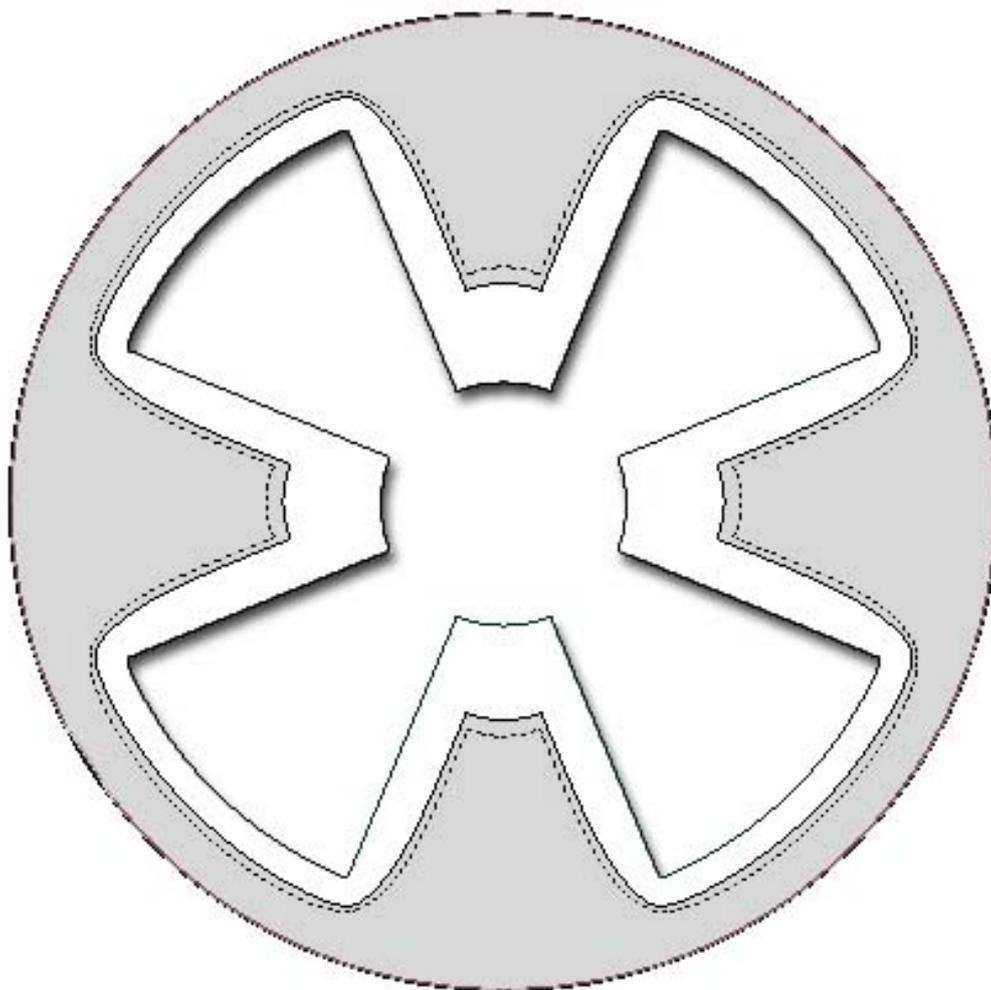


Рисунок 7. Цилиндр до деформации и после. Сплошной линией обозначена граница при $t = 10$ мин при расчете геометрически нелинейной задачи (логарифмическая мера деформаций), а пунктиром - граница при $t = 10$ мин при расчёте геометрически линейной задачи.

Выводы и рекомендации

1. Для применения метода аппроксимаций А.А.Ильюшина в расчётах конструкций, сделанных из наполненных полимерных материалов с низкой адгезионной прочностью, механические характеристики которых зависят от конкретных деформационных процессов и, следовательно, не являются универсальными, рекомендуется ядра релаксации и ползучести определять из одних и тех же опытов, в которых процесс нагружения близок к происходящим в конструкциях.
2. При использовании генетического алгоритма для идентификации нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов с большим числом неизвестных параметров рекомендуется начальные области допустимого изменения варьируемых коэффициентов выбирать, используя результаты определения ядер релаксации, полученные с применением метода итераций в линейной теории вязкоупругости.
3. Описание ядра релаксации при немонотонной зависимости напряжений от деформаций рекомендуется проводить с использованием НЭТСВУМ, при которой сохраняется возможность использования структурно-энергетического анализа, поскольку все коэффициенты в аппроксимирующих отрезках рядов Прони остаются положительными.
4. Одновременный учёт физической и геометрической нелинейности при деформировании наполненных полимерных материалов рекомендуется проводить на базе НЭТСВУМ с использованием логарифмических мер конечных деформаций. В этом случае инкрементальные представления определяющих соотношений позволяют при малых шагах по времени упрощать рекуррентные зависимости между истинными главными напряжениями и логарифмическими деформациями, а также приращения удельной рассеянной энергии, используемой для оценки повреждённости материала.
5. При расчётах конструкций из наполненных полимерных материалов, имеющих зоны концентрации напряжений, рекомендуется вычислять значения максимальных величин удельной рассеянной энергии и удельной поглощённой энергии, указывающих на зоны максимальной повреждённости конструкций. Проведённые в диссертации расчёты показали, что эти зоны совпадают с зонами максимальных значений напряжений и деформаций.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Быков Д.Л. Голиков С.Н. Оптимизация методов определения материальных функций нелинейных вязкоупругих материалов // Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2005.
2. Быков Д.Л. Голиков С.Н. Инкрементальные соотношения нелинейной эндохронной теории и их приложения к решению задач вязкоупругости // Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2006.
3. Быков Д.Л. Голиков С.Н. Структурно-энергетический анализ напряжённо деформированного состояния вязкоупругого цилиндра с неосесимметричным вырезом типа "мальтийский крест" // Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2007.
4. Быков Д.Л. Голиков С.Н. Плоская деформация подкреплённого вязкоупругого цилиндра с неосесимметричным вырезом при учёте его физической и геометрической нелинейности // Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008.
5. Быков Д.Л. Голиков С.Н. Идентификация нелинейной эндохронной теории стареющих вязкоупругих материалов при немонотонной зависимости напряжений от деформаций методом генетического алгоритма // Тезисы докладов. Научная конференция "Ломоносовские чтения". Секция механики. М.: Изд-во Моск. ун-та, 2008.
6. Быков Д.Л. Голиков С.Н. Плоская неосесимметричная деформация вязкоупругого цилиндра с учётом его физической и геометрической нелинейности // Вестник Московского Университета, серия 1, Математика. Механика. 2009 №6 С.41-45.