Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 510.52+519.714.27

Подольский Владимир Владимирович

ОЦЕНКИ ВЕСОВ ПЕРСЕПТРОНОВ (ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПОРОГОВЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ)

01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2009

Работа выполнена на кафедре математической логики и теории алгоритмов Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Николай Константинович Верещагин.
Официальные оппоненты:	чл.-корр. РАН, доктор физико-математических наук Александр Александрович Разборов;
	кандидат физико – математических наук, Михаил Николаевич Вялый.
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 11 декабря 2009 г. в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государст-венном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14-й этаж).

Автореферат разослан 11 ноября 2009 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы.

Актуальность темы. Работа относится к области сложности вычислений, одному из разделов математической логики и теории алгоритмов. Более конкретно, мы исследуем некоторый способ реализации булевых функций многочленами и вопросы сложности такой реализации.

Реализация булевых функций действительными многочленами играет важную роль в теории сложности, начиная от сложности вычислений и заканчивая квантовыми вычислениями и теорией обучения[1,2,3,4]. В диссертации мы рассматриваем один из таких способов реализации, а именно *пороговые элементы* и связанные с ними меры сложности: *пороговую степень*, *пороговый вес* и *пороговую длину*.

Булева функция $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется *знаковой функцией* целочисленного многочлена p степени d от n переменных, если

$$\begin{cases} f(x) = 1 \Rightarrow p(x) > 0 \\ f(x) = 0 \Rightarrow p(x) < 0 \end{cases}$$

для всех $x \in \{0,1\}^n$. При этом многочлен p называется *пороговым элементом* степени d для булевой функции $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. *Весом* порогового элемента называется сумма модулей коэффициентов многочлена p, а *длиной* порогового элемента называется число мономов в многочлене p. Заметим, что обычно пороговым элементом называют то, что мы называем пороговым элементом степени 1. Чтобы избежать путаницы, мы будем называть пороговые элементы степени 1 *линейными пороговыми элементами.*

Пороговой степенью булевой функции f называется минимальная степень порогового элемента для f. *Пороговым весом* булевой функции f называется минимальный вес порогового элемента для f. *Пороговой длиной* булевой функции f называется минимальная длина порогового элемента для f.

[1] Richard Beigel. The polynomial method in circuit complexity. In *Proc. of the Eigth Annual Conference on Structure in Complexity Theory*, pages 82–95, 1993.

[2] Michael E. Saks. Slicing the hypercube. *Surveys in Combinatorics*, pages 211–255, 1993.

[3] Harry Buhrman and Ronald de Wolf. Complexity measures and decision tree complexity: A survey. *Theor. Comput. Sci.*, 288(1):21–43, 2002.

[4] Alexander A. Sherstov. Communication lower bounds using dual polynomials. *Bulletin of the EATCS*, 95:59–93, 2008.

Кроме обозначений $\{0,1\}$ для значений булевых переменных мы будем также пользоваться обозначениями $\{-1,+1\}$, где -1 соответствует "истине". В этом случае *пороговым элементом* степени d для функции $f\colon \{-1,+1\}^n \to \{-1,+1\}$ называется целочисленный многочлен p степени d от n переменных, такой что

$$\begin{cases} f(x) = 1 \Rightarrow p(x) > 0 \\ f(x) = -1 \Rightarrow p(x) < 0 \end{cases}$$

для всякого $x \in \{-1,+1\}^n$. Все те же меры сложности булевых функций определяются в этих обозначениях аналогично. Нетрудно показать (смотри ниже), что пороговая степень функции в обозначениях $\{0,1\}$ и в обозначениях $\{-1,+1\}$ совпадает. Для длин и весов это неверно (теоремы I, II и III ниже).

Изучение пороговых элементов началось в 1968 году с книги Минского и Пейперта[5,6]. С тех пор понятие пороговой степени неоднократно использовалось в доказательствах нижних оценок на размер схем и, вообще, в изучении сложностных классов[7,8,9,10,11]. С помощью нижних оценок на пороговую степень были получены важные нижние оценки в коммуникационной сложности, в частности, доказана *теорема о пороговой степени и спектральной норме*[12,13] и получены продвижения в изучении знакового ранга[14,15]. Наконец, в вычислительной теории обучения, понятие пороговой степени использова-

---

[5]Marvin L. Minsky and Seymour A. Papert. *Perceptrons: Expanded edition.* MIT Press, Cambridge, Mass., 1988.

[6]Марвин Минский и Сеймур Пейперт. *Персептроны.* Издательство "Мир Москва, 1971.

[7]Ramamohan Paturi and Michael E. Saks. Approximating threshold circuits by rational functions. *Inf. Comput.*, 112(2):257–272, 1994.

[8]Kai-Yeung Siu, Vwani P. Roychowdhury, and Thomas Kailath. Rational approximation techniques for analysis of neural networks. *IEEE Transactions on Information Theory*, 40(2):455–466, 1994.

[9]James Aspnes, Richard Beigel, Merrick L. Furst, and Steven Rudich. The expressive power of voting polynomials. *Combinatorica*, 14(2):135–148, 1994.

[10]Richard Beigel, Nick Reingold, and Daniel A. Spielman. PP is closed under intersection. *J. Comput. Syst. Sci.*, 50(2):191–202, 1995.

[11]Matthias Krause and Pavel Pudlák. On the computational power of depth-2 circuits with threshold and modulo gates. *Theor. Comput. Sci.*, 174(1–2):137–156, 1997.

[12]Alexander A. Sherstov. Separating AC^0 from depth-2 majority circuits. In *Proc. of the 39th Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 294–301, 2007.

[13]Alexander A. Sherstov. The pattern matrix method for lower bounds on quantum communication. In *Proc. of the 40th Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 85–94, 2008.

[14]Alexander A. Sherstov. The unbounded-error communication complexity of symmetric functions. In *Proc. of the 49th Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 384–393, 2008.

[15]Alexander A. Razborov and Alexander A. Sherstov. The sign-rank of AC^0. In *Proc. of the 49th Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS)*, pages 57–66, 2008.

лось в нескольких ключевых алгоритмах[16,17] и нижних оценках[18].

Кроме пороговой степени, книга Минского и Пейперта также положила начало активному изучению понятия порогового веса и его приложений. Впоследствии понятие порогового веса не раз возникало в вычислительной теории обучения[19,20,21] и в теории сложности, включая оракульные разделения[22,23] и нижние оценки на коммуникационую сложность[24]. Наконец, пороговый вес изучался как самостоятельная мера сложности. Было разработано множество аналитических и комбинаторных методов для доказательства нижних оценок на пороговый вес[25,26,27,28,29,30,31].

Не менее активно изучалось понятие пороговой длины, смотри

[16] Adam R. Klivans and Rocco A. Servedio. Learning DNF in time $2^{\tilde{O}(n^{1/3})}$. *J. Comput. Syst. Sci.*, 68(2):303–318, 2004.

[17] Ryan O'Donnell and Rocco A. Servedio. New degree bounds for polynomial threshold functions. In *Proc. of the 35th Symposium on Theory of Computing (STOC)*, pages 325–334, 2003.

[18] Adam R. Klivans and Alexander A. Sherstov. Unconditional lower bounds for learning intersections of halfspaces. *Machine Learning*, 69(2–3):97–114, 2007.

[19] Jeffrey Charles Jackson. *The harmonic sieve: A novel application of Fourier analysis to machine learning theory and practice*. PhD thesis, Carnegie Mellon University, 1995.

[20] Adam R. Klivans, Ryan O'Donnell, and Rocco A. Servedio. Learning intersections and thresholds of halfspaces. *J. Comput. Syst. Sci.*, 68(4):808–840, 2004.

[21] Adam R. Klivans and Rocco A. Servedio. Toward attribute efficient learning of decision lists and parities. *J. Machine Learning Research*, 7:587–602, 2006.

[22] Richard Beigel. Perceptrons, PP, and the polynomial hierarchy. *Computational Complexity*, 4:339–349, 1994.

[23] Nikolai K. Vereshchagin. Lower bounds for perceptrons solving some separation problems and oracle separation of AM from PP. In *Proc. of the Third Israel Symposium on Theory of Computing and Systems (ISTCS)*, pages 46–51, 1995.

[24] Harry Buhrman, Nikolai K. Vereshchagin, and Ronald de Wolf. On computation and communication with small bias. In *Proc. of the 22nd Conf. on Computational Complexity (CCC)*, pages 24–32, 2007.

[25] Jehoshua Bruck. Harmonic analysis of polynomial threshold functions. *SIAM J. Discrete Math.*, 3(2):168–177, 1990.

[26] Kai-Yeung Siu and Jehoshua Bruck. On the power of threshold circuits with small weights. *SIAM J. Discrete Math.*, 4(3):423–435, 1991.

[27] Jehoshua Bruck and Roman Smolensky. Polynomial threshold functions, AC^0 functions, and spectral norms. *SIAM J. Comput.*, 21(1):33–42, 1992.

[28] Mikael Goldmann, Johan Håstad, and Alexander A. Razborov. Majority gates vs. general weighted threshold gates. *Computational Complexity*, 2:277–300, 1992.

[29] Matthias Krause and Pavel Pudlák. Computing Boolean functions by polynomials and threshold circuits. *Comput. Complex.*, 7(4):346–370, 1998.

[30] Matthias Krause. On the computational power of Boolean decision lists. *Computational Complexity*, 14(4):362–375, 2006.

[31] Adam R. Klivans and Alexander A. Sherstov. Unconditional lower bounds for learning intersections of halfspaces. *Machine Learning*, 69(2–3):97–114, 2007.

например[32,33,34,35,36].

Кроме уже упомянутых исследований, интересовались также и соотношениями между степенями и весами пороговых элементов для заданных функций. Типы булевых функций, изучавшихся с этой точки зрения, включают линейные пороговые элементы[37,38,39], списки разрешения[40], формулы в виде ДНФ[41].

Цель работы. Доказательство оценок на вес пороговых элементов для заданной функции, изучение соотношений между степенью и весом таких пороговых элементов, разработка методов оценки веса пороговых элементов.

Методы исследования. В диссертации применяются методы теории приближений, преобразования Фурье, и некоторый комбинаторный метод, разработанный автором.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми, среди них:

1. Для всех d и n построена булева функция от n переменных пороговой степени d, такая что вес любого порогового элемента степени d для этой функции не меньше $n^{\Omega(n^d)}$. Эта оценка неулучшаема. Этот результат верен как для обозначений $\{0,1\}$, так и для обозначений $\{-1,+1\}$ для булевых переменных.

[32] Jehoshua Bruck. Harmonic analysis of polynomial threshold functions. *SIAM J. Discrete Math.*, 3(2):168–177, 1990.

[33] Mikael Goldmann, Johan Håstad, and Alexander A. Razborov. Majority gates vs. general weighted threshold gates. *Computational Complexity*, 2:277–300, 1992.

[34] Mikael Goldmann. On the power of a threshold gate at the top. *Inf. Process. Lett.*, 63(6):287–293, 1997.

[35] Matthias Krause and Pavel Pudlák. Computing Boolean functions by polynomials and threshold circuits. *Comput. Complex.*, 7(4):346–370, 1998.

[36] Adam R. Klivans and Alexander A. Sherstov. Unconditional lower bounds for learning intersections of halfspaces. *Machine Learning*, 69(2–3):97–114, 2007.

[37] Kai-Yeung Siu and Jehoshua Bruck. On the power of threshold circuits with small weights. *SIAM J. Discrete Math.*, 4(3):423–435, 1991.

[38] Mikael Goldmann, Johan Håstad, and Alexander A. Razborov. Majority gates vs. general weighted threshold gates. *Computational Complexity*, 2:277–300, 1992.

[39] Johan Håstad. On the size of weights for threshold gates. *SIAM J. Discret. Math.*, 7(3):484–492, 1994.

[40] Richard Beigel. Perceptrons, PP, and the polynomial hierarchy. *Computational Complexity*, 4:339–349, 1994.

[41] Nikolai K. Vereshchagin. Lower bounds for perceptrons solving some separation problems and oracle separation of AM from PP. In *Proc. of the Third Israel Symposium on Theory of Computing and Systems (ISTCS)*, pages 46–51, 1995.

2. Построена булева функция от n переменных пороговой степени d, для которой не только пороговые элементы степени d имеют большой вес, но и пороговые элементы бо́льших степеней D имеют большой вес (такая функция построена для всех n и для большого числа различных d). Этот результат верен как для обозначений $\{0, 1\}$, так и для обозначений $\{-1, +1\}$ для булевых переменных.

3. Для каждого d и каждого n построена булева функция от n переменных пороговой степени d, вычислимая пороговым элементом степени $d + 1$ с весом $O(n^2)$, и такая что вес любого порогового элемента степени d для этой функции не меньше $2^{\Omega(n)}$. Этот результат верен для обозначений $\{-1, +1\}$ для булевых переменных.

4. Аналогичный результат получен для длины пороговых элементов: для каждого d и каждого n построена булева функция от n переменных пороговой степени d, вычислимая пороговым элементом степени $d+1$ с длиной $O(d)$, и такая что длина любого порогового элемента степени d для этой функции не меньше $2^{\Omega(d)}$. Этот результат верен для обозначений $\{-1, +1\}$ для булевых переменных.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Полученные результаты и методы исследований могут быть применены в некоторых разделах математической логики и теории алгоритмов, а именно в теории сложности вычислений и вычислительной теории обучения.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на следующих семинарах и конференциях:

- Научно-исследовательский семинар по математической логике под руководством академика РАН С.И. Адяна, чл.-корр. РАН Л. Д. Беклемишева, проф. В. А. Успенского (2009).

- Семинар "Алгоритмические вопросы алгебры и логики" под руководством академика РАН С.И. Адяна (2008, 2009).

- "Колмогоровский семинар по сложности вычислений и сложности определений" под руководством проф. Н.К. Верещагина, к.ф.-м.н. А.Е. Ромащенко, чл.-корр. РАН А.Л. Семёнова, к.ф.-м.н. А.Х. Шеня (2007, 2008, 2009).
- II Международная конференция "Computer Science in Russia" (г. Екатеринбург, УрГУ, 3-7 сентября 2007 г.).
- III Международная конференция "Computer Science in Russia" (г. Москва, 7-12 июня 2008 г.).
- Семинар по сложности определений, описаний и доказательств, и по алгоритмам (Workshop on computational, descriptive and proof complexity, and algorithms) (г. Москва, НМУ, 29-31 августа 2007 г.)
- XXIX Конференции молодых учёных (г. Москва, МГУ, 18 апреля 2007 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в четырех работах автора [1–4].

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и четырех глав. Текст диссертации изложен на 76 страницах. Список литературы включает 36 наименований.

Краткое содержание работы

Мы будем нумеровать цитируемые результаты заглавными римскими цифрами, а результаты автора – арабскими цифрами.

Когда мы говорим о булевой функции f, мы обычно подразумеваем, что задана последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ булевых функций, где функция f_n имеет n входных переменных. Мы будем изучать, как ведут себя различные величины, связанные с булевой функцией f, при n стремящемся к бесконечности.

Мы используем следующие стандартные обозначения для асимптотического поведения функций. Пусть $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Тогда

- $f(n) = O(g(n))$ означает, что $\exists C\ \exists N\ \forall n > N\ |f(n)| \leqslant C|g(n)|$;
- $f(n) = \Omega(g(n))$ означает, что $\exists c > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |f(n)| \geqslant c|g(n)|$;

- $f(n) = \Theta(g(n))$ означает, что $\exists c, C > 0\ \exists N\ \forall n > N\ c|g(n)| \leqslant |f(n)| \leqslant C|g(n)|$;
- $f(n) = o(g(n))$ означает, что $\forall c > 0\ \exists N\ \forall n > N\ |f(n)| \leqslant c|g(n)|$;

Напомним основное определение работы. *Пороговым элементом* степени d для булевой функции $f\colon \{-1,+1\}^n \to \{-1,+1\}$ называется всякое выражение вида

$$f(x) = sgn\, p(x),$$

где $p(x)$ – целочисленный многочлен степени d, а sgn обозначает знаковую функцию: $sgn(t) = 1$, если t положительно, $sgn(t) = 0$, если $t = 0$, и $sgn(t) = -1$ иначе. Другими словами, пороговым элементом степени d для f называется целочисленный многочлен, знаковая функция которого совпадает с f. Аналогично, пороговым элементом степени d для булевой функции $f\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ называется выражение вида

$$f(x) = \frac{1 + sgn\, p\,(x)}{2},$$

где $p(x)$ – целочисленный многочлен степени d. То есть, многочлен положителен, когда функция принимает значение 1, и отрицателен иначе.

Заметим, что всякую булеву функцию (в обоих обозначениях) можно реализовать пороговым элементом некоторой степени просто потому, что любую булеву функцию можно записать в виде многочлена с рациональными коэффициентами.

Для всякого $b \in \{0,1\}$ верно $b^2 = b$, а для всякого $b \in \{-1,+1\}$ верно $b^2 = 1$. Поэтому пороговый элемент для всякой функции в любом из двух обозначений, всегда можно считать мультилинейным (то есть линейным по каждой переменной).

Особую значимость имеют следующие частные случаи общего понятия порогового элемента. *Линейным пороговым элементом* называется пороговый элемент степени 1. *Обобщенной функцией голосования* называется линейный пороговый элемент, у которого все коэффициенты равны ± 1.

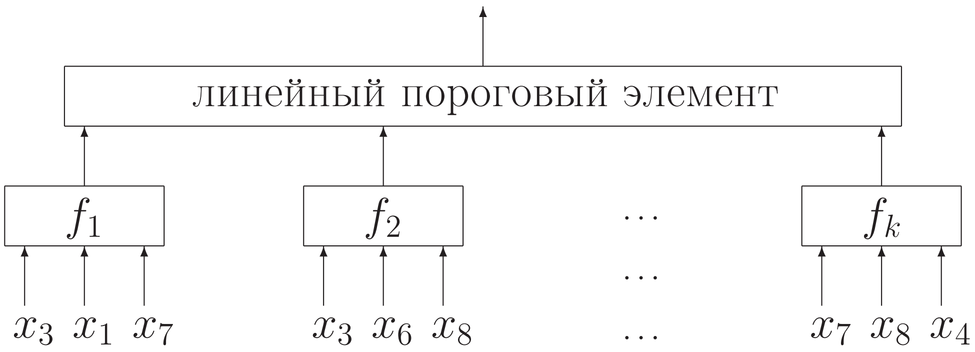
Кроме степени, есть еще два важных параметра порогового элемента: вес и длина. *Весом* порогового элемента называется сумма абсолютных значений коэффициентов соответствующего многочлена. *Длиной* порогового элемента называется число одночленов в соответствующем многочлене. Длина порогового элемента не превышает его веса, так как все коэффициенты многочлена целые.

С тремя параметрами порогового элемента связаны три меры сложности булевой функции (в каждой из систем обозначений): минимальная степень порогового элемента для этой функции, называемая *пороговой степенью*, минимальный вес порогового элемента для этой функции, называемый *пороговым весом*, и минимальная длина порогового элемента для этой функции, называемая *пороговой длиной*. Пороговую степень булевой функции f мы будем обозначать через $\deg(f)$ (мы скоро докажем, что это определение не зависит от обозначений). Заметим, что поскольку всякую булеву функцию можно реализовать пороговым элементом, и пороговые элементы всегда можно считать мультилинейными, для всякой булевой функции f от n переменных $\deg(f) \leqslant n$.

Нас главным образом будут интересовать соотношения между весом и степенью пороговых элементов для заданных булевых функций, а также соотношения между длиной и степенью пороговых элементов для заданных булевых функций. Для изучения таких соотношений удобны следующие обозначения. Будем обозначать через $W_{0,1}(f,d)$ ($W_{\pm 1}(f,d)$) минимальный вес порогового элемента степени не выше d для функции f в обозначениях $\{0,1\}$ (в обозначениях $\{-1,+1\}$, соответственно). Будем обозначать через $L_{0,1}(f,d)$ ($L_{\pm 1}(f,d)$) минимальную длину порогового элемента степени не выше d для функции f в обозначениях $\{0,1\}$ (в обозначениях $\{-1,+1\}$, соответственно). Эти понятия определены, только в случае $d \geqslant \deg(f)$. Иногда будет не важно, в каких именно обозначениях мы рассматриваем булеву функцию или обозначения будут ясны из контекста. Тогда мы будем писать просто $W(f,d)$ и $L(f,d)$.

Сразу заметим, что если $\deg(f) \leqslant d_1 \leqslant d_2$, то из определения видно, что $W(f,d_1) \geqslant W(f,d_2)$ и $L(f,d_1) \geqslant L(f,d_2)$. То есть величины $W(f,d)$ и $L(f,d)$ (в обоих обозначениях булевых переменных) не могут увеличиваться при росте d.

Реализация булевых функций пороговыми элементами соответствует реализации булевых функций булевыми схемами специального вида. Более точно, пусть $\mathcal{F}$ – некоторое семейство булевых функций. *Персептроном* в базисе $\mathcal{F}$ называется булева схема глубины 2 с линейным пороговым элементом на верх-



нем уровне и с произвольными булевыми функциями $f_1, \ldots, f_k$ из $\mathcal{F}$ на нижнем уровне (смотри рисунок).

Нетрудно заметить, что пороговый элемент для булевой функции в обозначениях $\{0, 1\}$ соответствует линейной пороговой функции, в которую подставили произведения переменных. Так как произведение булевых переменных в обозначениях $\{0, 1\}$ соответствует их конъюнкции, мы получаем, что пороговый элемент для булевой функции в обозначениях $\{0, 1\}$ соответствует персептрону в базисе из конъюнкций. Произведению переменных в обозначениях $\{-1, +1\}$ соответствует их сумма по модулю два, поэтому пороговый элемент для булевой функции в этих обозначениях соответствует персептрону в базисе из функций логического сложения $\oplus$. Заметим, что длина порогового элемента соответствует размеру персептрона (числу ребер в нем), точнее эти величины отличаются не более чем в $n + 1$ раз. Если же мы потребуем, чтобы на верхнем уровне персептрона была не линейная пороговая функция, а обобщенная функция голосования, то размеру схемы будет соответствовать вес порогового элемента.

Пороговым элементам степени не выше некоторого d соответствуют персептроны, базис которых сужается до функций с входной степенью не выше d.

Таким образом, пороговые элементы можно рассматривать как схемы из различных элементов специального вида. Как обычно для булевых схем, полиномиальный размер схемы считается небольшим, а экспоненциальный размер – большим.

Реализация булевых функций пороговыми элементами в обозначениях $\{0, 1\}$ и в обозначениях $\{-1, +1\}$ – это, вообще говоря, разные реализации. Это видно хотя бы по соответствующим булевым схемам. Однако, между реализациями в разных обозначениях есть связь. Сейчас мы приведем известные результаты на эту тему.

Сначала установим соотношение между переменными в обозначениях $\{0,1\}$ и $\{-1,+1\}$. Будем обозначать булеву переменную в обозначениях $\{-1,+1\}$ через b, а ту же булеву переменную в обозначениях $\{0,1\}$ через b^*. Тогда, легко проверить, что $b^* = \frac{1}{2}(1-b)$ (напомним, что "истине" соответствует 1 в обозначениях $\{0,1\}$ и -1 в обозначениях $\{-1,+1\}$). Обратно, $b = 1 - 2b^*$.

Предположим теперь, что $p(x_1, \ldots, x_n)$ – пороговый элемент степени d для функции f в обозначениях $\{-1,+1\}$. Тогда ясно, что многочлен $p(1-2x_1^*, \ldots, 1-2x_n^*)$ будет пороговым элементом степени d для f в обозначениях $\{0,1\}$. Обратно, если $p(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ – пороговый элемент степени d для функции f в обозначениях $\{0,1\}$, то $2^d p(\frac{1}{2}(1-x_1), \ldots, \frac{1}{2}(1-x_n))$ – пороговый элемент степени d для функции f в обозначениях $\{-1,+1\}$ (множитель 2^d нужен, чтобы сделать коэффициенты многочлена целыми, так как после замены переменных они имеют вид $\frac{m}{2^k}$, где m – целое, а $k \leqslant d$).

Таким образом, по всякому пороговому элементу для заданной функции в одних обозначениях, можно легко построить пороговый элемент для той же функции в других обозначениях, причем при этом переходе степень порогового элемента не возрастает. Следовательно, $\deg(f)$ не зависит от обозначений, в которых мы реализуем функцию f пороговыми элементами.

Что касается порогового веса и пороговой длины, то, вообще говоря, при заменах обозначений, описанных выше, они могут сильно измениться, и априори не ясно, есть ли какие-то соотношения между пороговыми весами функции f в разных обозначениях, и есть ли соотношения между пороговыми длинами функции f в разных обозначениях.

Мы приведем здесь известные результаты о таких соотношениях. Про пороговую длину известно, что она может сильно меняться при смене обозначений. В работе Гольдмана[42] была доказана следующая теорема.

Теорема I (Гольдман)**.** *Функция логического сложения* $\oplus$ *от* n *переменных имеет пороговую длину* 1 *в обозначениях* $\{-1,+1\}$ *и экспоненциальную (от числа переменных) пороговую длину в обозначениях* $\{0,1\}$.

[42] Mikael Goldmann. On the power of a threshold gate at the top. *Inf. Process. Lett.*, 63(6):287–293, 1997.

Первое утверждение этой теоремы несложно, так как легко увидеть, что $\oplus_i x_i = \prod_i x_i$ в обозначениях $\{-1,+1\}$. Существенной частью этого результата является нижняя оценка на длину пороговых элементов в обозначениях $\{0,1\}$.

С другой стороны, в работе[43] была доказана следующая теорема.

Теорема II (Краузе, Пудлак)**.** *Существует (явно заданная) функция полиномиальной пороговой длины в обозначениях* $\{0,1\}$*, но экспоненциальной пороговой длины в обозначениях* $\{-1,+1\}$*.*

Ситуация с весами другая. Теорема I легко переносится на веса пороговых элементов. Действительно, функция логического сложения представима пороговым элементом с весом 1, а с другой стороны, пороговый вес всегда не меньше пороговой длины, так что функция логического сложения имеет экспоненциальный пороговый вес в обозначениях $\{0,1\}$. Однако, в обратную сторону, в работе[44] был доказан следующий результат.

Теорема III (Краузе, Пудлак)**.** *Всякая функция от n переменных с пороговым весом W в обозначениях* $\{0,1\}$ *имеет пороговый вес* $O(n^2W^4)$ *в обозначениях* $\{-1,+1\}$*.*

Так что, если существует пороговый элемент полиномиального веса для некоторой функции в обозначениях $\{0,1\}$, то такой же пороговый элемент существует для этой функции и в обозначениях $\{-1,+1\}$. Отметим также, что из доказательства в работе[45] следует также такой результат.

Теорема IV (Краузе, Пудлак)**.** *Для всякой функции f и всякого* $d \geqslant \deg(f)$ *верно* $W_{\pm1}(f,d) \leqslant O(n^2W_{0,1}^4(f,d))$

Таким образом, соотношение из теоремы III между пороговыми весами заданной функций f в различных обозначениях верно также и для величин $W_{\pm1}(f,d)$ и $W_{0,1}(f,d)$.

Наконец, пусть булева функция f от n переменных представима пороговым элементом $p(x)$, степень которого постоянна и не зависит от n. Тогда путем

[43] Matthias Krause and Pavel Pudlák. Computing Boolean functions by polynomials and threshold circuits. *Comput. Complex.*, 7(4):346–370, 1998.

[44] Matthias Krause and Pavel Pudlák. Computing Boolean functions by polynomials and threshold circuits. *Comput. Complex.*, 7(4):346–370, 1998.

[45] Matthias Krause and Pavel Pudlák. Computing Boolean functions by polynomials and threshold circuits. *Comput. Complex.*, 7(4):346–370, 1998.

раскрытия скобок в заменах переменных, описанных ранее, легко увидеть, что вес порогового элемента увеличивается не более чем в константу раз при таких заменах. То есть, верно следующее утверждение.

Лемма V (Фольклор)**.** *Если функция f от n переменных представима пороговым элементом постоянной, не зависящей от n, степени d, то* $W_{0,1}(f, d) = \Theta(W_{\pm 1}(f, d))$.

Таким образом, если нас интересует величина $W(f, d)$, где d – постоянно и не зависит от числа переменных n, то не имеет значения в каких обозначениях рассматривается функция (все результаты у нас будут с точностью до постоянного множителя).

Перейдем к обзору истории изучаемых вопросов и содержания диссертации.

Во **Введении** показывается актуальность исследуемых вопросов, содержится краткое изложение истории их изучения и обзор результатов диссертации.

В **главе 1** сформулированны основные определения и собраны известные результаты, используемые в доказательстве.

В работе мы будем интересоваться величиной $W(f, d)$ (в тех или иных обозначениях) для фиксированной функции f и различных d, для которых понятие $W(f, d)$ корректно. Мы будем доказывать верхние и нижние оценки на эту величину.

Еще в 60-х годах были получены нижние оценки вида $2^{\Omega(n)}$ на веса пороговых элементов степени $d = 1$ (то есть, линейных пороговых элементов) для конкретных функций (первый такой результат был получен в[46]). Однако, они не достигали известной верхней оценки $n^{O(n)}$, доказанной в работе Муроги[47] (смотри также[48]).

Теорема VI (Мурога)**.** *Для всякой булевой функции f от n переменных, если* $\deg(f) = 1$, *то* $W(f, 1) = n^{O(n)}$.

Позднее Хостад[49] доказал точную (вплоть до константы в экспоненте) нижнюю оценку.

---

[46] J. Myhill and W. H. Kautz. On the size of weights required for linear-input switching functions. *IRE Trans. on Electronic Computers*, 10(2):288–290, 1961.

[47] Saburo Muroga. *Threshold logic and its applications.* Wiley-Interscience, Chichester, 1971.

[48] Johan Håstad. On the size of weights for threshold gates. *SIAM J. Discret. Math.*, 7(3):484–492, 1994.

[49] Johan Håstad. On the size of weights for threshold gates. *SIAM J. Discret. Math.*, 7(3):484–492, 1994.

Теорема VII (Хостад). *Существует (явно заданная) функция f от n переменных такая что* $\deg(f) = 1$ *и* $W(f, 1) = n^{\Omega(n)}$.

Для случая $d > 1$ из теоремы VI легко получается верхняя оценка $n^{O(n^d)}$ на веса пороговых элементов степени d для заданных функций.

Следствие VIII. *Для всякой булевой функции f от n переменных, если* $\deg(f) = d$, *то* $W(f, d) = n^{O(n^d)}$*(здесь константа в O зависит от d).*

Действительно, в пороговом элементе степени d не более $O(n^d)$ одночленов. Заменим их на новые независимые переменные. Тогда мы получим линейный пороговый элемент от $O(n^d)$ переменных. Согласно теореме VI, он эквивалентен некоторому пороговому элементу с весом $n^{O(dn^d)}$. Заменяя в новом линейном пороговом элементе переменные обратно на одночлены, мы получаем требуемую оценку.

В **главе 2** мы доказываем, что эта верхняя оценка точна.

Теорема 1. *Для всякого d существует (явно заданная) булева функция f такая что* $\deg(f) = d$, *и* $W(f, d) = n^{\Omega(n^d)}$ *(константа в Ω зависит от d).*

Эта теорема не получается из теоремы VII также легко, как следствие VIII из теоремы VI. До этого результата для пороговых элементов степени $d > 1$ не было известно нижних оценок лучше, чем $2^{\Omega(n)}$.

В параграфе 2.1 мы строим нашу функцию. В параграфе 2.2 мы доказываем теорему 1. В доказательстве мы используем конструкцию Хостада из теоремы VII в сочетании с новым методом комбинаторного характера.

В главе 2 мы работаем в обозначениях $\{-1, +1\}$, однако, поскольку наш результат распространяется только на постоянные d (не зависящие от n), то, по лемме V, выбор обозначений в данном результате не имеет значения, результат автоматически переносится и на обозначения $\{0, 1\}$.

Кроме оценок весов пороговых элементов для некоторого фиксированного d, перечисленных выше, были известны также результаты, в которых для одной и той же функции доказывается нижняя оценка на веса пороговых элементов различных степеней. В работе[50] была доказана следующая теорема.

[50] Mikael Goldmann, Johan Håstad, and Alexander A. Razborov. Majority gates vs. general weighted threshold gates. *Computational Complexity*, 2:277–300, 1992.

Теорема IX (Гольдман и др.). *Существует (явно заданная) функция пороговой степени* 1, *и такая что* $W(f,n) = 2^{\Omega(n)}$ *и* $W(f,1) = 2^{O(n)}$.

То есть, эту функцию можно вычислить линейным пороговым элементом экспоненциального веса, и при этом всякий пороговый элемент произвольной степени для этой функции имеет экспоненциальный вес. Рассмотренная в этой теореме функция в некотором смысле самая сложная функция среди всех функций, представимых пороговыми элементами. Этот результат был доказан в обозначениях $\{-1,+1\}$, однако в силу теоремы III, он распространяется и на обозначения $\{0,1\}$.

В работе[51] была доказана следующая теорема.

Теорема X (Бейгель). *Существует (явно заданная) функция f от n переменных, такая что* $\deg(f) = 1$, $W(f,1) = 2^{O(n)}$ *и для всякого D верно* $W(f,D) = 2^{\Omega(n/D^2)}$ *(здесь константа в $\Omega(n/D^2)$ не зависит от D).*

Этот результат был получен в связи с разделением некоторых сложностных классов. Теорема X была доказана в обозначениях $\{0,1\}$, но она не переносится автоматически на обозначения $\{-1,+1\}$ с помощью леммы V, так как результат верен и для D зависящих от n. Однако, доказательство Бейгеля легко переносится и на обозначения $\{-1,+1\}$.

В **главе 3** мы докажем результат, аналогичный теореме X для функций бо́льших пороговых степеней.

Теорема 2. *Для всех n и $d \leqslant D \leqslant \frac{\epsilon n^{1/5}}{\log n}$, где ϵ – некоторая положительная константа, существует (явно заданная) функция f, такая что* $\deg(f) = d$, $W(f,d) = 2^{O(n^d)}$ *и* $W(f,D) = 2^{(\delta n)^d/D^{4d}}$, *где δ – некоторая положительная константа.*

Заметим, что этот результат не полностью обобщает результат Бейгеля, так как построенная нами функция зависит от D, а также показатель экспоненты содержит D^4 (при $d = 1$), а не D^2.

Теорема 2 содержательна и для непостоянных D. Например, мы можем зафиксировать произвольное d и положить $D = \log n$. Тогда мы получаем последовательность функций $f_n\colon \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ пороговой степени d, таких что всякий пороговый элемент степени не выше $\log n$, вычисляющий f_n, имеет

[51] Richard Beigel. Perceptrons, PP, and the polynomial hierarchy. *Computational Complexity*, 4:339–349, 1994.

вес $2^{\Omega(n^d/\log^{4d} n)}$. В частности, эта оценка верна для всех пороговых элементов любой постоянной степени.

Доказательство теоремы 2, также как и теоремы X, проходит в обозначениях $\{0, 1\}$. Однако, так же, как и в случае теоремы X, доказательство легко переносится и на обозначения $\{-1, +1\}$.

Получение оценок на веса пороговых элементов интересно также и для функций из ограниченных классов. В главе 3 мы рассмотрим один из самых простых таких классов (в том смысле, что функции, лежащие в нем, вычислимы булевыми схемами очень ограниченного вида), а именно дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ) полиномиального (от числа переменных) размера. Этот класс активно изучался в теории обучения, в частности, и с точки зрения пороговой степени и порогового веса (смотри работу[52] и ссылки в ней). Известно, что для всякой полиномиальной ДНФ в обозначениях $\{0, 1\}$ есть пороговый элемент степени $O(n^{1/2}\log n)$ с весом $2^{O(n^{1/2}\log^2 n)}$, а также пороговый элемент степени $O(n^{1/3}\log n)$[53]. Функция из теоремы X также представима в виде полиномиальной ДНФ.

Мы докажем, что если d постоянно, то существуют полиномиальные ДНФ, удовлетворяющие теореме 2. Это дает первую более чем экспоненциальную оценку (большую, чем $2^{\Omega(n)}$) на веса пороговых элементов для функций, представимых в виде полиномиальных ДНФ.

В параграфе 3.1 мы строим функции, удовлетворяющие теореме 2. В параграфе 3.2 мы изучаем вопросы, связанные с представлением этих функций в виде ДНФ. В параграфе 3.3 мы формулируем основной результат этой главы и приступаем к доказательству. В параграфе 3.4 мы неформально описываем основные идеи доказательства теоремы 2. В параграфе 3.5 мы доказываем необходимые вспомогательные результаты. В параграфе 3.6 мы доказываем теорему 2 и формулируем следствия из нее. Доказательство получается развитием метода, использованного для доказательства теоремы 1.

Можно заметить, что для функции, построенной в теореме IX, величина $W(f, d)$ меняется плавно при изменении d. То есть, при увеличении d на 1

[52] Adam R. Klivans and Rocco A. Servedio. Learning DNF in time $2^{\tilde{O}(n^{1/3})}$. *J. Comput. Syst. Sci.*, 68(2):303–318, 2004.

[53] Adam R. Klivans and Rocco A. Servedio. Learning DNF in time $2^{\tilde{O}(n^{1/3})}$. *J. Comput. Syst. Sci.*, 68(2):303–318, 2004.

величина $W(f, d)$ для этих функций уменьшается не более чем полиномиально. Для функции из теоремы X $W(f, d)$ слабо меняется при d близких к 1 (в действительности, в работе[54] доказывается, что оценка в теореме X близка к точной для всех $d = O(n^{1/3})$, так что $W(f, d)$ для функции из этой теоремы меняется плавно для всех d не превышающих $O(n^{1/3})$). Для функции из теоремы 2 $W(f, d)$ слабо меняется при D близких к d. Возникает вопрос, возможна ли обратная ситуация. То есть, существуют ли функции f, для которых величина $W(f, d)$ сильно изменяется при небольших изменениях d? В **главе 4** мы даем положительный ответ на этот вопрос. Результаты главы 4 справедливы в обозначениях $\{-1, +1\}$, и это существенно используется в доказательстве. Не известно, можно ли перенести эти результаты на обозначения $\{0, 1\}$.

Теорема 3. *Для всех n и для всякого $d = 1, 2, \dots, n-1$ (d может зависеть от n) существует (явно заданная) функция $f\colon \{-1, +1\}^n \to \{-1, +1\}$, такая что*

$$W(f, d) = \exp\{\Theta(n)\}$$

и

$$W(f, d+1) = O(n^2)$$

(постоянные в Θ и O не зависят от d).

Другими словами, мы покажем, что требующийся вес пороговых элементов для заданной функции может сильно измениться в ответ на небольшие изменения степени пороговых элементов. Этот результат опубликован в совместной работе [2]. Для $d \leqslant \epsilon n$, где ϵ – некоторая константа, результат теоремы доказана автором. Для $d > \epsilon n$ результат теоремы доказан А. А. Шерстовым.

Кроме того, мы доказываем результат, аналогичный теореме 3, для пороговой длины.

Теорема 4. *Для всех n и для всякого $d = 1, 2, \dots, n-1$ (d может зависеть от n) существует (явно заданная) функция $f\colon \{-1, +1\}^n \to \{-1, +1\}$, такая что*

$$L(f, d) = \exp\{\Theta(d)\}$$

и

$$L(f, d+1) = O(d).$$

[54] Adam R. Klivans and Rocco A. Servedio. Toward attribute efficient learning of decision lists and parities. *J. Machine Learning Research*, 7:587–602, 2006.

Оценка на $L(f,d)$ в этом результате близка к оптимальной, так как существует не более $(n+1)^d$ одночленов степени не выше d. То есть, длина всякого порогового элемента степени не выше d не превышает $(n+1)^d$.

Наконец, мы доказываем следующее обобщение теоремы 3.

Теорема 5. *Для всех n и для всяких $d = 1, 2, \ldots, n-1$ и $k = 1, 2, \ldots, \max\{d, n-d\}$, существует (явно заданная) функция $f : \{-1,+1\}^n \to \{-1,+1\}$, такая что*

$$W(f,d) = W(f,d+1) = \cdots = W(f,d+k-1) = 2^{\Theta(n/k)}$$

и

$$W(f,d+k) = O\left(\frac{n^2}{k^2}\right).$$

В этой теореме для $d \leqslant \epsilon n$, где ϵ – некоторая константа, доказательство принадлежит автору. Для $d > \epsilon n$ доказательство принадлежит А. А. Шерстову.

Доказательство результатов главы 4 сочетает в себе технику преобразований Фурье, линейной алгебры и теории приближений.

В параграфе 4.1 мы формулируем основные результаты главы. В параграфе 4.2 мы доказываем вспомогательные соотношения между различными параметрами булевых функций. В параграфе 4.3 мы доказываем вспомогательный результат о пороговых элементах для функций, спектр которых не равен нулю лишь на афинном подпространстве $\mathbb{Z}_2^n$. В параграфе 4.4 мы доказывам основной результат главы для случая $d < \epsilon n$, где ϵ – некоторая константа. Результат доказывается сначала для $d = 1$, а затем с помощью результатов параграфа 4.3 обобщается на все $d < \epsilon n$. В параграфе 4.5 мы доказываем основной результат главы для случая $d > \epsilon n$, а также теорему 4. Для этого мы используем совершенно другую технику. В параграфе 4.6 мы доказываем основной результат этой главы, а также его обобщения.

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю доктору физико–математических наук, профессору Николаю Константиновичу Верещагину за постановку задач и помощь в работе. Автор благодарит академика РАН Сергея Ивановича Адяна за внимание к работе. Автор признателен участникам "Колмогоровского семинара по сложности вычислений и сложности описаний" и участникам семинара "Алгоритмические вопросы алгебры и логики" за полезные обсуждения. Автор также благодарен всем сотрудникам кафедры математической логики и теории алгоритмов за теплую творческую атмосферу.

Список литературы

[1] В. В. Подольский. Перцептроны с большим весом. *Проблемы передачи информации*, 45(1):51–59, 2009.

[2] В. В. Подольский, А. А. Шерстов. Уменьшение на единицу степени многочлена с заданной знаковой функцией может экспоненциально увеличить его вес и длину. *Успехи математических наук*, 69(5):179–180, 2009.

[3] Vladimir V. Podolskii. Perceptrons of large weight. In *Proc. of the Second International Computer Science Symposium in Russia (CSR)*, pages 328–336, 2007.

[4] Vladimir V. Podolskii. A uniform lower bound on weights of perceptrons. In *Proc. of the Third International Computer Science Symposium in Russia (CSR)*, pages 261–272, 2008.

В работе [2] В. В. Подольскому принадлежат теоремы 3 и 4; А. А. Шерстову принадлежат теоремы 2 и 5; теорема 1 непосредственно вытекает из теорем 4 и 5.