

Московский Государственный Университет
имени М.В. Ломоносова
Механико-Математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.43, 517.927, 517.928

Покотило Вадим Игоревич

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ПОРТРЕТЫ ЗАДАЧ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ И
ОРРА-ЗОММЕРФЕЛЬДА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ

Специальность: 01.01.01 — Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2009

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова.

- Научный руководитель:** доктор физико-математических наук,
профессор Шкаликов Андрей Андреевич
- Официальные оппоненты:** доктор физико-математических наук,
профессор Асташова Ирина Викторовна
доктор физико-математических наук,
старший научный сотрудник
Буслаев Виктор Иванович
- Ведущая организация:** Санкт-Петербургский
государственный университет

Защита диссертации состоится 25 декабря 2009 г. в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском Государственном Университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 25 ноября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

И.Н. Сергеев.

Общая характеристика работы.

Актуальность темы.

В гидромеханике хорошо известно уравнение Орра–Зоммерфельда, которое возникает при линеаризации уравнения Навье–Стокса для плоскопараллельных течений между двумя фиксированными стенками (см. подробности, например, в монографии ¹). Оно имеет вид

$$\{(D^2 - \alpha^2)^2 - i\alpha R[q(x)(D^2 - \alpha^2) - q''(x)]\}y = -i\alpha R\lambda(D^2 - \alpha^2)y, \quad (1)$$

$$y(-1) = y'(-1) = y(1) = y'(1) = 0. \quad (2)$$

Здесь $D = d/dx$, α — волновое число ($\alpha \neq 0$), R — число Рейнольдса, характеризующее вязкость жидкости, а $q(x)$ — профиль скорости течения жидкости в канале $|x| < 1$.

Задача Орра–Зоммерфельда изучалась многими авторами с начала XX века. Основные результаты и литературные ссылки можно найти в монографиях Драйзина и Райда ¹, Дикого ², а также в работах Гейзенберга, Вазова, Лина и других авторов (см. библиографию в ¹). В частности, вопрос о том, как ведет себя спектр задачи Орра–Зоммерфельда был поставлен еще Гейзенбергом. В этой связи укажем важную работу Моравец ³, где показано, что при $q(x) = x$ собственные значения задачи Орра–Зоммерфельда могут локализоваться только вблизи отрезков $[-1, -i/\sqrt{3}]$, $[1, -i/\sqrt{3}]$ и луча $[-i/\sqrt{3}, -i\infty)$, хотя подчеркивается, что информацию о собственных значениях в малых окрестностях первых двух отрезков получить не удастся. Информация о собственных значениях на мнимой оси получена в указанной работе только для достаточно далеких собственных значений, что вытекает из общих методов, развитых еще Биркгофом, а для уравнения Орра–Зоммерфельда — Гейзенбергом.

В начале 90-х годов Редди, Хеннингсон и Шмидт ⁴, а также Трефезен ⁵

¹Drazin R. G., Reid W. H. "Hydrodynamic Stability"//Cambridge, 1981

²Дикий Л. А. "Гидродинамическая устойчивость и динамика атмосферы"//Л., Гидрометеиздат, 1973

³Morawetz C. S. "The Eigenvalues of Some Stability Problems Involving Viscosity", J. Rat. Mech. Anal., 1952, 1, 579-603

⁴Reddy S. G., Schmidt P. J., Henningson D. S. "Pseudospectra of the Orr–Sommerfeld operator"//SIAM J. Appl. Math., 1993, 53, 1, 15-47

⁵Trefethen L. N. "Pseudospectra of linear operators"//SIAM 95: Proceeding of the Third Int. Congress on Industrial and Appl. Math. Academic Varlag, Berlin., 1996, 401-434

начали изучать более простую задачу вида

$$i\varepsilon y'' + q(x)y = \lambda y, \quad \varepsilon = (\alpha R)^{-1} > 0 \quad (3)$$

$$y(-1) = y(1) = 0, \quad (4)$$

представляющую несамосопряженный вариант классической спектральной задачи Штурма–Лиувилля. Их численные расчеты подтверждали схожесть спектральной задачи Орра–Зоммерфельда и модельной задачи. В ходе этих исследований стала ясной важность спектрального анализа задачи (3) при $\varepsilon \rightarrow 0$. Отметим, что если в уравнении (3) вместо $i\varepsilon$ участвует параметр $\varepsilon > 0$, то получается самосопряженная задача с малым параметром. Спектр такой задачи вещественный, сгущается при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем можно найти явные формулы для локализации собственных значений (формулы квантования Бора–Зоммерфельда). Замена параметра ε на $i\varepsilon$ меняет задачу кардинально.

Стоит отметить, что спектральная задача Штурма–Лиувилля (3) изучалась как на конечном отрезке, так и на всей вещественной оси. Важные исследования о спектре несамосопряженной задачи (3) с малым параметром для случая всей оси были проведены в работе Днестровского и Костомарова⁶. Однако, полного описания спектра задачи (3) как для бесконечного, так и для конечного интервала ни для какой конкретной функции $q(x)$ не было получено вплоть до недавнего времени. Эта задача получила свое развитие в исследованиях Шкаликова и его аспирантов Дьяченко, Туманова и Неймана–Заде. В литературе наиболее часто встречаются два стационарных профиля скорости: профиль Куэтта - $q(x) = x$ и профиль Пуазейля - $q(x) = x^2$. Аналитическое объяснение портрета собственных значений задачи с профилем Куэтта при $\varepsilon \rightarrow 0$ было проведено в⁷. А именно, было доказано, что при $q(x) = x$ собственные значения модельной задачи (3), (4) локализуются вдоль луча $[-i/\sqrt{3}, -i\infty)$ и двух отрезков $[-1, -i/\sqrt{3}]$, $[1, -i/\sqrt{3}]$, а также найдена асимптотика собственных значений в окрестности указанных отрезков. Предельное множество, вдоль которого концентрируются собственные значения, названо спектральным галстуком. Более частный результат другим методом независимо получен в⁸. Эта задача получила свое обобщение в работе Шкаликова⁹, где был рассмотрен случай монотонного на отрезке про-

⁶Днестровский Ю. Н., Костомаров Д. П. "Об асимптотике собственных значений для несамосопряженных краевых задач"// Журнал выч. мат. и мат. физики, 4, е2 (1964), с. 267-277.

⁷Шкаликов А. А. "О предельном поведении спектра при больших значениях параметра одной модельной задачи"//Мат. заметки., 1997, 62, 6, 950-953

⁸Степин С. А. "Модель перехода от дискретного спектра к непрерывному в сингулярной теории возмущений"//Фундаментальная и прикладная математика., 1997, 3, 4, 1199-1227

⁹Шкаликов А. А. "Спектральные портреты оператора Орра–Зоммерфельда при больших числах Рей-

филя течения и доказано, что предельное множество состоит из трех кривых также по форме напоминающих галстук. В последней работе также приведены результаты для случая профиля Пуазейля, который подробно изучен в ¹⁰ для симметричного квадратичного потенциала и в ¹¹ для несимметричного квадратичного потенциала. В указанных работах линии, вдоль которых концентрируются собственные значения, получили название предельного спектрального графа.

Цель работы.

Найти функции $q(x)$ частного и общего видов, для которых можно полностью описать спектральные портреты при $\varepsilon \rightarrow 0$ модельной задачи (3). А именно, доказать, что спектральный портрет в случае несимметричного квадратичного потенциала, найденный в ¹¹, не случаен: похожая картина наблюдается для широкого класса аналитических функций $q(x)$, обладающих одним экстремумом на заданном отрезке. Найти предельные спектральные кривые модельной задачи (3), рассматриваемой на вещественной оси, в случае $q(x) = x^{2n}$ и в случае $q(x) = x^4 - a^2x^2$.

Методы исследования.

Метод фазовых интегралов, основанный на изучении ВКБ-асимптотик решений дифференциальных уравнений и областей их применимости на базе анализа поведения графов Стокса, является ключевым при получении результатов диссертации.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми и основные из них состоят в следующем:

1. Найден класс функций с одним экстремумом на заданном отрезке, для которого описан спектральный портрет при $\varepsilon \rightarrow 0$ несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с краевыми условиями $y(a) = y(b) = 0$.

нольдса"//Современная математика., Фундаментальные направления, 2003, 3, 89-112

¹⁰Туманов С. Н., Шкаликов А. А. "О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда с профилем Пуазейля"//Известия РАН., 2002, 66, 4

¹¹Туманов С. Н., Шкаликов А. А. "О предельном поведении спектра модельной задачи для уравнения Орра-Зоммерфельда с квадратичным профилем"// Electronic archive <http://arXiv.org/ps/math-ph/0212074>, 2002

2. Найден предельный спектр и асимптотические формулы для собственных значений несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля, рассматриваемой на вещественной оси, с потенциалом в виде произвольного одночлена четной степени.

3. Найден предельный спектральный граф несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля, рассматриваемой на вещественной оси, с потенциалом в виде произвольного симметричного многочлена четвертой степени. В рамках исследования расположения предельного спектрального графа также установлена связь между поведением критических кривых рассматриваемой задачи и свойствами гипергеометрической функции.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы специалистами, занимающимися спектральной теорией операторов и гидромеханикой.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на конференциях:

«Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященной И. Г. Петровскому, Москва, 2007 г.

«Спектральные и эволюционные задачи», Крымская осенняя математическая школа, Севастополь, 2008 г.

«Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященной 70-летию В. А. Садовниченко, Москва, 2009 г.

Результаты диссертации докладывались и обсуждались на семинарах:

«Несамосопряженные операторы», руководители — профессор А. Г. Костюченко и профессор А. А. Шкаликов (2005, 2006, 2007, 2008, 2009 гг.),

«Операторные модели в математической физике», руководители — профессор А. А. Шкаликов, доцент А. М. Савчук, доцент И. А. Шейпак (2008, 2009 гг.)

«Спектральный анализ дифференциальных и разностных операторов», руководители — профессор А. Г. Костюченко, профессор В. В. Власов, профессор К. А. Мирзоев (2008 г.)

Публикации.

Основные результаты работы изложены в 5 работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации.

Диссертация изложена на 71 странице и состоит из введения, трех глав и списка используемой литературы. Список литературы содержит 58 наименований.

Краткое содержание диссертации.

В первой главе исследуется поведение спектра модельного семейства дифференциальных операторов

$$L(\varepsilon)y = i\varepsilon y'' + q(x)y, \quad \varepsilon > 0, \quad (5)$$

действующих на отрезке $[a, b]$ с краевыми условиями:

$$y(a) = y(b) = 0, \quad (6)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$ с профилем $q(x)$, имеющим один экстремум на отрезке $[a, b]$. Для простоты можно считать, что $q(x)$ продолжается во всю комплексную плоскость как целая функция, но можно ограничиться только требованием ее аналитичности в окрестности отрезка $[a, b]$ вдобавок к основным условиям, которые сформулированы ниже. Не ограничивая общности, мы можем рассматривать случай $a < 0 < b$, $0 = q(0) < q(a) < q(b)$, полагая, что функция $q(x)$ убывает на отрезке $[a, 0]$ и возрастает на отрезке $[0, b]$. Тогда область значений функции $q(x)$ при $x \in [a, b]$ есть отрезок $[0, q(b)]$. В этом случае область значений квадратичной формы изучаемого семейства операторов (Ly, y) лежит в полуполосе

$$\Pi = \{\lambda \in C \mid \text{Im}\lambda < 0, 0 < \text{Re}\lambda < q(b)\}.$$

Так как спектр оператора заключен в его числовом образе, то при любом $\varepsilon > 0$ собственные значения задачи лежат в этой полуполосе.

Итак, сформулируем основные условия на функцию $q(x)$.

(i) Функция $q(x)$ вещественна при $x \in [a, b]$, убывает на отрезке $[a, 0]$ и возрастает на отрезке $[0, b]$, причем $a < 0 < b$, $0 = q(0) < q(a) < q(b)$.

Существуют не пересекающиеся области $G_1, G_2 \subset \mathbb{C}$, имеющие в качестве части своей границы отрезки $[a, 0]$ и $[0, b]$ соответственно, такие, что $q(z)$ аналитична в G_1, G_2 и биективно отображает $\overline{G_1}$ на полуполосу $\overline{\Pi_1}$, а $\overline{G_2}$ на полуполосу $\overline{\Pi}$ (здесь черта означает замыкание областей), где

$$\Pi_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} \lambda < 0, 0 < \operatorname{Re} \lambda < q(a)\}.$$

(ii) При любом $c \in (0, q(a))$ прообраз луча $r_c = \{\lambda \mid \lambda = c - it, 0 \leq t < \infty\}$ в G_1 есть функция относительно мнимой оси, т.е. любая прямая $\operatorname{Im} \lambda = \operatorname{const}$ пересекает прообраз луча r_c только один раз, либо не пересекает вообще. Аналогично, при любом $c \in (0, q(b))$ прообраз луча r_c в G_2 есть функция относительно мнимой оси.

Из этих условий, по принципу соответствия границ следует, что область G_1 полностью лежит в верхней полуплоскости, а область G_2 полностью лежит в нижней. Примерами функций, удовлетворяющих сформулированным двум условиям, могут служить $q(x) = x^2$ на отрезке $[-1, 2]$, $q(x) = 1 - \cos(x)$ на отрезке $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ и другие.

Пусть ξ_λ^1 - единственный корень уравнения $q(z) - \lambda = 0$, лежащий в G_1 , определенный при $\lambda \in \Pi_1$. Аналогично, ξ_λ^2 - единственный корень уравнения $q(z) - \lambda = 0$, лежащий в G_2 , определенный при $\lambda \in \Pi$. Введем ветвь $\sqrt{\lambda}$, которую всюду далее будем называть основной: $\operatorname{Arg}(\sqrt{\lambda}) \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ при $\operatorname{Im} \lambda < 0$.

Рассмотрим набор кривых в полуполосах Π и Π_1 :

$$\tilde{\gamma}_a^1 = \{\lambda \in \Pi_1 \mid \operatorname{Re} \int_{\xi_\lambda^1}^a \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi = 0\}$$

$$\tilde{\gamma}_a^2 = \{\lambda \in \Pi \mid \operatorname{Re} \int_{\xi_\lambda^2}^a \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi = 0\}$$

$$\tilde{\gamma}_b^2 = \{\lambda \in \Pi \mid \operatorname{Re} \int_{\xi_\lambda^2}^b \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi = 0\}$$

$$\tilde{\gamma}_0 = \{\lambda \in \Pi_1 \mid \operatorname{Re} \int_{\xi_\lambda^1}^{\xi_\lambda^2} \sqrt{i(q(\xi) - \lambda)} d\xi = 0\}$$

$$\tilde{\gamma}_\infty = \{\lambda \in \Pi \mid Q(\lambda) = \operatorname{Re} \int_a^b \sqrt{i(q(x) - \lambda)} dx = 0\}$$

Как показано в диссертации данные кривые качественно ведут себя также как изображено на рис. 1:

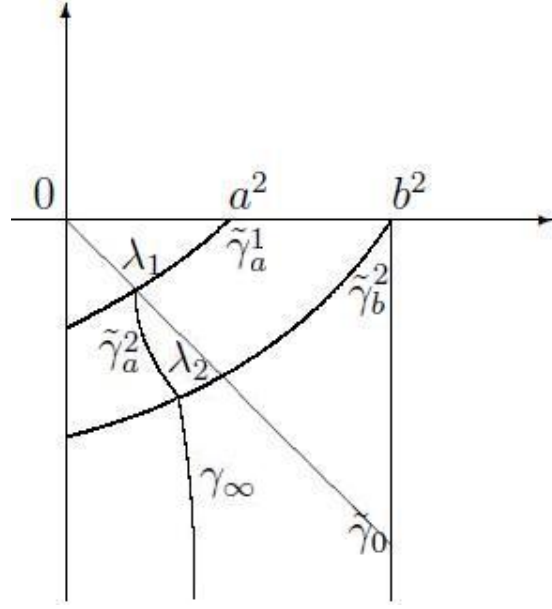


Рис. 1: Критические линии для случая $q(x) = x^2$ ($0 < -a < b$)

Кривые $\tilde{\gamma}_a^1$, $\tilde{\gamma}_b^2$ и $\tilde{\gamma}_0$ проходят через точки вещественной оси $q(a)$, $q(b)$ и 0 , соответственно, и являются функциями относительно вещественной оси. Кривая $\tilde{\gamma}_\infty$ является функцией относительно мнимой оси, имеющей асимптотику $c_0 = \frac{1}{b-a} \int_a^b q(x)dx$ при $t \rightarrow +\infty$. Кривые $\tilde{\gamma}_a^2$, $\tilde{\gamma}_b^2$, $\tilde{\gamma}_\infty$ пересекаются лишь в некоторой точке $\lambda_2 \in \Pi$. Кривые $\tilde{\gamma}_a^1$, $\tilde{\gamma}_a^2$, $\tilde{\gamma}_0$ пересекаются лишь в некоторой точке $\lambda_1 \in \Pi_1$. Кривые $\tilde{\gamma}_a^1$, $\tilde{\gamma}_b^2$ не пересекаются. Никакая из упомянутых кривых не имеет самопересечений.

Обозначим через γ_0 часть кривой $\tilde{\gamma}_0$ между 0 и λ_1 , через γ_a^1 - часть кривой $\tilde{\gamma}_a^1$, заключенную между точками $q(a)$ и λ_1 , через γ_a^2 - часть кривой $\tilde{\gamma}_a^2$, заключенную между точками λ_1 и λ_2 , через γ_b^2 - часть кривой $\tilde{\gamma}_b^2$, заключенную между точками $q(b)$ и λ_2 , наконец, через γ_∞ - часть кривой $\tilde{\gamma}_\infty$, заключенную между λ_2 и $-i\infty$. Положим (см. рис. 2)

$$\Gamma = \gamma_0 \cup \gamma_a^1 \cup \gamma_a^2 \cup \gamma_b^2 \cup \gamma_\infty$$

Теорема 1.1. При любом $\tau > 0$ найдется $\varepsilon_0 > 0$, такое, что все собственные значения задачи (5), (6) при $\varepsilon < \varepsilon_0$ лежат внутри τ -окрестности графа Γ .

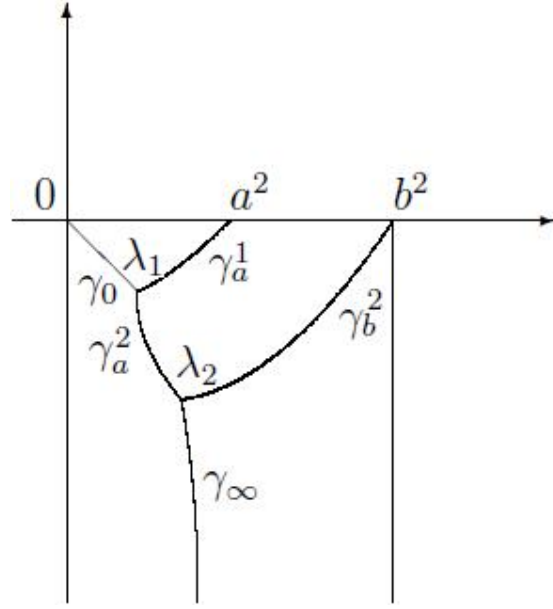


Рис. 2: Предельные спектральные кривые для случая $q(x) = x^2$ ($0 < -a < b$)

Во второй главе диссертации рассматривается спектральная задача Штурма-Лиувилля на вещественной оси для случая потенциала в виде одночлена четной степени. Изучается семейство дифференциальных операторов

$$L(\varepsilon)y = \varepsilon y'' + q(x)y, \quad \varepsilon > 0, \quad (7)$$

действующих в пространстве $L_2(\mathbb{R})$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Рассматривается семейство потенциалов вида $q(x) = (x + a)^{2n} + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Заметим, что достаточно рассмотреть случай $q(x) = x^{2n}$, поскольку при замене $t = x + a$ оператор и краевые условия не меняются, а прибавление константы b просто сдвигает спектр. Так как $q(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \pm\infty$, то спектр этого оператора дискретен при любом $\varepsilon > 0$. Положим

$$\gamma = \left\{ \lambda \mid \arg \lambda = -\frac{\pi n}{2(n+1)} \right\}$$

Сформулируем основные результаты этой главы:

Теорема 2.1. *Для всякой δ -окрестности луча γ найдется $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при $\varepsilon < \varepsilon_0$ все точки спектра задачи (7), рассматриваемой на вещественной оси, содержатся в этой окрестности.*

Для получения более детальной информации о поведении собственных значений в окрестности луча $\arg \lambda = -\frac{\pi n}{2(n+1)}$ положим

$$\tilde{\lambda}_k = e^{-\frac{\pi n}{2(n+1)}i} \frac{\pi(2k+1)^{\frac{2n}{n+1}}}{2uA}, \text{ где } u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \quad A = \int_{-1}^1 \sqrt{1-\xi^{2n}} d\xi.$$

Теорема 2.2. Для любого отрезка $I \subset \gamma$ не содержащего нуль, для любой окрестности Υ этого отрезка, не содержащей некоторой окрестности нуля, найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и константа $C > 0$ такие, что при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ окрестность Υ будет содержать точки спектра. Более того, если рассмотреть точки $\tilde{\lambda}_k$, то в каждой окрестности U_k этих точек радиуса $C\varepsilon$, лежащей в Υ найдется и при том единственная точка спектра.

В третьей главе диссертации рассматривается спектральная задача Штурма-Лиувилля на вещественной оси для случая потенциала в виде симметричного многочлена четвертой степени. Изучается семейство дифференциальных операторов

$$L(\varepsilon)y = i\varepsilon y'' + (x^4 - a^2 x^2) y, \quad \varepsilon > 0, \quad (8)$$

действующее в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, где ε малый параметр. Так как $q(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow \pm\infty$, то спектр этого оператора дискретен при любом $\varepsilon > 0$. Наша задача - описать характер поведения спектра при $\varepsilon \rightarrow 0$. Во второй главе мы показали, что при $q(x) = x^4$, то есть при $a = 0$, предельным множеством является луч $e^{-\frac{i\pi}{3}} t$, $t \in \mathbb{R}_+$. В диссертации доказано, что предельный спектр рассматриваемой задачи получается масштабированием с коэффициентом $\frac{a^4}{4}$ из предельного множества, соответствующего $a = 1$, поэтому все результаты получены для этого случая. При этом, в силу того, что спектр оператора лежит в замыкании его числового образа, спектральный параметр λ ограничен квадрантом

$$\Pi = \{\lambda \in \mathcal{C} \mid -1 < \operatorname{Re} \lambda, \operatorname{Im} \lambda < 0\}.$$

Пусть ${}_2F_1(p, q; r; z)$ - гипергеометрическая функция, определяемая рядом

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p)_k (q)_k z^k}{k! (r)_k} = 1 + \frac{pqz}{r} + \frac{p(p+1)q(q+1)z^2}{2r(r+1)} + \dots$$

В нашем случае p, q, r - вещественные константы, а z - аналитическая функция, зависящая от спектрального параметра λ . Критические кривые, вдоль которых концентрируется спектр рассматриваемой задачи, найдены в виде уравнений на гипергеометрическую функцию. Пусть

$$z_1(\lambda) = -\frac{\lambda + 2\sqrt{\lambda+1} + 2}{\lambda} \text{ и}$$

$$z_2(\lambda) = -\frac{\lambda - 2\sqrt{\lambda + 1} + 2}{\lambda}.$$

Рассмотрим кривые

$$\gamma_1 = \left\{ \lambda \mid \operatorname{Re} \left(e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{\lambda {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; z_1(\lambda)\right)}{\sqrt{1 - \sqrt{\lambda + 1}}} \right) = 0 \right\}$$

$$\gamma_2 = \left\{ \lambda \mid \operatorname{Re} \left(e^{\frac{i\pi}{4}} \frac{\lambda {}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; z_2(\lambda)\right)}{\sqrt{1 + \sqrt{\lambda + 1}}} \right) = 0 \right\}$$

$$\gamma_3 = \left\{ \lambda \mid \operatorname{Re} \left(e^{\frac{i\pi}{4}} \lambda \left(\frac{{}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; z_1(\lambda)\right)}{\sqrt{1 - \sqrt{\lambda + 1}}} - \frac{{}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; z_2(\lambda)\right)}{\sqrt{1 + \sqrt{\lambda + 1}}} \right) \right) = 0 \right\}$$

$$\gamma_4 = \left\{ \lambda \mid \operatorname{Re} \left(e^{\frac{i\pi}{4}} \lambda \left(\frac{{}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; z_1(\lambda)\right)}{\sqrt{1 - \sqrt{\lambda + 1}}} + \frac{{}_2F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 2; z_2(\lambda)\right)}{\sqrt{1 + \sqrt{\lambda + 1}}} \right) \right) = 0 \right\}$$

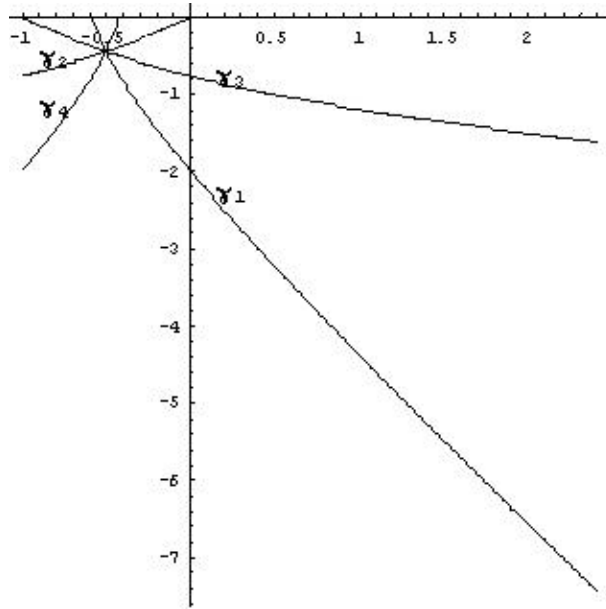


Рис. 3: Критические линии для случая $q(x) = x^4 - x^2$

С помощью использования свойств гипергеометрической функции в диссертации показано, что данные кривые в области Π качественно ведут себя также как изображено на рис. 3:

Кривая γ_1 выходит из вещественной точки $r_0 < -\frac{1}{2}$. Если λ лежит на кривой γ_1 , то $\operatorname{Arg}(\lambda) \rightarrow -\frac{\pi}{3}$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$. Кривая γ_2 выходит из

нуля под углом $-\frac{3\pi}{4}$. Если рассматривать кривую γ_2 во всей нижней полуплоскости, то $\text{Arg}(\lambda) \rightarrow -\pi$ при $|\lambda| \rightarrow \infty$ вдоль кривой γ_2 . Кривая γ_4 симметрична γ_1 , а γ_3 кривой γ_2 , относительно прямой $\text{Re } \lambda = -\frac{1}{2}$. Множество $\gamma_1 \cap \gamma_2 \cap \gamma_3 \cap \gamma_4$ состоит из одной точки $\lambda_0 \in \Pi$, $\text{Re } \lambda_0 = -\frac{1}{2}$, причем больше кривые $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ между собой не пересекаются.

Сформулируем основной результат главы.

Теорема 3.1. *Предельный спектральный граф рассматриваемого семейства операторов (8) является объединением части кривой γ_2 , соединяющей 0 с точкой $\lambda_0 = -0.5 - i0.44503\dots$, части кривой γ_3 , соединяющей -1 с λ_0 , и кривой γ_1 , выходящей из λ_0 и стремящейся к асимптоте параллельной лучу $e^{-\frac{i\pi}{3}t}$, $t \in \mathbb{R}_+$ (см. рис. 4)*

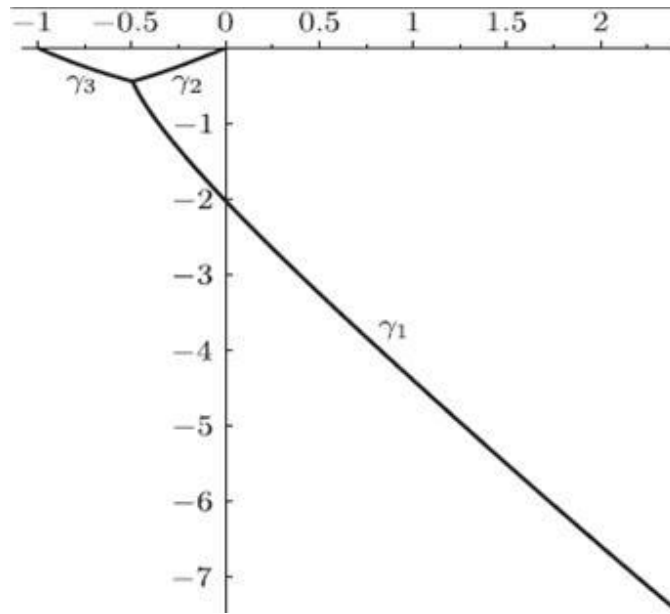


Рис. 4: Предельный спектральный граф для случая $q(x) = x^4 - x^2$

Автор благодарит своего научного руководителя профессора Андрея Андреевича Шкаликова за постановку задач, их полезные обсуждения и постоянный интерес к работе. Автор также благодарит профессора Анатолия Гордеевича Костюченко и всех участников семинара «Несамосопряженные операторы» за плодотворные дискуссии.

Работы автора по теме диссертации.

- [1] Покотило В. И. *Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с потенциалом $q(x) = x^4 - a^2x^2$* //Мат. заметки., 2009, т. 85, вып. 5, с. 792-796
- [2] Покотило В. И., Шкаликов А. А. *Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с параболическим потенциалом* //Мат. заметки., 2009, т. 86, вып. 3, с. 469-473
В работе [2] В. И. Покотило принадлежит доказательство лемм 2.1, 2.2, 2.3, 2.4 и первая часть теоремы 2.1. о форме предельного спектрального графа и топологии графов Стокса. А. А. Шкаликову принадлежит постановка задачи и вторая часть теоремы 2.1, связанная с переходом от топологии графов Стокса к утверждению о предельном спектральном графе.
- [3] Покотило В. И. *Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с потенциалом $q(x) = x^4 - a^2x^2$* //Международная конференция «Дифференциальные уравнения и смежные вопросы», посвященная 106-летию И.Г.Петровского. Тезисы конференции. Москва, 2007, с. 244-245.
- [4] Покотило В. И. *Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с параболическим потенциалом* //Международная конференция «Современные проблемы математики, механики и их приложений», посвященная 70-летию В.А.Садовниченко. Тезисы конференции. Москва, 2009, с. 42.
- [5] Покотило В. И. *Квазиклассическое приближение для несамосопряженной задачи Штурма-Лиувилля с потенциалом $q(x) = x^4 - a^2x^2$* //М., 2008. - 18 с. - Библиогр.: 4 назв. Деп. в ВИНТИ 05.08.09, N 519-B2009