Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.21

МУСИН Максим Маратович

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ОТ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ И СЛУЧАЙНЫХ ГРАФОВ

01.01.05 — теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Москва 2009

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук, профессор
Александр Вадимович Булинский

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор
Валентин Федорович Колчин

доктор физико-математических наук
Андрей Михайлович Райгородский

Ведущая организация: Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 25 декабря 2009 г. в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 24 ноября 2009 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 в МГУ,
доктор физико-математических
наук, профессор И.Н. Сергеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы

В диссертации расматриваются два основных типа случайных объектов: точечные процессы и случайные графы.

Точечный случайный процесс, называемый также иногда точечным потоком, позволяет описывать конфигурации случайных точек в $\mathbb{R}^d$. Формально точечные процессы задаются дискретной случайной мерой. Точечные процессы – широко исследуемая область, имеющая приложения в теории массового обслуживания, распознавании образов, статистической физике, науках о материалах, пространственной статистике и др. В развитие теории точечных процессов внесли вклад такие ученые, как Барбур, Бачелли, Бремо, Вир-Джонс, Добрушин, Дуб, Дэли, Жакод, Калленберг, Керстан, Кокс, Кэмпбелл, Ласт, Маттес, Ньюмен, Пальм, Пенроуз, Сливняк, Юкич, Яглом и другие. Основы теории точечных случайных процессов изложены в ряде фундаментальных книг, среди которых следует упомянуть монографии Калленберга[1], Дэли и Вир-Джонса[2,3], Мекке, Керстана и Маттеса[4]. В диссертации исследуются модели, порожденные классическим пуассоновским точечным процессом, а также случайные множества и функционалы от точечных потоков.

Другим объектом исследований данной диссертации являются негеометрические случайные графы. В развитие теории случайных графов внесли свой вклад такие ученые, как Болобаш, Дюрретт, Колчин, Реньи, Риордан, Эрдёш и другие. Изложение основ данной теории можно найти, например, в книгах Болобаша[5], Колчина[6] и Дюррет-

[1] O. Kallenberg, Random Measures, 4th ed., N.Y., Academic Press, 1986.

[2] D. Daley, D. Vere-Jones, An Introduction to the Theory of Point Processes Vol. I: Elementary Theory and Methods. 2ed., Springer, 2003

[3] D. Daley, D. Vere-Jones An Introduction to the Theory of Point Processes Vol. II: General Theory and Structure. 2ed., Springer, 2008.

[4] Й. Мекке, Й. Керстан, К. Маттес, Безгранично делимые точечные процессы. М., Наука, 1982.

[5] B. Bollobas, Random Graphs, 2nd ed., Cambridge University Press, 2001.

[6] В.Ф. Колчин, Случайные графы. 2-е изд., М., Физматлит, 2004.

та[7]. В последнее десятилетие внимание большого числа исследователей приковано к так называемым степенным законам. Такие законы распределения степеней вершин некоторых эмпирически наблюдаемых графов породили бурный рост исследований моделей, отличающихся от классического графа Эрдёша-Реньи. В диссертации изучается одна из основных моделей данного типа – граф преимущественного присоединения.

Следует отметить и другие направления исследования случайных графов, в частности, закономерности в раскрасках и хроматические числа, вклад в это направление внесен такими учеными, как Болобаш[8], Райгородский[9] и другие.

В первой части первой главы рассматриваются замкнутые случайные множества. Основоположниками теории замкнутых случайных множеств можно считать Кенделла и Матерона. Теория замкнутых случайных множеств широко развита, достаточно отметить вклад таких исследователей, как Амбарцумян, Штоян, Кендалл, Мекке, Молчанов.

Активно исследуются маркированные точечные потоки. Этот тип потоков позволяет сопоставлять каждой точке из данной конфигурации некоторую случайную величину, что существенно увеличивает класс моделей, доступных для описания. Маркировки могут быть случайными элементами со значениями в любом сепарабельном пространстве. Маркированный точечный поток на $\mathbb{R}^d$ является точечным потоком в произведении пространств $\mathbb{R}^d \times X$, где X – пространство, в котором берутся случайные элементы – маркировки.

В диссертации рассмотрен пуассоновский точечный поток, маркированный замкнутыми случайными множествами. Случайные маркировки возникают как окрестности ребер графа ближайших соседей, имеющие случайный радиус. Мотивацией к рассмотрению такой модели послужила локальная структура зависимости в данном множестве,

[7]R. Durrett, Random graph dynamics, Cambridge University Press, 2007.

[8]B. Bollobas, The chromatic number of random graphs, Combinatorica, 1988, 8, 49-56.

[9]А.М. Райгородский, Раскраски пространств и случайные графы, Фундамент. и прикл. матем., 2005, 11(6), 131–141.

а также ряд задач радиобиологии, вовлекающих пространственные соображения (см., напр., Булинский и Хренников[10]).

Граф k-го ближайшего соседа, порожденный точками пуассоновского потока, был рассмотрен Аврамом и Бертсимасом наряду с мозаикой Вороного и триангуляцией Делоне. Ими был предложен общий метод[11] доказательства центральных предельных теорем для аналогичных задач комбинаторной оптимизации, основанный на локализации структуры зависимости. Рассмотренное нами случайное множество, как показано автором, также обладает локальной структурой зависимости, что позволило доказать закон повторного логарифма для последовательности его объемов, попавших в растущий куб. С незначительными изменениями доказательство может быть модифицировано для целого ряда аналогичных структур. Учитывая этот факт, в диссертации особое внимание было обращено на понятие экспоненциально стабилизирующихся функционалов.

Такие функционалы были впервые рассмотрены Пенроузом и Юкичем в [12] и изучались далее ими, а также Айхельсбахером, Барышниковым, Шрайбером, Щерабковым и другими.

Идея стабилизации состоит в следующем. Пусть в каждой точке потока существует круг случайного радиуса такой, что изменение конфигурации точек потока вне данного круга не влияет на значение функционала в данной точке. Экспоненциально стабилизирующимися называются функционалы, для которых хвост радиуса стабилизации убывает экспоненциально быстро.

Для сумм экспоненциально стабилизирующихся функционалов различными авторами установлены слабый закон больших чисел, центральная предельная теорема, функциональная предельная теорема, исследованы большие уклонения. Найдено множество примеров таких

---

[10] A. Bulinski, A. Khrennikov, Generalization of the critical volume NTCP model in radiobiology, Université Paris-6 Pierre et Marie Curie, CNRS U.M.R. 7599, 2005, *Probabilitiés et Modèles Aléatoires.* 1-13.

[11] F. Avram, D. Bertsimas, On central limit theorems in geometric probability, Ann. Appl. Probab., 1993, 3, 1033–1046.

[12] M.D. Penrose, J.E. Yukich, Central limit theorems for some graphs in computational geometry, Ann. Appl. Probab., 2001, 11(4), 1005–1041.

функционалов: длина графа k-го ближайшего соседа, длина и размер ячейки мозаики Вороного, или триангуляции Делоне, модель последовательной парковки и др.

В диссертации рассматриваются суммы экспоненциально стабилизирующихся функционалов от пуассоновского точечного потока в $\mathbb{R}^d$ постоянной интенсивности $\lambda = 1$. Для исследования предельного поведения данных сумм было использовано случайное поле, порожденное частными суммами функционалов по точкам потока, попавшим в единичные кубы $Q_i = [0,1)^d + i$, $i \in \mathbb{Z}^d$. Для описанного случайного поля получена экспоненциальная оценка коэффициента сильного перемешивания $\alpha(u, v, r)$.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию негеометрического случайного графа преимущественного присоединения.

В работах Фалуцосов[13], Барабаши и Альберт[14,15] был исследован граф сети Интернет. Веб-сайты рассматривались как вершины графа, а гиперссылки между сайтами – как ребра. Данными авторами обнаружено, что в таком графе степени вершин распределены по степенному закону. В этих же работах предложено для описания подобных структур использовать модель графа преимущественного присоединения. Позднее различными авторами было обнаружено множество эмпирических графов, обладающих степенным законом в описанном выше смысле. Среди таких графов социальные сети, графы совместной работы ученых, нейронные сети мозга, сети электроснабжения.

Суть модели графа преимущественного присоединения в том, что вершина, уже имеющая большую степень, имеет больше шансов получить новые ребра, что очень естественно для сети интернет, социальных сетей и других структур, где уже набранный вес вершины играет существенную роль в получении новых ребер.

[13] M. Faloutsos, P. Faloutsos, C. Faloutsos, On power law relationship of the Internet topology, ACM Comp. Comm. Review, 1999, 29(4)

[14] A.-L. Barabasi and R. Albert, Emergence of scaling in random networks, Science, 1999, 286, 509-512.

[15] A.-L. Barabasi, R. Albert, H. Jeong, G. Bianconi, Power-Law Distribution of the World Wide Web, Science, 2000, 287, 2115.

В работе Болобаша, Риордана, Спенсера и Тушнади[16] было строго доказано, что граф преимущественного присоединения имеет асимптотически степенное распределение степеней вершин.

Граф преимущественного присоединения активно исследовался последнее десятилетие, для него получено множество результатов, в частности, оценка размера гигантской компоненты, оценка асимптотического поведения диаметра, исследованы максимальные степени вершин. Болобаш и Риордан исследовали сходство и различие между графом преимущественного присоединения и классической моделью Эрдёша-Реньи, оценили асимптотическое поведение диаметра случайного графа преимущественного присоединения.

В диссертации для графа преимущественного присоединения оценена вероятность локализации диаметра, а также получены оценки вероятности для каплинга данного графа и графа Эрдёша-Реньи.

Вопрос адекватности моделей случайных графов реальным данным был затронут в более поздних работах Митценмахера, Виллингера, Альдерсона, Дойля, Ли и др. Митценмахер[17] отмечает, что бурный рост исследований степенного закона породил большое количество интерпретаций непроверенных данных. Виллингер и др.[18] подвергли сомнениям способ исследований интернета, примененный Фалуцосами, Альберт и Барабаши. Набор исходных дынных, который, по мнению Альберт и Барабаши, представлял из себя граф Интернета, на самом деле не являлся таковыми. Причиной этого стала многослойная структура сети Интернет. Митценмахер в свою очередь отмечает в своей работе, что акцент в исследованиях графов интернет-типа должен быть смещен от интерпретации необработанных данных и создания новых моделей из эмпирических предположений к верификации имеющихся. В русле этого подхода в диссертации построен статистический тест для проверки адекватности модели графа преимущественного присо-

[16]B. Bollobas, O. Riordan, J. Spencer, G. Tusnady, The Degree Sequence of a Scale-Free Random Graph Process, Random Struct. Algorithm., 2001, 18(3), 279–290.

[17]M. Mitzenmacher, Editorial: The Future of Power Law Research, Internet Math., 2006, 2(4), 552–534.

[18]W. Willinger, D. Alderson, J.C. Doyle, Mathematics and the Internet: A Source of Enormous Confusion and Great Potential, Not. AMS, 2009, 56(5), 586–599.

единения. На базе полученных результатов о локализации диаметра была оценена ошибка первого рода для данного теста.

Цель работы

Настоящая диссертация посвящена исследованию случайных потоков и случайных графов. Её основные задачи – получить предельные теоремы для параметров описываемых моделей.

Научная новизна

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем.

1. Установлен закон повторного логарифма для последовательности объёмов случайного множества.

2. Доказан закон повторного логарифма для случайного поля, порожденного экспоненциально стабилизирующимися функционалами.

3. Исследован коэффициент сильного перемешивания для случайного поля, порожденного экспоненциально стабилизирующимися функционалами.

4. Оценена вероятность локализации диаметра случайного графа преимущественного присоединения.

5. Получена оценка ошибки первого рода для статистического теста адекватности данного графа модели преимущественного присоединения.

Результаты диссретации обоснованы в виде строгих математических доказательств и получены автором самостоятельно. Точные формулировки ряда утверждений приведены ниже.

Методы исследования

В работе применены методы исследования точечных процессов – формула Кэмпбелла-Сливняка, методы анализа случайных полей, в том числе моментные неравенства для сумм мультииндексированных случайных величин, техника Вишуры доказательства максимальных неравенств, аппарат анализа случайных графов. Кроме того, использованы предельные теоремы для слабо зависимых случайных величин.

Теоретическая и прикладная ценность

Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут найти применения в прикладной теории точечных процессов и теории случайных графов.

Апробация работы

Результаты диссертации неоднократно докладывались автором на семинаре "Асимптотический анализ случайных процессов и полей" (мехмат МГУ, 2005-2008 гг., руководители – профессор А.В. Булинский и доцент А.П. Шашкин), на Большом семинаре кафедры теории вероятностей (мехмат МГУ, 2009 г., руководитель – член-корреспондент РАН А.Н. Ширяев), научно-исследовательском семинаре кафедры анализа данных (ФИВТ МФТИ, 2009 г., руководитель – профессор А.М. Райгородский), городском семинаре по теории вероятностей и математической статистике (ПОМИ РАН, 2009 г., руководитель – академик РАН И.А. Ибрагимов), семинаре института стохастики (Университет Ульма, Германия, 2009 г., руководители профессор Е. Сподарев и профессор Ф. Шмидт), международной конференции SGSIA (Блаубойрен, Германия, 2009 г.), международной конференции SARD (Львов, Украина, 2009 г.), XXVIII конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ (Москва, 2006 г.).

Публикации

Результаты диссертации опубликованы в 5 работах, список которых приведен в конце автореферата.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы, насчитывающего 85 наименований. Общий объем работы 97 страниц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** излагается история вопроса, формулируются основные определения и описывается структура работы.

Введем основные определения. Пусть $|A|$ обозначает число элементов конечного множества A, или меру Лебега для континуальных подмножеств $\mathbb{R}^d$. Положим $\rho(x,y) = \sup_{i=1,\dots,d} |x_i - y_i|$, $x, y \in \mathbb{R}^d$. Обозначим $B_r(x) = \left\{y \in \mathbb{R}^d : \rho(x,y) \le r\right\}$ замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $x \in \mathbb{R}^d$. Пусть $\log x = \ln x \vee 1$ для $x \in \mathbb{R}$.

Точечный процесс задается локально конечной случайной мерой. Для процесса Π, задающего конфигурацию точек $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, выполняется равенство

$$\Pi(B) = \sum_{x_i \in \Pi} \mathrm{I}\left(x_i \in B\right),$$

где B есть ограниченное борелевское подмножество $\mathbb{R}^d$. Точечные процессы рассматриваются и как случайные меры, и как конфигурации случайных точек, что не вызывает недоразумений.

Функционалом от точечного процессса назовем измеримое отображение из пространства локально конечных мер в $\mathbb{R}$. Определим понятие радиуса стабилизации для данного функционала, введенное Пенроузом и Юкичем.

Определение 1.2.1. Для любого локально конечного множества $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^d$ и любого $x \in \mathbb{R}^d$ назовем радиусом стабилизации функционала $\phi = \phi(x, \mathcal{X})$ величину $R = R(x, \mathcal{X}) > 0$ такую, что для любого натурального числа $r > R$ выполняются равенства

$$\phi\left(x, \{x\} \cup \mathcal{X} \cap B_r(x)\right) = \phi\left(x, \{x\} \cup \mathcal{X}\right).$$

Если такого конечного R не существует, то положим $R = \infty$.

Определение 1.2.2. Семейство функционалов $\phi = \phi(x, \cdot)$, $x \in \mathbb{R}^d$, экспоненциально стабилизируется, если его радиус стабилизации п.н. конечен, причем для всех $t \ge 0$ и некоторых положительных постоянных C и c справедливо неравенство

$$\tau(t) := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathsf{P}\left(R(x, \{x\} \cup \Pi) > t\right) < C \exp\left\{-ct\right\}.$$

Сформулируем определние графа преимущественного присоединения, введенное Болобашем и Риорданом.

Определение 2.1.1. Пусть m - натуральное число. Для $m = 1$ зададим граф преимущественного присоединения G_m^n по индукции. Для $n = 1$ пусть G_1^1 состоит из одной вершины и одной петли. Граф G_1^n получается из графа G_1^{n-1} добавлением вершины номер n и ребра между ней и вершиной со случайным номером t_n, имеющим распределение

$$\mathsf{P}(t_n = l) = \begin{cases} \frac{d_l^n}{2n-1}, & 1 \le l \le n-1, \\ \frac{1}{2n-1}, & l = n, \end{cases}$$

где d_l^n обозначает степень вершины номер l в графе G_1^{n-1}.

Для $m > 1$ граф G_m^n получается из графа G_1^{mn} отождествлением вершин с номерами $1, \ldots, m$ в вершину 1 графа G_m^n, вершин $m+1, \ldots, 2m$ в вершину 2 и т.д.

В **первой главе** диссертации исследуются модели, основанные на точечных потоках. Первая часть этой главы посвящена исследованию модели пуассоновского точечного потока постоянной интенсивности, маркированного случайными множествами. В работах Матерона доказано, что замкнутое случайное множество является случайным элементом в сепарабельном пространстве, поэтому мы можем рассматривать такое маркирование. Пусть Π – пуассоновский точечный поток на $\mathbb{R}^d$ постоянной интенсивности 1. Рассмотрим маркировку следующего вида.

$$D_{x_i} := \{y \in \mathbb{R}^d \big| \rho(\{y\}, l_{x_i}) \le \xi_{x_i}\}, \quad x_i \in \Pi,$$

где l_{x_i} – ребро графа ближайших соседей, соответствующее точке $x_i \in \ \Pi$. Случайное множество D получается объединением всех маркировок точечного потока. При работе со случайным множеством мы использовали явную конструкцию пуассоновского процесса.

Для последовательности объемов $S_n = \left|D \cap [-n, n)^d\right|$ данного случайного множества получен закон повторного логарифма.

Теорема 1.1.1. Пусть для некоторых $\nu, \mu > 0$ выполнено условие

$$\nu \leq \xi_{x_i} \leq \mu \text{ п.н.}, \quad x_i \in \Pi.$$

Тогда справедливы соотношения

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{\tau(2^{d+1}n^d \log\log n)^{1/2}} = 1 \quad \text{п.н.},$$
$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n - \mathsf{E}S_n}{\tau(2^{d+1}n^d \log\log n)^{1/2}} = -1 \quad \text{п.н.},$$

где τ – некоторая постоянная, не зависящая от n.

Для доказательства данного утверждения потребовалось использовать локализацию структуры зависимости исследуемого случайного множества. Следует отметить, что полученные в первой части главы 1 результаты с незначительными изменениями в доказательстве могут быть установленны для аналогичных моделей случайных множеств, в основе которых вместо графа ближайших соседей лежат граф k-го ближайшего соседа, мозаика Вороного, или триангуляция Делоне.

Вторая часть первой главы посвящена исследованию сумм экспоненциально стабилизирующихся функционалов от точечного потока. Исследуются суммы функционалов от точечного потока вида $\phi(x, \mathcal{X})$, где $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathcal{X}$ – произвольное локально конечное множество на $\mathbb{R}^d$.

Рассмотрим случайное поле, порожденное экспоненциально стабилизирующимися функционалами.

$$X_i = \sum_{x \in \Pi \cap Q_i} \xi(x, \Pi), \quad Q_i = [0,1)^d + i, \quad i \in \mathbb{Z}^d.$$

В работе изучаются функционалы, обладающие следующими свойствами.

(A1) ξ – трансляционно инвариантен;
(A2) ξ – экспоненциально стабилизируется;
(A3) $\mathsf{E}X_0 = 0$;
(A4) $\mathsf{E}\,|X_0|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta \in (0,1]$.

Примером такого функционала является, в частности, длина ребра графа ближайших сосдедей, соответствующего данной точке потока.

В диссертации получена оценка коэффициента сильного перемешивания для случайного поля, порожденного экспоненциально стабилизирующимися функционалами.

Напомним определение коэффициента сильного перемешивания для случайного поля. Для σ-алгебр $\mathcal{A}$, $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ обозначим $\alpha(\mathcal{A}, \mathcal{B}) = \sup_{A \in \mathcal{A},\, B \in \mathcal{B}} |\mathsf{P}(AB) - \mathsf{P}(A)\mathsf{P}(B)|$. Для $r > 0$, $u, v \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и случайного поля $X = \left\{X_i, i \in \mathbb{Z}^d\right\}$ определим коэффициенты сильного перемешивания

$$\alpha(r, u, v) = \sup \alpha\left(\sigma\left\{X_i,\ i \in I\right\}, \sigma\left\{X_j,\ j \in J\right\}\right),$$

где верхняя грань берется по всем конечным множествам $I, J \subset \mathbb{Z}^d$ таким, что $\rho(I, J) \geq r$, $|I| \leq u$, $|J| \leq v$.

Теорема 1.2.1. Пусть функционал ξ удовлетворяет условиям (A1) и (A2). Тогда коэффициенты перемешивания поля $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ допускают оценку

$$\alpha(r, u, v) \leq C(u \wedge v) e^{-cr},$$

где положительные постоянные C и c не зависят от u, v и r; $\wedge$ обозначает минимум из двух чисел.

Доказательство этого факта потребовало использования формулы Кэмпбелла-Сливняка. Напомним, что упомянутая формула является следствием свойств меры Кемпбелла для точечных процессов и распределения Пальма для пуассоновского процесса. Пусть $B \subset \mathbb{R}^d$ ограниченное борелевское, f – ограниченная измеримая функция на произведении множеств $\mathbb{R}^d$ и пространства локально-конечных дискретных мер, Π – пуассоновский процесс в $\mathbb{R}^d$ постоянной интенсивности 1. Тогда выполняется соотношение

$$\mathsf{E} \sum_{x \in \Pi \cap B} f(x, \Pi) = \int_B \mathsf{E} f\left(x, \Pi \cup \{x\}\right) \mathrm{d}x.$$

Формулировка закона повторного логарифма для случайного поля X потребует некоторых вспомогательных обозначений. Для фиксированного $\tau > 0$ рассмотрим множество

$$G_\tau = \left\{ n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d : n_i > \prod_{j \neq i} n_j^\tau, \quad i = 1, \dots, d \right\}.$$

Далее запись $n \to \infty$ будет обозначать, что $n_i \to \infty$, $i = 1, \ldots, d$.

Теорема 1.2.2. Пусть функционал ξ обладает свойствами (A1)–(A4) и выполняется условие

$$\sigma^2 := \sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \operatorname{cov}(X_0, X_i) > 0.$$

Тогда справедливо предельное соотношение

$$\limsup_{n \to \infty,\, n \in G_\tau} \frac{\sum_{1 \le j \le n} X_i}{\sqrt{2d\sigma^2 \langle n \rangle \log\log \langle n \rangle}} = 1 \text{ п.н.},$$

где $\langle n \rangle = n_1 \ldots n_d$.

Для доказательства закона повторного логарифма потребовались моментные неравенства, центральная предельная теорема с оценкой скорости сходимости и максимальное неравенство.

Моментные оценки были получены за счет известных результатов для сильно перемешивающихся случайных полей (см., напр., книгу Дукана[19]).

Существует множество вариантов центральной предельной теоремы для случайных полей с перемешиванием. Данные результаты были установлены Булинским, Бенткусом, Дедекером, Сунклодасом и др. В диссертации использовался следующий результат Сунклодаса.

Лемма 1.2.4[20]. Пусть центрированное случайное поле $X = \{X_i, i \in \mathbb{Z}^d\}$ таково, что $L := \sup_j \mathsf{E}\,|X_j|^{2+\delta} < \infty$ и $\alpha(r, u, v) \le (u + v)^p e^{-cr}$, $p > 0$. Пусть $Z \subset \mathbb{Z}^d$ – произвольное конечное множество, $S(Z) = \sum_{i \in Z} X_i$. Тогда для некоторой постоянной C, значение которой зависит от величины p и не зависит от множества Z, верна оценка

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathsf{P}\left(\frac{S(Z)}{\sqrt{\mathrm{Var} S(Z)}} \le x \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \mathrm{d}t \right| \le$$
$$\le C \left[\frac{L\,|Z|}{(\mathrm{Var} S(Z))^{1+\delta/2}} \log^{d(1+\delta)} |Z| + \frac{L^{2/(2+\delta)}\,|Z|^{1/2}}{\mathrm{Var} S(Z)} \log^{1+dp\delta/(4+2\delta)} |Z| \right].$$

[19] P. Doukhan, Mixing. Properties and examples, N.Y., Springer-Verlag, 1994.

[20] Й. Сунклодас, Оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме для слабозависимых случайных полей, Литовск. мат. сборн., 1985, 26(3), 541–559.

Максимальное неравенство для данного случайного поля было получено при помощи техники Вишуры[21].

Лемма 1.2.7. Пусть последовательности $(a_l)_{l\in\mathbb{N}}$, $(\beta_l)_{l\in\mathbb{N}}$, таковы, что $a_l \sim (1+\varepsilon)\sqrt{2\sigma^2 dl\log\log l}$, для некоторого $\varepsilon \in (0,1)$; $\beta_l = o\left(a_l\right)$; $l/\beta_l^2 \to 0$, $l\to\infty$, $l\in\mathbb{N}$. Тогда при всех достаточно больших $n\in G_\tau$ и некотором $\nu > 0$ справедливо следующее максимальное неравенство.

$$\mathsf{P}\left(\max_{1\le m\le n}|S_m| \ge a_{\langle n\rangle}\right) \le 2^d\mathsf{P}\left(|S_n| \ge a_{\langle n\rangle} - 2d\beta_{\langle n\rangle}\right) + C\left\langle n\right\rangle^{-\nu},$$

где C не зависит от n.

Во **второй главе** диссертации рассматривается модель графа преимущественного присоединения. В первой части второй главы оценивается вероятность каплинга данного графа и классического графа Эрдёша-Реньи. Следующая теорема является уточнением результата Болобаша и Риордана, где та же вероятность была оценена для случая постоянного значения параметра m.

Теорема 2.1.1. Пусть последовательность $m_n \nearrow \infty$, $m_n \le n$. Для любого $0 < \eta < 1/2$ существует такое вероятностное пространство и определенные на нем графы $G^n_{m_n}$ и $G\left(n, \eta\frac{m_n}{n}\right)$, что

$$\mathsf{P}\left(\left|G\left(n,\eta\frac{m_n}{n}\right)\setminus G^n_{m_n}\right| \ge m_n^2 + ne^{-cm_n} + B_n\right) \le \frac{n(m_n^5 + Cm_ne^{-cm_n})}{B_n^2},$$

где B_n – произвольная последовательность положительных чисел.

Для доказательства данного результата применен последовательный каплинг. Граф Эрдёша-Реньи рассматрен как эволюционный граф, к которому на каждом шаге добавляется одна новая вершина и случайное количество новых ребер. На каждом шаге построено совместное распределение добавляемых ребер, произведена оценка математического ожидания и дисперсии количества получившихся на данном шаге лишних ребер в графе Эрдёша-Реньи. Суммарное количество таких ребер оценено с помощью неравенства Маркова.

[21] M.J. Wichura, Inequalities with applications to the weak convergence of random processes with multi-dimensional time parameters, Ann. Math. Statist., 1969, 40, 681–687.

Во второй части главы 2 оценивается вероятность локализации диаметра случайного графа преимущественного присоединения.

Теорема 2.2.1. Пусть $m \geq 2$ фиксировано и $0 < \varepsilon < 1/4$. Тогда

$$\mathsf{P}\left(|diam(G_m^n)\log\log n/\log n - 1| \geq \varepsilon\right) \leq n^{-\varepsilon/2}$$

при всех достаточно больших n.

Для доказательства данного результата потребовалось применить линеаризованную диаграмму хорд, введенную Болобашем и Риорданом.

Введем набор $X_1, \ldots, X_{2N}$ независимых случайных величин, равномерно распределенных на $(0,1)$. Пусть $Y_i = X_{2i-1} \wedge X_{2i}$, $Z_i = X_{2i-1} \vee X_{2i}$, $i = 1, \ldots, N$. Рассмотрим вариационный ряд случайных величин Z_i. Обозначим $R_i = Z_{(i)}$ правые и $L_i = Y_j$: $Z_j = Z_{(i)}$ – соответствующие левые концы интервалов.

Рассмотрим случайные величины $W_0 := 0$, $W_k := R_{mk}$, $k = 1, \ldots, n$ и $w_k := W_k - W_{k-1}$. Для каждого $k = 1, \ldots, n$ введем набор случайных величин $l_{k,1}, \ldots, l_{k,m}$ по правилу

$$\{l_{k,i} = j\} = \{W_{j-1} < L_{m(k-1)+i} \leq W_j\}, \qquad j = 1, \ldots, k, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Пусть граф состоит из n вершин, и из каждой вершины i проведены ребера к вершинам с номерами $l_{i,1}$, …, $l_{i,m}$. Болобаш и Риордан показали, что следующий граф является графом преимущественного присоединения G_m^n. Весом вершины $i \in G_m^n$, мы будем называть случайную величину w_i.

При доказательстве верхней оценки показано, что расстояние от некоторой случайной вершины до произвольной вершины графа не превосходит величины $(1/2 + \varepsilon/2)\log n/\log\log n$.

В ходе доказательства было использовано введенное Болобашем и Риорданом понятие полезной вершины.

Определение 2.2.1. Вершина i называется полезной тогда и только тогда, когда её вес $w_i \geq (\log n)^2/n$ и $i < n/(\log n)^5$.

При доказательстве верхней оценки было показано, что с вероятностью $1 - O(n^{-3\varepsilon/4})$ расстояние от произвольной вершины графа G_m^n до некоторой полезной вершины не превосходит $6\log\log n$, а расстояние от прозвольной полезной вершины до некоторой случайной вершины ξ_n, не превосходит $(1/2 + \varepsilon/3) \log n / \log\log n$. Существование ξ_n устанавливается в следующей лемме.

Лемма 2.2.3. Пусть константа $C > 0$ фиксирована. Пусть выполняется вспомогательное событие E_1. Тогда для некоторой постоянной γ существует $i \leq \lceil (\log n)^{1+\gamma} \rceil$ такое, что $w_i \geq C/(\sqrt{n} \log n)$.

Третья глава диссертации посвящена моделированию случайных графов и их статистическому исследованию. В первой части третьей главы получен статистический тест адекватности модели случайного графа. Применено понятие среднего диаметра, использованное в работе Кумара и др.[22] для исследования социальных сетей Flickr и Yahoo!360.

Определение 3.1.1. Средним диаметром $\mathrm{AvgDiam}(G)$ называется случайная величина, равная расстоянию между двумя случайно и равномерно выбранными вершинами графа G.

Теорема 3.1.1. Пусть H_0 – гипотеза о соответствии графа G распределению графа G_m^n. Для $m, n > 3$ и уровня значимости α имеет место следующая оценка

$$\mathsf{P}\left(\mathrm{AvgDiam}(G) < \frac{\log n}{\log\log n} - b(m,n,\alpha) \big| H_0\right) \leq \alpha,$$

где

$$b(m,n,\alpha) = \frac{\log\log n + \frac{2\log(4m)}{\log\log n}\log n - 2\log\frac{\alpha}{4}}{\log\log n + 2\log(4m)}.$$

Вероятность ошибки первого рода удалось оценить при помощи техники, аналогичной той, которую мы применили при выводе нижней оценки в теореме о локализации диаметра случайного графа преимущественного присоединения (теорема 2.2.1).

Во второй части главы 3 прозведено моделирование некоторых случайных графов. Для этого был использован пакет igraph 0.5.2, разработанный Габуром Чарди. Пакет написан на языке C, но имеет имплементацию для языка анализа статистической информации R. В данном

[22] R. Kumar, J. Novak, A. Tomkins, Structure and evolution of online social networks, Proceedings of the 12th ACM SIGKDD international Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, 2006, 611–617.

пакете имеются средства моделирования некоторых известных случайных графов. В диссертации представлены результаты моделирования графов Эрдёша-Реньи, Уоттса-Строгатца и графа преимущественного присоединения (модель Альберт-Барабаши). Для всех графов был вычислен диаметр и средний диаметр.

Автор благодарен профессору А.В. Булинскому за постановку задач и неоценимую помощь в научной работе, а также за его безграничное терпение. Автор признателен доценту А.П. Шашкину и аспиранту П.А. Яськову за полезные замечания и стимулирующие обсуждения ряда проблем.

Работы автора по теме диссертации

[1] М.М. Мусин, Закон повторного логарифма для сумм экспоненциально стабилизирующихся функционалов, Матем. заметки, 2009, 85(2), 234-245.

[2] М.М. Мусин, Оценка каплинга случайного графа преимущественного присоединения и графа Эрдёша-Реньи, Обозр. Прикл. Пром. Мат., 2009, 16(3), 546-547.

[3] М.М. Мусин, Статистический тест для случайного графа преимущественного присоединения, Обозр. Прикл. Пром. Мат., 2009, 16(4), 684.

[4] М.М. Мусин, Закон повторного логарифма для последовательности объемов случайных множеств, Труды XXVIII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ, Часть II, 2006, М., изд-во ЦПИ мехмата МГУ, 147-150.

[5] M. Musin, Diameter localization probability bound for random graph, Lviv, Abstracts of International Conference SARD, 2009, 172-173.