МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.987.4

Тарасенко Павел Юрьевич

Меры на пространствах функций и начально-краевые задачи

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор *Смолянов Олег Георгиевич*
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор *Шавгулидзе Евгений Тенгизович*; кандидат физико-математических наук, с.н.с. *Марчук Николай Гурьевич*
Ведущая организация:	Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Защита диссертации состоится 5 марта 2010 г. в 16 ч. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу 119991 ГСП-1, Москва, Ленинские горы, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 5 февраля 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И. Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Применение методов функционального анализа и теории вероятностей при изучении дифференциальных уравнений зачастую основано на представлении решений этих уравнений как среднего значения некоторого функционала на траекториях подходящего диффузионного процесса. Среднее значение функционала на траекториях случайного процесса может быть записано как интеграл соответствующего функционала на пространстве функций относительно меры в этом пространстве индуцированной данным процессом. Поэтому такие представления решений называются представления в виде функциональных интегралов.

При этом с каждым дифференциальным уравнением в частных производных эллиптического типа $\mathcal{L}$ можно связать семейство вероятностных мер в пространстве непрерывных функций на полупрямой. Это семейство мер определяет марковский процесс, соответствующий оператору $\mathcal{L}$. Если известны некоторые свойства оператора $\mathcal{L}$, то можно сделать определенные выводы о марковском процессе. И наоборот, изучая марковский процесс, можно получить информацию относительно дифференциального оператора.

В диссертации изучаются меры на пространстве непрерывных траекторий, индуцированные случайными процессами. Семейства случайных процессов зависят от бесконечно растущего параметра $\lambda \in \mathbb{R}^+$ и исследуется слабая сходимость порождаемых мер. При этом развивается подход к построению поверхностных мер, разработанный в серии работ О. Г. Смолянова и Х. фон Вайцзеккера с их сотрудниками[1,2,3,4], основанный на вложении риманова многообразия в евклидово пространство.

Параллельно с изучением мер исследуются уравнения в частных производных, связанные с этими мерами, и доказываются утверждения о сходимости решений таких задач. Отметим, что теория поверхностных мер Смолянова-Вайцзеккера успешно применялась ранее для исследования функциональных интегралов и их применения к изучению дифференциальных и псевдодифференциальных операторов, например в работах[5,6].

Все сказанное и определяет актуальность темы диссертации.

Цель работы

Цель работы заключается в представлении мер на траекториях в подмногообразиях евклидового пространства в виде предела мер на траекториях в объемлющем пространстве, а также изучении связанных с этим представлением начально-краевых задач.

Научная новизна

Результаты диссертации являются новыми. Основные из них заключаются в следующем:

1) Получено представление меры на пространстве траекторий в римано-

[1]Смолянов О.Г., Вайцзеккер Х. фон, Виттих О. Поверхностные меры и начально-краевые задачи, порождаемые диффузиями со сносом, ДАН, 2007. Т. 415 № 6. С. 737-741

[2]Sidorova N.A., Smolyanov O.G., Weizsäcker H. v., Wittich O. The Surface Limit of Brownian Motion in Tubular Neighbourhoods of an Embedded Riemannian Manifold, Journal of Functional Analysis, 2004. V. 206 P. 391-413

[3]Сидорова Н.А., Смолянов О.Г., Вайцзеккер Х. фон, Виттих О. Поверхностные меры Винера на траекториях в римановых многообразиях, ДАН, 2002. Т. 383 № 4. С. 458-463

[4]Smolyanov O.G., Weizsäcker H. v., Wittich O. Brownian Motion on a Manifold as Limit of Stepwise Conditioned Standard Brownian Motions, Can. Math. Soc. Conf. Proc., 2000. V. 29 P. 589-602

[5]Obrezkov O. O. The Proof of the Feynman–Kac Formula for Heat Equation on a Compact Riemannian Manifold, Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability, and Related Topics, 2003. V. 6 №2 P. 311-320

[6]Butko Ya. A. Representations of the Solution of the Cauchy-Dirichlet Problem for the Heat Equation in a Domain of a Compact Riemannian Manifold by Functional Integrals, Russian Journal of Mathematical Physics, 2004. V. 11 №2 P. 1-9

вом многообразии, порожденной броуновским движением, в виде предела мер на пространстве траекторий в объемлющем пространстве. В качестве следствия получено представление решения задачи Коши уравнения теплопроводности в римановом подмногообразии евклидового пространства в виде предела решений задач Коши в объемлющем пространстве.

2) Получено представление решения задачи Коши-Неймана уравнения теплопроводности в области евклидового пространства в виде предела решений задач Коши в объемлющем пространстве.

3) Получено представление решения задачи Коши-Дирихле, а также задачи Коши уравнения теплопроводности в области евклидового пространства в виде предела решений задач Коши уравнений теплопроводности с магнитным полем.

Методы исследования

В диссертации используются методы бесконечномерного и стохастического анализа, а также ряд специальных конструкций.

Теоретическая и практическая ценность

Диссертация носит теоретический характер. Её результаты могут быть использованы в математической физике для представления решений эволюционных уравнений на многообразии с помощью пределов интегралов по траекториям в объемлющем пространстве.

Апробация работы

Результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре под руководством д.ф-м.н., профессора Смолянова О. Г. и д.ф-м.н., профессора Шавгулидзе Е. Т. "Бесконечномерный анализ и математическая физика"(2006-2009 гг.), на конференциях молодых ученых МГУ им. Ломоносова (2007-2008 гг.) и на XXII Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной 106-летию со дня рождения И. Г. Петровского (Москва, 2007г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 4 работах автора, список которых приведен в конце автореферата. Работ, написанных в соавторстве, нет.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из трех глав и введения. Общий объем диссертации составляет 70 страниц. Список литературы включает 45 наименований.

Краткое содержание диссертации

Во Введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Глава 1

Пусть M — гладкое компактное риманово многообразие без границы, вложенное в евклидово пространство. Броуновским движением на многообразии называется марковский процесс, переходная полугруппа которого задается генератором $-\frac{1}{2}\Delta_M$, где Δ_M — оператор Лапласа-Бельтрами на M. В Главе 1 приводится конструкция, позволяющая представить меру на пространстве траекторий со значениями в M, порождаемую броуновским движением на M, при помощи слабого предела мер на пространстве траекторий в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^d$. Конструкция использует последовательность диффузионных процессов в $\mathbb{R}^d$, являющихся броуновскими движениями с бесконечно возрастающим по модулю сносом, направленным в сторону многообразия. Далее, с помощью формул о представлении решений дифференциальных уравнений в виде функциональных интегралов делается вывод о сходимости решений задач Коши определенного вида в $\mathbb{R}^d$ к решению задачи

Коши уравнения теплопроводности на данном многообразии.

Более подробно:

Пусть отображение $\pi : x \mapsto \bar{x}$ есть ортогональная проекция точки, принадлежащей r_0-окрестности многообразия, на само многообразие M.

Определим функцию $\tilde{C_M} : \mathbb{M}_{r_0} \to \mathbb{R}^d$ следующим образом:

$$\tilde{C_M}(x) = x - \bar{x}. \tag{1}$$

Пусть $C_M : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ — продолжение функции $\tilde{C_M}$ на все $\mathbb{R}^d$ такое, что $C_M(x)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица.

Пусть $B_t = B(t, \omega) : \mathbb{R}^+ \times \Omega \mapsto \mathbb{R}^d$ — стандартное броуновское движение в $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим семейство диффузионных процессов (B_t^λ), являющихся решениями стохастических дифференциальных уравнений вида

$$dB_t^\lambda = dB_t - \lambda C_M(B_t^\lambda)dt, \quad B_0^\lambda = x \in M,\ \lambda \in \mathbb{R}^+.$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 1. *Слабый предел последовательности мер, порождаемых диффузиями со сносом $(B_t^\lambda)(0 \le t \le T)$, на пространстве функций $C([0,T],\mathbb{R}^d)$ при стремлении λ к ∞ есть мера, сосредоточенная на пространстве $C([0,T],M) \subset C([0,T],\mathbb{R}^d)$, порождаемая броуновским движением на многообразии M.*

При доказательстве используется следующая

Теорема 2. *Пусть дана $\mathbb{R}^d$-значная непрерывная функция w на $[0,\infty)$ с условием $w(0) = x \in M$. Пусть $T > 0$ фиксировано. И пусть ξ_λ является решением уравнения 2. Тогда для любого $\varepsilon \in (0, r_0)$ существует положительное число $\Lambda \equiv \Lambda(\varepsilon)$ такое, что $\xi_\lambda(t) \in \mathbb{M}_\varepsilon, 0 \le t \le T, \forall \lambda \ge \Lambda$.*

где семейство функций ξ_λ задается решением уравнения

$$\xi_\lambda(t) = w(t) - \lambda \int\limits_0^t C_M(\xi_\lambda(s))ds \quad . \tag{2}$$

Пусть (M, g) гладкое компактное не имеющее границы риманово многообразие. Рассмотрим задачу Коши для уравнения теплопроводности на M:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f(t,x)}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}\Delta_M f(t,x) & \text{при } t \geq 0, x \in M, \\ f(0,x) = f_0(x) & \text{при } x \in M. \end{cases} \tag{3}$$

где Δ_M оператор Лапласа-Бельтрами на M, а $f_0(x)$ непрерывная на M функция.

Обозначим через $\alpha : M \to \mathbb{R}^d$ отображение, осуществляющее изометричное вложение многообразия в евклидово пространство $\mathbb{R}^d$. Пусть S является образом многообразия при этом вложении.

Пусть функция f_λ является решением задачи Коши следующего уравнения в пространстве $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_\lambda(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta f_\lambda(t,x) - \lambda(\nabla f_\lambda(t,x), C_M(x)) & \text{при } (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^d, \\ f_\lambda(0,x) = g_0(x) & \text{при } x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{4}$$

где функция U определена равенством (1), а $g_0(x) \in C(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$.

Из Теоремы 1 следует

Теорема 3. *Если $g_0(x)| = f_0(\alpha^{-1}(x))$ при $x \in S$, то $f_\lambda(x) \to f(\alpha^{-1}(x))$ при $\lambda \to \infty$.*

Глава 2

Пусть D — область в $\mathbb{R}^d$ с гладкой границей. Случайным процессом с отражением на границе области ∂D называется процесс, удовлетворяющий так называемому стохастическому дифференциальному уравнению Скорохода. В

Главе 2 изучается семейство броуновских движений аналогичное рассматриваемому в первой главе, но со сносом, направленным в сторону области D. Оказывается, что при неограниченно возрастающим коэффициенте сноса пределом таких процессов является броуновское движение с отражением на границе области. Далее, из представления решений дифференциальных уравнений как интеграла по траекториям по порождаемой мере делается вывод о том, что решение задачи Коши-Неймана для уравнения теплопроводности в этой области является пределом решений задач Коши определенного вида.

Подробнее:

Предложение 1. *Потраекторный предел (по норме пространства $C([0,T],\mathbb{R}^d)$) при $\lambda \to \infty$ последовательности B_t^λ броуновских движений со сносом к области существует и равен броуновскому движению B_t^r с отражением на границе этой области.*

Рассмотрим решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, зависящее от параметра λ, следующего вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_\lambda(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta f_\lambda(t,x) - \lambda(\nabla f_\lambda(t,x), C_D(t,x)) & \text{при } (t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^d, \\ f_\lambda(0,x) = f_0(x) & \text{при } x \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{5}$$

И рассмотрим задачу Коши-Неймана в области D для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g(t,x)}{\partial t} = \dfrac{1}{2}\Delta g(t,x) & \text{при } (t,x) \in (0,T] \times D, \\ \dfrac{\partial g(t,x)}{\partial n} = 0 & \text{при } (t,x) \in (0,T] \times \partial D, \\ g(0,x) = f_0(x) & \text{при } x \in D. \end{cases} \tag{6}$$

Теорема 4. *Пусть $g \in C^{1,2}([0,T] \times \bar{D})$ — решение задачи Коши-Неймана с начальным условием $f_0|_{\bar{D}}$ для уравнения (6). И пусть для каждого $\lambda > 0$ функция $f_\lambda \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^d)$ является решением задачи Коши в $[0,T] \times \mathbb{R}^d$*

для уравнения (5). *Тогда в каждой точке* $x \in \bar{D}$ $f_\lambda(t,x) \to g(t,x)$ *при* $\lambda \to \infty$.

Глава 3

Поведение частицы в магнитном поле $B(x)$ задается квантовым оператором механической энергии

$$H(a,V) = \frac{1}{2}(-i\nabla - a)^2 + V,$$

где $a(x)$ — векторный потенциал магнитного поля $B(x) = \nabla \times a$, а $V(x)$ — скалярный потенциал. Уравнение Шредингера с оператором энергии такого вида также называется уравнением теплопроводности с магнитным полем. В Главе 3 исследуется предельное поведение этого уравнения в $\mathbb{R}^d$ при бесконечно возрастающем магнитном потенциале $a(x)$ вне заданной области. С помощью формулы Фейнмана-Каца-Ито, дающей представление решения задачи Коши этого уравнения в виде функционального интеграла доказано, что в зависимости от ограничений накладываемых на $a(x)$ пределом решений может являться решение задачи Коши-Дирихле в этой области либо решение задачи Коши с начальным условием, ограниченным на эту область. Аналогичный факт о сходимости решений уравнения теплопроводности с магнитным полем к решению задачи Коши-Дирихле, с иными ограничениями на магнитное поле, был установлен ранее[7]. При этом использовалась техника, совершенно отличная от применяемой в диссертации.

Изучена связь данного результата с теорией поверхностных мер Смолянова-Вайцзеккера.

Более подробно:

Рассматривается уравнение теплопроводности с магнитным полем, возмущенное параметром $\lambda \in \mathbb{R}^+$, аналогично тому как это было сделано в

[7] Hempel R., Herbst I. Strong magnetic fields, Dirichlet boundaries, and spectral gaps, Comm. Math. Phys., 1995. V. 169 № 2. P. 237-259

предыдущих главах диссертации:

$$\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}(\nabla - i\lambda C_D)^2 f(t,x), \tag{7}$$

где $f : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $T > 0$.

Исследуются различные случаи поведения предела решений (7) при стремлении параметра λ к бесконечности в зависимости от условий накладываемых на векторный потенциал $C_D(x)$.

Условие 1. *Пусть векторный потенциал $C_D : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ обладает следующими свойствами:*

1) $C_D(x)$ дифференцируема и ограничена на $\mathbb{R}^d$;

2) $C_D(x) = 0$ при $x \in D$;

3) $\partial D \subset \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : C_D \neq 0\}}$

4) $\operatorname{div} C_D(x) = 0$.

Теорема 5. *Пусть $f_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — непрерывная ограниченная функция, обращающаяся в нуль вне D, $g : [0,T] \times D \to \mathbb{R}^d$ — решение задачи Коши-Дирихле уравнения теплопроводности*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g(t,x)}{\partial t} = \Delta g(t,x), & t \in (0,T], \;\; x \in D, \\ g(t,x) = 0, & t \in (0,T], \;\; x \in \partial D, \\ g(0,x) = f_0(x), & \qquad\qquad\;\; x \in D. \end{cases}$$

И пусть для каждого $\lambda > 0$ функция $f_\lambda : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ является решением задачи Коши уравнения теплопроводности с магнитным полем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_\lambda(t,x)}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}(i\nabla + \lambda C_D(x))^2 f(t,x), & t \in (0,T], \;\; x \in \mathbb{R}^d, \\ f_\lambda(0,x) = f_0(x), & \qquad\qquad\;\; x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

где функция C_D удовлетворяет условию 1. Тогда для любых $t \in [0,T]$, $x \in D$ $f_\lambda(t,x) \to g(t,x)$ при $\lambda \to \infty$.

Условие 2. *Пусть существует дважды дифференцируемая ограниченная функция $U(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ такая, что*

1) $U(x) = 0$ при $x \in \bar{D}$;

2) $m\{x \in \mathbb{R}^d \setminus \bar{D} : \nabla U(x) = 0\} = 0$ (где m-мера Лебега);

3) $C_D(x) = \nabla U(x)$.

Теорема 6. *Пусть $f_0 : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ — непрерывная ограниченная функция, обращающаяся в нуль вне D, $g : [0, T] \times D \to \mathbb{R}^d$ — решение задачи Коши уравнения теплопроводности*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial g(t,x)}{\partial t} = \Delta g(t,x), & t \in (0,T], \quad x \in D, \\ g(0,x) = f_0(x), & \qquad\qquad\quad\; x \in D. \end{cases}$$

И пусть для каждого $\lambda > 0$ функция $f_\lambda : [0,T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ является решением задачи Коши уравнения теплопроводности с магнитным полем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_\lambda(t,x)}{\partial t} = -\dfrac{1}{2}(i\nabla + \lambda C_D(x))^2 f(t,x), & t \in (0,T], \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ f_\lambda(0,x) = f_0(x), & \qquad\qquad\quad\; x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

где функция C_D удовлетворяет условию 2. Тогда для любых $t \in [0,T]$, $x \in D$ $f_\lambda(t,x) \to g(t,x)$ при $\lambda \to \infty$.

В заключение я хочу выразить глубокую благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за постановку задач, постоянное внимание и многолетнюю поддержку.

Работы автора по теме диссертации

1. *Тарасенко П. Ю.* **Предел мер, порождаемых диффузиями с неограниченно возрастающим сносом** // Математические заметки, 2009, Т. 86, № 6, С. 903–911.

2. *Tarasenko P. Yu.* **Brownian Motion on a Manifold as a Limit of Brownian Motions with Drift** // Russian Journal of Mathematical Physics, 2007, Vol. 14, No. 4, pp. 505-508.

3. *Тарасенко П. Ю.* **Начально-краевые задачи, порождаемые диффузиями** // Международная конференция, посвященная памяти И. Г. Петровского (XXII совместное заседание ММО и семинара им. И. Г. Петровского): Тезисы докладов. — М.: Изд-во МГУ, 2007, С. 312

4. *Тарасенко П. Ю.* **Предел полугруппы Шредингера при неограниченном росте магнитного потенциала** // Моск. гос. ун-т. - Москва, 2008. - 14 с. - Библиогр.: 3 назв. - Рус. - Деп. в ВИНИТИ 10.12.08. № 938-В2008.