Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517

Фишкин Алексей Юрьевич

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ ВОЗМУЩЕННОГО ЦЕНТРА КВАДРАТИЧНОГО ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ НА ПЛОСКОСТИ

01.01.02 — Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2010

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук профессор Ильяшенко Юлий Сергеевич.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук профессор Закалюкин Владимир Михайлович, кандидат физико-математических наук Елизаров Павел Михайлович.

Ведущая организация: Санкт-Петербургский государственный университет.

Защита диссертации состоится 5 марта 2010 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 5 февраля 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И. Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Настоящая диссертация посвящена исследованию предельных циклов *квадратичных* (т.е. полиномиальных степени два) векторных полей на вещественной плоскости. *Полиномиальное векторное поле* на плоскости задается системой дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = P(x,y), \qquad \dot{y} = Q(x,y), \tag{1}$$

где $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, а $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — многочлены. Его *предельным циклом* называется изолированная замкнутая траектория, гомеоморфная окружности. Во второй части 16-й проблемы Гильберта поставлены следующие вопросы[1]:

(q1) *Можно ли оценить число предельных циклов любого полиномиального векторного поля на плоскости величиной $H(n)$, зависящей только от n — наибольшей из степеней многочленов P и Q?*

(q2) *Если ответ на первый вопрос положителен, то оценить сверху $H(n)$.*

Эта проблема была сформулирована Гильбертом в 1900 г. в докладе на II-ом Международном конгрессе математиков. С тех пор 16-й проблеме Гильберта были посвящены многие исследования, получены значительные результаты, разработаны новые методы и разделы теории дифференциальных уравнений, однако сформулированные выше вопросы до сих пор открыты. Единственный известный общий результат о числе предельных циклов полиномиальных векторных полей состоит в конечности этого числа для каждого конкретного векторного поля. Для квадратичных векторных полей соответствующая теорема была получена Бамоном в 1986 г.[2], а общее утверждение для векторных полей произвольной степени было доказано несколькими годами позже независимо Ильяшенко[3] и Экалем[4].

Во многих современных исследованиях рассматривается ограничение 16-й проблемы Гильберта для квадратичных векторных полей на плоскости. Это — простейший класс векторных полей, уже для которого ответы

[1] Yu. Ilyashenko, *Centennial History of Hilbert's 16th Problem*, Bull. Amer. Math. Soc., 2002, **39**, no. 3, 301-354.

[2] R. Bamón *Quadratic vector fields in the plane have a finite number of limit cycles*, Publ. I.H.E.S **64** (1986), pp. 111-142.

[3] Yu. Ilyashenko *Finitness theorems for limit cycles*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[4] J. Écalle *Introduction aux fonctions analysables et preuve constructive de la conjecture de Dulac*, Hermann, Paris, 1992.

на вопросы, поставленные выше, неизвестны. Кроме того, квадратичные векторные поля обладают рядом замечательных свойств, упрощающих их исследование. Именно,

(1) любой предельный цикл квадратичного векторного поля обходит ровно одну особую точку, которая является фокусом;

(2) у квадратичного векторного поля может быть не более двух особых точек типа фокус;

(3) все предельные циклы квадратичного векторного поля, за исключением, может быть, одного цикла, обходят один и тот же фокус.

Свойства (1) и (2) элементарны и приведены в обзоре Коппела[5] о квадратичных векторных полях. Свойство (3) является недавним результатом Чжан Пингуанга[6]. Таким образом, вопрос о верхней оценке числа предельных циклов у квадратичного векторного поля сводится к вопросу об оценке числа предельных циклов, обходящих одну особую точку типа фокус. При этом наиболее сложным для исследования оказывается случай, когда фокус является медленным, будучи малым возмущением особой точки типа центр. Основополагающий результат о числе предельных циклов, рождающихся при малом возмущении центра в классе квадратичных векторных полей, был получен Баутиным[7] в середине прошлого века. При таком возмущении в малой окрестности особой точки рождается не больше трех предельных циклов. Этот результат опирается на алгебраические свойства кольца голоморфных функций от нескольких комплексных переменных (точнее, на структуру специального идеала в этом кольце, связанного с *отображением Пуанкаре* для квадратичного векторного поля). Его доказательство, полученное Баутиным, крайне трудоемко. В 90-х гг. оно было значительно упрощено Жолондеком[8], и сейчас входит в учебный курс для аспирантов[9]. Несмотря на то, что результат Баутина является локальным,

[5]W.A. Coppel *A survey of quadratic systems*, J. Diff. Eq. **2** (1966), pp. 293-304.

[6]Zhang Pingguang *Quadratic systems with two foci*, Appl. Math. J. Chinese Univ., **14A** (1999), pp. 247-253. // Zhang Pingguang *On the distribution and number of limit cycles for quadratic systems with two foci* (in Chinese), Acta. Math. Sinica, Chinese ser., **44** (2001), pp. 37-44. // Zhang Pingguang *On the distribution and number of limit cycles for quadratic systems with two foci*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, **3** (2002), pp. 437-463.

[7]Н.Н. Баутин, *О числе предельных циклов, рождающихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокус или центр*, ДАН СССР, **24**, №7 (1939), стр. 668-671. // Н.Н. Баутин, *О числе предельных циклов, появляющихся при изменении коэффициентов из состояния равновесия типа фокуса или центра*, Мат.сборник, **30(72)**, вып.1 (1952), стр. 181-196.

[8]H. Zoladek *Quadratic systems with center and their perturbations*, J. Diff. Eq. **109** (1994), pp. 223-273.

[9]Yu. Ilyashenko, S.Yakovenko *Lectures on Analytic Differential Equations*, Graduate Studies in Math, Vol.**86**, AMS, 2008.

и не дает общего утверждения о числе предельных циклов квадратичного векторного поля даже в гнезде одного фокуса, долгие годы предполагалось, что любое квадратичное векторное поле имеет не более трех предельных циклов[10]. Эта гипотеза была опровергнута лишь в 1979 г., когда было доказано существование квадратичного векторного поля с по крайней мере четырьмя предельными циклами[11]. В 1980 г. Ши Сонглином[12] был приведен конкретный пример такого векторного поля. Несмотря на отсутствие примеров квадратичных векторных полей с пятью и более предельными циклами, существующие верхние оценки на число их предельных циклов, даже при дополнительных ограничениях, представляются непомерно большими.

В 1994г. Дюмортье, Руссари и Руссо[13] предложили общий подход к доказательству существования числа $H(n)$. При помощи компактификации фазового пространства и пространства коэффициентов полиномиального векторного поля, этот вопрос сводится к вопросу о *конечной цикличности предельных периодических множеств.* В случае $n = 2$ данная стратегия приводит к рассмотрению 121 конфигурации предельных периодических множеств, и к необходимости доказательства конечной цикличности каждой конфигурации. По сей день в различных работах исследовано более 80 таких конфигураций, и доказана конечная цикличность каждой из них. Реализация этой стратегии имеет целью решение проблемы (q1), которая сформулирована выше, однако не позволяет ответить на вопрос (q2). Для ответа на последний вопрос может оказаться полезной оценка числа предельных циклов, не проходящих через малые окрестности особых точек системы (1). Это приводит к рассмотрению ограниченной 16-й проблемы Гильберта для квадратичных векторных полей, которую мы сейчас сформулируем.

Рассмотрим квадратичное векторное поле (1) с особой точкой типа фокус или центр. Нетрудно проверить, что при помощи подходящей аффинной замены координат и линейной замены времени, такая особая точка может быть помещена в начало координат, а система (1) преобразована к

[10] J. Reyn, *Phase portraits of planar quadratic systems*, Springer, 2007

[11] Chen Lansun, Wang Mingshu *Relative position and number of limit cycles of a quadratic differential system*, Acta Math.Sinica **22** (1979), pp. 751-758.

[12] Shi Songling, *A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems* не был приведен конкретный пример такого векторного поля, Scientia Sinica, **23**:2 (1980), pp. 153-158.

[13] F. Dumortier, R. Roussarie, C. Rousseau, *Hilbert 16th problem for quadratic vector fields*, Journal of Differential Equations, **110** (1994), no. 1, 86-133.

нормальной форме Каптейна[14]:

$$\begin{cases} \dot{x} = \lambda_1 x - y - \lambda_3 x^2 + (2\lambda_2 + \lambda_5)xy + \lambda_6 y^2, \\ \dot{y} = x + \lambda_1 y + \lambda_2 x^2 + (2\lambda_3 + \lambda_4)xy - \lambda_2 y^2, \end{cases} \tag{2_λ}$$

где $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\overline{\lambda} = (\lambda_2, \ldots, \lambda_6) \in \mathbb{S}^5$ (т.е. $||\overline{\lambda}|| = 1$), а $\lambda = (\lambda_1, \overline{\lambda})$ обозначает набор параметров, входящих в коэффициенты системы (2_λ). Рассмотрим предельные циклы векторного поля, отвечающего системе (2_λ), обходящие начало координат. Среди этих циклов *δ-хорошими* называются те, которые не проходят через δ-окрестности всех (в том числе и комплексных) особых точек системы и содержатся в круге $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1/\delta$ (где $\delta > 0$ – произвольно). Обозначим через $H(\delta, \lambda)$ число δ-хороших предельных циклов системы (2_λ). Следующая ограниченная версия 16-й проблемы Гильберта для квадратичных векторных полей была предложена Ильяшенко:

Проблема. (Ю.С. Ильяшенко) Для произвольного $\delta > 0$ получить равномерную по $\lambda \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^5$ оценку для величины $H(\delta, \lambda)$.

Решение этой проблемы было существенно продвинуто совместно Ильяшенко и Ллибре[15] (см. теорему 1 ниже). Полученный ими результат даёт искомую оценку, однако неравномерную по λ, и сводит проблему к получению равномерной оценки при приближении λ к некоторым особым множествам, каждое из которых имеет положительную коразмерность. В зависимости от типа такого особого множества, проблема распадается на несколько отдельных задач, методы исследования которых различаются. Чтобы сформулировать соответствующие результаты и задачи, необходимо ввести два вспомогательных параметра, характеризующие векторное поле (2_λ). Опишем здесь лишь их общий смысл; строгие определения этих величин приведены в тексте диссертации. Параметр $\sigma(\lambda) \geq 0$ измеряет расстояние от векторного поля (2_λ) до квадратичных векторных полей, приведенных к нормальной форме Каптейна, и имеющих особую точку типа центр в начале координат; параметр $\kappa(\lambda) \geq 0$ измеряет расстояние от векторного поля (2_λ) до множества *сингулярных векторных полей* (т.е. квадратичных векторных полей с прямой особых точек).

Для тех значений λ, при которых $\sigma(\lambda) = 0$ или $\kappa(\lambda) = 0$, легко получить равенство $H(\delta, \lambda) \equiv 0$. Тем не менее, при λ близких к таким значе-

[14]W.Kapteyn *On the midpoints of integral curves of differential equations of the first degree*, Nederl. Akad. Wetensch. Verslag. Afd. Natuurk. Konikl. Nederland, **19** (1911), pp. 1446-1457 (Dutch). // W.Kapteyn *New investigations on the midpoints of integrals of differential equations of the first degree*, Nederl. Akad. Wetensch. Verslag. Afd. Natuurk., **20** (1912), pp. 1354-1365; **21**, 27-33 (Dutch).

[15]Yu. Ilyashenko, J. Llibre, *A restricted version of the Hilbert's 16th problem for quadratic vector fields*, arXiv:0910.3443v1 [math.DS]

ниям, оценка на $H(\delta, \lambda)$, полученная Ильяшенко и Ллибре, неограниченно растёт. Приведем формулировку их теоремы. Эта формулировка адаптирована для нормальной формы Каптейна и несколько отличается от оригинальной.

Теорема 1. (Ильяшенко–Ллибре) Пусть $\{\delta, \sigma, \kappa\} \subset (0, 1)$, и $\lambda \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^5$ таково, что $\sigma(\lambda) \geq \sigma$, а $\kappa(\lambda) \geq \kappa$. Тогда

$$H(\delta, \lambda) \leq (|\log \sigma| + 1) \exp\left(\exp(10^{76}\delta^{-33}\kappa^{-2})\right). \tag{3}$$

Из этой теоремы следует, что для решения ограниченной 16-й проблемы Гильберта для квадратичных векторных полей остается рассмотреть три частных случая:

Задача 1. Оценить $H(\delta, \lambda)$ равномерно по λ при $\sigma(\lambda) \to 0$ и $\kappa(\lambda) > \kappa > 0$, где κ сколь угодно мало, но фиксировано.

Задача 2. Оценить $H(\delta, \lambda)$ равномерно по λ при $\kappa(\lambda) \to 0$ и $\sigma(\lambda) > \sigma > 0$, где σ сколь угодно мало, но фиксировано.

Задача 3. Оценить $H(\delta, \lambda)$ равномерно по λ при $\sigma(\lambda) \to 0$ и $\kappa(\lambda) \to 0$.

Задача 2 решена Ильяшенко с использованием методов теории быстро-медленных систем. Этот результат является новым и пока не опубликован. Задача 3 полностью не решена; определенные продвижения в ней получены недавно Дюмортье и Руссо[16] .

В диссертации получен ответ к поставленной выше задаче 1. Таким образом, проводимое в работе исследование является важным шагом в решении ограниченной 16-й проблемы Гильберта для квадратичных векторных полей на плоскости. Это обстоятельство относит диссертацию к кругу актуальных исследований по качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель работы.

Целью настоящей диссертации является исследование δ-хороших предельных циклов у квадратичных векторных полей, достаточно близких к векторным полям с особой точкой типа центр, и получение равномерной (по параметру, оценивающему близость векторного поля к центрам) верхней оценки на их число.

[16] F. Dumortier, C. Rousseau, *Study of the cyclicity of some degenerate graphics inside quadratic systems*, Communications On Pure and Applied Analysis, **8**:4 (2009), pp. 1133-1157.

Методы исследования.

В работе применяются методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории динамических систем, алгебры и комплексного анализа.

Научная новизна работы.

В диссертации получены следующие новые результаты:

- Доказана теорема об оценке числа изолированных нулей аналитического возмущения тождественно нулевой функции.
- Доказана теорема об оценке числа предельных циклов, обходящих мало возмущенный центр квадратичного векторного поля, и не проходящих вблизи других особых точек этого векторного поля и вблизи бесконечности. Полученная оценка является равномерной по малости возмущения центра.

Теоретическая и практическая ценность.

Диссертация носит теоретический характер. Техника, разработанная в диссертации, может быть полезна специалистам по теории динамических систем и дифференциальных уравнений. Полученные в диссертации результаты отвечают на один из важных вопросов, связанных с решением 16-й проблемы Гильберта для квадратичных векторных полей, и могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами в этой области.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и конференциях:

1. семинар механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова по динамическим системам под руководством профессора Ю.С.Ильяшенко (неоднократно, 2007-2009 гг.);
2. семинар отдела дифференциальных уравнений в МИРАН имени В.А. Стеклова под руководством акад. Д.В. Аносова и проф. Ю.С. Ильяшенко (2008 г.);
3. конференция "Singularities of planar vector fields, bifurcations and applications"(C.I.R.M, Марсель-Люмини (Франция), 11 – 15 мая 2009 г.),

4. летняя школа-конференция "Динамические системы" (Словакия, 25 июня – 7 июля 2009 г.),
5. новогодняя мини-конференция кафедры дифференциальных уравнений механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (28 декабря 2009 г.).

Публикации.

Результаты диссертации опубликованы в работах, список которых приведён в конце автореферата [1–3].

Структура и объем работы.

Диссертация содержит введение, две главы, приложение и список литературы. Обе главы разделены на параграфы; первая глава состоит из трех параграфов, вторая — из десяти. Список литературы содержит 30 наименований. Объем диссертации — 96 страниц.

Содержание диссертации.

Настоящая диссертация посвящена исследованию предельных циклов квадратичных векторных полей на плоскости и получению верней оценки для числа δ-хороших предельных циклов (см. стр. 4) у квадратичных векторных полей, достаточно близких к векторным полям с особой точкой типа центр.

Во **введении** освещается об история решаемой задачи и её связь с исследованиями в области 16-й проблемы Гильберта. Там же даются основные определения и формулируются теоремы, полученные в диссертации, описывается структура диссертации.

В **главе 1** доказывается результат, являющийся вспомогательным для решения основной задачи, — это теорема об оценке числа изолированных нулей малого аналитического возмущения тождественно нулевой функции (теорема 4). Связь между оценками на число предельных циклов у аналитических векторных полей и оценками на число нулей аналитических функций устанавливается при помощи *отображения Пуанкаре* (отображения первого возвращения траектории на заданную трансверсаль к векторному полю). Одним из мощных инструментов для получения нелокальных оценок на число нулей аналитической функции является *теорема о* *нулях и росте*[17], которая формулируется в §1.3. С помощью этой теоремы в разных работах были получены оценки на число предельных циклов уравнений Абеля[18], уравнений Льенара нечетной [19] и чётной (при дополнительных ограничениях)[20] степени, а также обобщенных уравнений Льенара нечетного типа. Однако в случае, когда отображение Пуанкаре является сколь угодно малым возмущением тождественного отображения, применение теоремы о нулях и росте не дает никакой конечной оценки на число предельных циклов. Именно этот случай возникает в основной исследуемой в диссертации задаче о числе предельных циклов, обходящих слабо возмущенный центр. Теорема 4 главы 1 обобщает теорему о нулях и росте и дает возможность для получения оценок на число предельных циклов у аналитических векторных полей при малом возмущении центра.

Формулировке теоремы 4 предшествуют определения *идеала Баутина* и других понятий, связанных с идеалами в кольце аналитических функций. Напомним, что для аналитической функции $f(x, \lambda) : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ идеал Баутина определяется следующим образом. Пусть

$$f(x, \lambda) = \sum_{k \geq 0} f_k(\lambda) x^k$$

есть разложение ростка $f(x, \lambda)$ в ряд Тейлора по x в точке $x = 0$. Идеал $I(\xi) = (f_0, \ldots, f_k, \ldots)(\xi)$ кольца ростков голоморфных функций от нескольких комплексных переменных в точке ξ, который порожден всеми ростками $\{f_k\}$ в этой точке, называется *идеалом Баутина* ростка f в точке $x = 0$ при $\lambda = \xi$. *Индексом Баутина* ряда Тейлора для $f(x, \lambda)$ называется наименьшее целое число $d \geq 0$, для которого $I(\xi)$ совпадает с идеалом $(f_0, \ldots, f_d)(\xi)$, порожденным первыми $d + 1$ коэффициентами ряда. Конечность индекса является следствием нётеровости кольца ростков голоморфных функций[21]. Ростки $(f_0, \ldots, f_d)(\xi)$ называются *каноническими образующими* соответствующего идеала Баутина.

С идеалами в кольце голоморфных функций в полидиске связано еще два важных понятия. Первое из них — это *константа роста*. Эта величина зависит от выбранной системы образующих для идеала и ограни-

[17] Yu. Ilyashenko, S.Yakovenko, *Counting real zeroes of analytic functions satisfying linear differential equations*, Journal of Diff. Eq., **126** (1996), pp. 87-105.

[18] Yu. Ilyashenko, *Hilbert type numbers for Abel equations, growth and zeroes of holomorphic functions*, Nonlinearity, **13** (2000), 1337-1342.

[19] Yu. Ilyashenko, A. Panov, *Some upper estimates of the number of limit cycles of planar vector fields with applications to Liénard equations*, Mosc. Math. J., **1**:4 (2001), 583–599.

[20] G. Kolutsky, *One Upper Estimate on the Number of Limit Cycles of Even Degree Liénard Equations in the Focus Case*, arXiv:0911.3516v1 [math.DS].

[21] М. Эрве, *Функции многих комплексных переменных*, "Мир", Москва, 1965.

чивает по модулю коэффициенты в разложении элементов идеала по заданным образующим. Пусть ρ — некоторый полирадиус, $\{f_0, \ldots, f_n\} \subset O(\overline{\Delta_\rho(\xi)})$ — функции, голоморфные в окрестности замкнутого полидиска $\overline{\Delta_\rho(\xi)}$ и $I_\rho(\xi) = (f_0, \ldots, f_n)_\rho(\xi)$ — порожденный ими идеал в кольце $O(\overline{\Delta_\rho(\xi)})$. Величина $C = C(\rho, \xi) > 0$ называется *константой роста* в разложении элементов идеала $I_\rho(\xi)$ по образующим $f_0, \ldots, f_n$ (или, кратко, константой роста для идеала $I_\rho(\xi)$ и образующих $f_0, \ldots, f_n$), если для любой функции $f \in I_\rho(\xi)$ существует разложение

$$f = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i,$$

с коэффициентами $a_i \in O(\overline{\Delta_\rho(\xi)})$, такое, что для любого i справедливо неравенство

$$||a_i||_{\rho,\xi} \leq C||f||_{\rho,\xi}, \qquad \text{где } ||\cdot||_{\rho,\xi} := \max_{\overline{\Delta_\rho(\xi)}} |\cdot|. \tag{4}$$

Другое важное для нас понятие, связанное с идеалами в кольце голоморфных функций, — это *подходящий полидиск.* Пусть $\{f_0, \ldots, f_n\}$ и $I_\rho(\xi)$ определены как и раньше, а $\Sigma(\rho, \xi) = \{\lambda \in \overline{\Delta_\rho(\xi)} \mid f_0(\lambda) = \ldots = f_n(\lambda) = 0\}$ — нулевой локус идеала $I_\rho(\xi)$ внутри полидиска $\Delta_\rho(\xi)$. Положим

$$J_\rho(\xi) = \{f \in O(\overline{\Delta_\rho(\xi)}) \mid \forall \eta \in \Sigma(\rho, \xi) \text{ выполнено } f \in I(\eta) = (f_0, \ldots, f_n)(\eta)\}.$$

Очевидно, что $I_\rho(\xi) \subseteq J_\rho(\xi)$. Мы называем полидиск $\Delta_\rho(\xi)$ *подходящим* для идеала $I_\rho(\xi)$, если $J_\rho(\xi) = I_\rho(\xi)$. Свойство полидиска быть подходящим не зависит от выбора образующих идеала.

Чтобы формулировать теорему 4, дадим еще несколько определений. *Внутренним диаметром* линейно связного компактного множества в $\mathbb{C}$ называется максимум из кратчайших длин кривых, соединяющих внутри этого множества всевозможные пары его точек. Через $\operatorname{dist}(V, W)$ мы обозначаем *расстояние между двумя множествами* $V, W \subset \mathbb{C}$ в смысле следующего определения:

$$\operatorname{dist}(V, W) = \inf_{\substack{v \in V \\ w \in W}} |v - w|.$$

Приведём теперь основной результат первой главы диссертации.

Теорема 4. Рассмотрим линейно связный компакт $K \subset \mathbb{C}$, содержащий диск $\overline{\Delta_r(0)}$ радиуса $r \leq 1$, а также

- односвязную окрестность U компакта K с кусочно-гладкой границей,
- полирадиус R и функцию $f(x,\lambda)$, голоморфную в $\overline{U \times \Delta_R(\xi)}$ и ограниченную там по абсолютной величине константой $M > 0$,
- ряд Тейлора $f(x,\lambda) = \sum_{k\geq 0} f_k(\lambda)x^k$ в точке $x = 0$ при $\lambda \in \Delta_R(\xi)$, и соответствующий идеал Баутина $I = I(\xi)$ индекса d.

Существует полидиск $\Delta_\rho(\xi) \subset \Delta_R(\xi)$ такой, что для любого $\lambda \in \overline{\Delta_\rho(\xi)}$, число $N(\lambda)$ изолированных нулей функции $f(\cdot,\lambda)$ на компакте K оценивается сверху константой, зависящей только от первых тейлоровских коэффициентов $f_0,\ldots,f_d$ ряда Тейлора, от величины M и от геометрии множеств K и U. Более точно, пусть D — внутренний диаметр компакта K, $\varepsilon = \operatorname{dist}(K,\partial U)$ и $C(\rho,\xi)$ — константа роста для идеала $I_\rho(\xi) = (f_0,\ldots,f_d)_\rho(\xi)$, тогда

$$N(\lambda) \leq e^{2D/\varepsilon} \log\left(\frac{(d+1)C(\rho,\xi)M}{r^d}\right). \tag{5}$$

Кроме того, оценка (5) выполняется для любого полидиска $\Delta_\rho(\xi) \subset \Delta_R(\xi)$, который является подходящим для идеала $I_\rho(\xi)$, с соответствующей ему константой роста $C(\rho,\xi)$.

Эта теорема сформулирована §1.1. В §1.2 приводятся и доказываются вспомогательные утверждения об идеалах в кольце голоморфных функций. В §1.3 приводится доказательство теоремы 4.

В **главе 2** доказывается основной результат диссертации. Пусть $\lambda = (\lambda_1,\ldots,\lambda_6)$ обозначает набор параметров, соответствующих системе (2_λ), а величины $\sigma(\lambda)$ и $\kappa(\lambda)$ имеют тот же смысл, что и раньше (см. стр. 4). Приведём формулировку основного результата.

Теорема 2. Пусть $0 < \delta < 1$, $0 < \kappa < 1$. Если $\lambda \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^5$ таково, что $\kappa(\lambda) \geq \kappa$, а $\sigma(\lambda) \leq \sigma$, где $\sigma = \exp(-10^{73}\kappa^{-2}\delta^{-33})$, то число δ-хороших предельных циклов векторного поля (2_λ) оценивается сверху следующим образом:

$$H(\delta,\lambda) \leq \exp\left(\exp(10^{72}\kappa^{-2}\delta^{-33})\right) = e^{\sigma^{-1/10}}. \tag{6}$$

Доказательство этой теоремы опирается на теорему 4 из главы 1, и занимает основную часть главы 2. В §2.1–§2.3 вводятся основные определения и конструкции, строится отрезок K на вещественной плоскости, пересекающийся со всеми δ-хорошими предельными циклами векторного поля (2_λ), и приводится вариант теоремы 4, приспособленный для получения оценки на число δ-хороших предельных циклов квадратичных векторных полей, близких к центрам. Предельные циклы при этом соответствуют нулям невязки отображения Пуанкаре на отрезке K. Применение теоремы 4 в диссертации включает два основных шага:

1. получение аналитического продолжения отображения Пуанкаре в окрестности отрезка K и оценок на абсолютную величину его невязки;

2. построение подходящего полидиска для идеала Баутина невязки отображения Пуанкаре и оценка константы роста для разложения элементов этого идеала по каноническим образующим в построенном полидиске.

Данные задачи решаются во вспомогательных утверждениях, лемме 2 и лемме 3 соответственно, которые сформулированы в §2.4. В том же параграфе приведено доказательство теоремы 2, опирающееся на эти леммы.

Лемма 2 доказывается в §2.5. Для её доказательства используется неравенство Гронуолла и вспомогательный результат из работы Ильяшенко и Ллибре[22] о зазоре между δ-хорошими предельными циклами и Эйлеровой изоклиной для квадратичных векторных полей (2_λ), удовлетворяющих условию $\kappa(\lambda) \geq \kappa$.

Лемма 3 доказывается в §2.6 и представляет одну из наиболее технически трудоемких частей диссертации. Сначала рассматривается более простая задача нахождения константы роста для идеала Баутина невязки отображения Пуанкаре в специальных образующих (образующих Дюлака), имеющих простое выражение в виде многочленов от λ. Наличие таких образующих позволяет построить подходящий полидиск для идеала Баутина и найти константу роста в нём для образующих Дюлака. Этому посвящены Леммы 4–7. Пересчёту константы роста для идеала Баутина в канонических образующих посвящены Леммы 8–11. Кроме теоретических построений, для осуществления этой задачи требуется использование символьных компьютерных вычислений. В приложении после второй главы приводятся тексты программ, осуществляющих эти вычисления с помощью пакета Mathematica.

В §2.7 приводится оригинальная формулировка теоремы Ильяшенко-Ллибре, которая затем переформулируется в §2.8 для случая нормальной формы Каптейна (см. теорему 1 на стр.5). Из теорем 1 и 2 следует

[22] Yu. Ilyashenko, J. Llibre, *A restricted version of the Hilbert's 16th problem for quadratic vector fields*, arXiv:0910.3443v1 [math.DS]

Теорема 3. Пусть $0 < \delta < 1$ и $0 < \kappa < 1$. Если $\lambda \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^5$, и векторное поле (2_λ) удовлетворяет условию $\kappa(\lambda) > \kappa$, то число его δ-хороших предельных циклов не превосходит

$$\exp\left(\exp(10^{77}\kappa^{-2}\delta^{-33})\right).$$

Доказательство теоремы 3 дано в конце главы 2.

Я искренне благодарю моего учителя, профессора Юлия Сергеевича Ильяшенко, за постановку задачи, внимание к ее решению и плодотворные обсуждения, а также за создание идеальной творческой атмосферы при работе над текстом диссертации.

Работы автора по теме диссертации.

1. *Фишкин А.Ю.* О числе нулей аналитического возмущения тождественно нулевой функции на компакте // Математические заметки, т. **85** (2009). вып. 1. с. 110—118.

2. *Фишкин А.Ю.* О числе предельных циклов квадратичных векторных полей на плоскости // Доклады Академии наук, т. **428** (2009). №4. с. 462—464.

3. *Фишкин А.Ю.* О числе предельных циклов у квадратичных векторных полей на плоскости при возмущении центра // Депонировано в ВИНИТИ (2009), № 667-В2009, с. 1—76.