МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 517.984.68, 515.168.5

Толченников Антон Александрович

Спектральные свойства оператора Лапласа на декорированных графах и на поверхностях с дельта-потенциалами

01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2009

Работа выполнена на кафедре дифференциальной геометрии и ее приложений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Шафаревич Андрей Игоревич.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Степин Станислав Анатольевич;
	кандидат физико-математических наук Морозов Павел Валерьевич.
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение Математического института им. Стеклова РАН.

Защита диссертации состоится 19 февраля 2010 г. в 16 ч. 45 м. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, дом 1, МГУ им М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 19 января 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор

А.О. Иванов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертация посвящена: 1) изучению взаимосвязи геометрических свойств декорированных графов со спектральными свойствами оператора Лапласа на декорированных графах; 2) изучению предельного поведения спектра оператора Лапласа на окружности, двумерной сфере и диске с потенциалами, сходящимися к дельта-функции; 3) изучению предельного поведения спектра оператора Лапласа на торе вращения, меридиан которого стягивается в точку.

Декорированным графом называется топологическое пространство, полученное отождествлением концов отрезков с точками на гладких римановых замкнутых многообразиях, размерность которых не превосходит 3. Причем ребра приклеиваются в разных точках.

Оператор Лапласа на декорированном графе - это оператор, удовлетворяющий следующим двум требованиям: 1) на функциях, носители которых не содержит точек приклейки, он должен совпадать с прямой суммой операторов Лапласа на отрезках и на поверхностях; 2) он должен быть самосопряжен.

Этому определению удовлетворяет целое семейство операторов, которое можно параметризовать лагранжевыми плоскостями в $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$ (где n - количество отрезков в декорированном графе). Это эквивалентно заданию граничных условий в точках склейки, то есть системы из $4n$ линейных уравнений, связывающих значения функции и ее односторонних производных на концах ребер, а также коэффициенты при особенностях и значения регулярных частей функции в точках склейки (всего $8n$ переменных).

Актуальность этой темы связана, в частности, с тем, что подобными операторами можно моделировать гамильтониан заряженной частицы в массиве фуллеренов. Подобные объекты впервые появились в работе Б.С. Павлова[1].

В работе Й. Брюнинга и В. Гейлера[2] изучались свойства матрицы рассеяния для компактной поверхности с прикрепленными полупрямыми. В диссертации И.С. Лобанова[3] изучались спектральные свойства операторов Шредингера на периодических декорированных графах.

Аналогичная техника используется в вопросе о спектральных свойствах оператора Лапласа на поверхности с дельта-потенциалами. Этот оператор

[1]Павлов Б.С. Электрон в однородном кристалле из точечных атомов с внутренней структурой. // Теоретическая и математическая физика. – 1987. – Т. 72, N 3.– С. 403-415.

[2]J.Bruning, V.Geyler. Scattering on compact manifolds with infinitely thin horns.// J.Math.Phys. –2003. – Vol.44. – pp.371-405.

[3]И.С. Лобанов. Спектральные свойства гамильтонианов явнорешаемых моделей мезоскопических структур: декорированные квантовые графы и квантовые точки. Дис. ... канд. физ.-матем. наук, Мордовский гос. ун-т, Саранск, 2005.

определяется как самосопряженное расширение классического оператора Лапласа, ограниченного на функции, которые зануляются на конечном наборе точек.

Использование дельта-потенциалов в квантовой механике имеет более чем 70-летнюю историю. Изучая движение нерелятивистского электрона в жесткой кристаллической решетке, Р. де Л. Крониг и В.Г. Пенни[4] в 1931 году одними из первых стали использовать точечные потенциалы. В 1961 году Ф.А. Березин и Л.Д. Фадеев[5], используя теорию самосопряженных расширений, дали строгое математическое обоснование этого метода и предложили использовать резольвентную формулу М.Г. Крейна для получения резольвент возмущений. Дальнейшее исследование подобных моделей атомной физики проводилось в работах В.Н. Островского[6], Б.С. Павлова[7, 8]

Для классического оператора Лапласа на замкнутом многообразии размерность ядра совпадает с количеством компонент связности многообразия. В данной работе дано описание ядра оператора Лапласа на декорированных графах и оператора Лапласа на поверхностях с дельта-потенциалом в терминах соответствия между операторами и лагранжевыми плоскостями. Также в работе рассматривается конкретный оператора Лапласа на декорированных графах, заданный условиями типа непрерывности. Для этого оператора найдена связь размерности ядра с топологией графа.

Связь геометрических характеристик риманова многообразия со спектральными свойствами оператора Лапласа Δ, построенного по римановой метрике, проявляется в классической задаче нахождения асимптотической формулы следа квадрата резольвенты $Tr\ (\Delta + z^2)^{-2}$ $(z \to \infty)$ и экспоненты оператора $Tr\ e^{-\Delta t}$ $(t \to 0)$.

Для компактного риманова многообразия M хорошо известно (см., например, учебник С. Розенберга[9]), что

$$Tr\ e^{-\Delta t} \sim (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k,$$

где $a_k = \int_M a_k(x) dw_x$, $a_k(x)$ - полиномиальные выражения от компонент

[4] Kronig R. de L., Penney W.G. Quantum mechanics of electrons in crystal latices. // Proc. Roy. Soc. A. – 1931. – V.130. – P.499 - 513.

[5] Березин Ф.А., Фадеев Л.Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом. // Докл. Акад. Наук СССР. – 1961.– Т. 137. – С. 1011 - 1014.

[6] Демков Ю.Н., Островский В.Н. Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике. - Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975.

[7] Курасов П.Б., Павлов Б.С. Электрон в однородном кристалле из точечных атомов с внутренней структурой. II. // Теоретическая и математическая физика. – 1987. – Т.74, N. 1. – С. 82-93.

[8] Павлов Б.С. Теория расширений и явнорешаемые модели. // Успехи матем. наук. – 1987. – Т.42, N 6. – С. 99-131.

[9] S. Rosenberg. The Laplacian on a Riemannian manifold. // London Mathematical Society Student Texts. –1997. – Vol. 31. – Cambridge.

тензора кривизны и их ковариантных производных. В частности, $a_0(x) = 1$, $6a_1(x)$ - скалярная кривизна.

Отсюда, применяя преобразование Меллина, мы можем найти след квадрата резольвенты. Например, при $\dim M = 2$:

$$Tr(\Delta + z^2)^{-2} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k k!}{4\pi z^{2k+2}} = \frac{Vol(M)}{4\pi z^2} + \frac{\chi(M)}{6z^4} + \dots .$$

Обобщением этих формул на случай декорированных графов посвящена диссертация С.В. Рогановой[10]. Для этих целей использовалась формула Крейна, выражающая разность резольвент двух дизъюнктных расширений через граничные операторы $\Gamma^{(i)}$. В отличие от классического случая риманова многообразия, формула для следа квадрата резольвенты оператора Лапласа на декорированных графах содержит в качестве коэффициентов при степенях z рациональные функции от $\ln z$. Получается т.н. псевдоасимптотическое разложение, разложение по $z^{-n}\ln^{-m} z, n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Такое разложение, если существует, единственно. С.В. Рогановой было вычислено псевдоасимптотическое разложение для расширений специального вида с условиями локальности. Это означает, что граничные условия имеют вид $\Gamma^{(2)} = \Lambda\Gamma^{(1)}$, где Λ - матрица, состоящая из четырех диагональных блоков.

В данной работе мы вычисляем след экспоненты операторов с условиями локальности, а также находим разложение следа квадрата резольвенты для оператора с условиями непрерывности, который не попадает в класс операторов, рассматриваемых С.В. Рогановой.

Также в работе изучается следующий вопрос: что происходит со спектром оператора Лапласа при добавлении обычного потенциала, зависящего от малого параметра и сходящегося к дельта-функции? Будет ли он сходиться к спектру оператора с дельта-потенциалом?

Вопрос о дельта-потенциалах и их аппроксимациях для евклидовых пространств предельно подробно разбирался в монографии С.Альбеверио, Ф.Гестези, Р.Хэг-Крона и Х. Хольдена[11]. Для случая оператора на прямой имеет место следующий результат. Рассмотрим семейство операторов $H_{\varepsilon,y} = \Delta + \frac{1}{\varepsilon}V(\frac{\cdot - y}{\varepsilon})$, где $V \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда $H_{\varepsilon,y}$ сходится в равномерном резольвентном смысле к оператору $\Delta_{\alpha,y}$, где $\alpha = \int_{\mathbb{R}} V(x)dx$ (это единственный параметр, определяющий расширение). При $\alpha < 0$ отрицательная часть спектра $H_{\varepsilon,y}$ состоит из одного простого собственного значения, сходящегося к единственному собственному значению оператора $\Delta_{\alpha,y}$. Если $\alpha > 0$, то при достаточно малых ε отрицательная часть спектра $H_{\varepsilon,y}$ отсутствует и у $\Delta_{\alpha,y}$ нет отрицательных собственных значений. При $\alpha = 0$ $H_{\varepsilon,y}$ имеет

[10] S. Roganova. Direct and inverse spectral problems for hybrid manifolds. Dissertation, Humboldt Universitat zu Berlin. – 2007.

[11] Альбеверио С., Гестези Ф., Хеэг-Крон Р., Хольден Х. Решаемые модели в квантовой механике. - М.: Мир. – 1991.

не более одного отрицательного собственного значения, погружающегося в существенный спектр $[0;\infty)$.

В данной работе рассматривается семейство операторов на окружности вида $\Delta_\varepsilon = \Delta + \frac{1}{\varepsilon}V(\frac{x}{\varepsilon})$.

Для двумерной плоскости имеет место следующее утверждение. Пусть семейство операторов имеет вид:

$$H_{\varepsilon,y} = \Delta + \left(\frac{\lambda_1}{\ln\varepsilon} + \frac{\lambda_2}{(\ln\varepsilon)^2} + o\left(\frac{1}{(\ln\varepsilon)^2}\right)\right)\frac{1}{\varepsilon^2}V\left(\frac{\cdot - y}{\varepsilon}\right).$$

Тогда $H_{\varepsilon,y}$ сходится в равномерном резольвентном смысле к оператору $\Delta_{\alpha,y}$. Где α - параметр расширения, который находится следующим образом:

$$\alpha = \frac{\lambda_2 \int V(x)dx}{(2\pi)^2} + \frac{\int V(x)\int \ln(x-x')V(x')dx'dx}{2\pi(\int V(x)dx)^2},$$

$$\text{при } \int V(x)dx \neq 0,\ \lambda_1 = \frac{2\pi}{\int V(x)dx}.$$

В противном случае $H_{\varepsilon,y}$ сходится в равномерном резольвентном смысле к Δ.

Техника, применяемая в моногорафии, не обобщается на случай операторов на компактных многообразиях, имеющих дискретный спектр. Нами разбирается задача о сходимости спектра оператора Лапласа на сфере и диске с кусочно-постоянным потенциалом, сходящимся к дельта-функции (без нормировки логарифмом). Эта задача является модельным примером.

Еще одна затрагиваемая тема - сходимость спектра оператора Лапласа на поверхности, которая стягивается вдоль одного из направлений. Подобным задачам посвящены статьи П. Кучмента[12], У. Саито[13]. В работе П. Экснера и О. Поста[14] рассматривается "графоподобная" двумерная поверхность M_ε в $\mathbb{R}^3$, стягивающаяся при $\varepsilon \to 0$ к некоторому конечному графу Г. Ограниченные по ε собственные значения оператора Лапласа на графоподобных поверхностях сходятся к спектру оператора Лапласа на метрическом графе, причем граничные условия в вершинах графа зависят от способа перехода к пределу. В частности, ими построено такое семейство графоподобных поверхностей M_ε, для которых все ограниченные собственные значения $\lambda_k(M_\varepsilon)$ оператора Лапласа сходятся либо к нулю, либо к собственным значениям прямой суммы операторов Лапласа с условиями Дирихле на ребрах графа Г.

[12] Kuchment P., Zheng H. Convergence of spectra of mesoscopic systems collapsing onto a graph. // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – V. 258, N.2. – P.671-700.

[13] Saito Y. The limiting equation for Neumann Laplacians on shrinking domains. // Electron. J. Differ. Equ. – 2000. – V.31 – P. 1-25.

[14] Exner P., Post O. Convergence of spectra of graph-like thin manifolds.// Journal of Geometry and Physics. – 2005. – V.54. – P. 77-115.

В данной работе рассматривается задача о сходимости спектра оператора Лапласа на двумерном торе вращения, радиус меридиана которого стремится к нулю.

Цель работы.

Нахождение связи между геометрическими характеристиками сингулярных пространств и спектральными свойствами оператора Лапласа на этих пространствах

Научная новизна.

В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Описан изоморфизм ядра оператора Лапласа на декорированных графах и пересечения лагранжевой плоскости, задающей оператор, с некоторой фиксированной лагранжевой плоскостью. Доказана оценка размерности ядра оператора Лапласа с условиями типа непрерывности на декорированных графах.

2. Найдены первые члены псевдоасимптотического разложения следа экспоненты оператора Лапласа на декорированном графе с условиями типа локальности и первые члены псевдоасимптотического разложения следа квадрата резольвенты оператора Лапласа на декорированных графах с условиями типа непрерывности

3. Для оператора Лапласа с потенциалом, сходящимся к дельта-функции, на окружности, двумерной сфере и двумерном диске доказано, что в случае окружности непрерывные ограниченные собственные значения сходятся к собственным значениям оператора Лапласа с дельта-потенциалом, а в случаях сферы и диска сходятся к собственным значениям оператора Лапласа.

Основные методы исследования.

В работе используются топологические методы, методы анализа и абстрактной теории операторов (в частности, теории расширений).

Теоретическая и практическая ценность работы.

Диссертация носит теоретический характер. Изложенные в диссертации подходы и полученные результаты могут представлять интерес для специалистов в теории сингулярных пространств и теории операторов на сингулярных пространствах.

Апробация работы.

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах и конференциях:

- Топологическая конференция памяти П.С. Александрова (МГУ, мехмат, 2006)

- Семинар "Алгебры Ли и интегрируемые системы" под руководством к.ф.-м.н. А.А. Ошемкова, профессора А.И. Шафаревича (МГУ, мехмат, 2007)

- Конференция "Воронежская зимняя математическая школа им. С.Г. Крейна" (Воронежский Государственный Университет, 24 - 30 января 2008)

- Семинар "Математическая физика" под руководством профессора Т.Крихебауэра (Германия, Бохумский университет, 10 июня 2008)

- Международная конференция "Дни дифракции" (СПбГУ, 25-29 мая 2009)

- Семинар "Теория рассеяния" под руководством профессора

  Р.А. Минлоса (МГУ, мехмат, 10 декабря 2009).

Публикации.

Основное содержание диссертации было опубликовано в 4 работах, список которых приведен в конце автореферата [1]—[4].

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, 7 глав и списка литературы. Объем диссертации — 59 страниц, библиография включает 26 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** содержится обзор результатов, связанных с темой диссертации, приводится постановка задачи, дается краткое изложение основных результатов диссертации.

В **первой главе** мы формулируем основные определения и факты из теории самосопряженных расширений. Также мы рассматриваем необходимый в дальнейшем примера. Мы рассматриваем оператор Δ_0 - ограничение оператора Лапласа (заданного на замкнутом многообразии M) на функции, которые зануляются на конечном наборе точек $\{q_i\}_{i=1}^n$. Оператор Лапласа с дельта-потенциалом - это самосопряженное расширение замкнутого оператора Δ_0 (с индексами дефекта (n,n)). В первой главе мы перечисляем основные свойства интегрального ядра $G(x,y;z)$ резольвенты $(\Delta-z)^{-1}$ и описываем базис дефектного подпространства N_z для Δ_0 (это в точности $\{G(\cdot,q_i;z)\}_{i=1}^n$). Таким образом, каждая функция $f(x) \in D(\Delta_0^*)$ имеет следующее разложение в окрестности т. q_i:

$$f(x) = a_i(f)F_0(x,q_j) + b_j(f) + o(1), a_j, b_j \in \mathbb{C},$$

где F_0 не зависит от z и имеет следующий вид:

$$F_0(x,q) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\, d(x,q), & \text{если } \dim M = 1; \\ -\frac{1}{2\pi}\, ln\, d(x,q), & \text{если } \dim M = 2; \\ \frac{1}{4\pi}\, d(x,q)^{-1}, & \text{если } \dim M = 3. \end{cases}$$

Далее определяем операторы $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)} : D(\Delta_0^*) \to \mathbb{C}^n$:

$$\Gamma^{(1)} := (a_i(f))_{i=1}^n,\ \Gamma^{(2)} := (b_i(f))_{i=1}^n,$$

Таким образом, по лагранжевой плоскости $\Lambda \subset \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{C}^n$ мы можем построить самосопряженное расширение Δ^Λ с областью определения $D(\Delta^\Lambda) = \{f \in D(S^*) \,|\, (\Gamma^{(1)} f, \Gamma^{(2)} f) \in \Lambda\}$

Во **второй главе** доказывается

Теорема 4. $\ker \Delta^\Lambda \simeq L \cap \Lambda$, где $L = \Gamma(\ker \Delta_0^*)$ - лагранжева плоскость.

В утверждении 3 находится явный вид плоскости L, а в пункте 2.1 разобран конкретный пример нахождения параметров плоскости L (для оператора Лапласа на двумерной сфере).

Третья глава посвящена ядру оператора Лапласа H^Λ на декорированных графах. Здесь имеет место утверждение, абсолютно аналогичное теореме 4: $\ker H^\Lambda \simeq L \cap \Lambda$, где L - лагранжева плоскость в $\mathbb{C}^{4n} \oplus \mathbb{C}^{4n}$, где n - количество ребер графа.

Далее, в пункте 3.2 рассматривается конкретное расширение H^{Λ_0} с условиями типа непрерывности. В утверждении 4 доказывается его существование и единственность.

Центральный результат главы 3 - доказательство неравенства (теорема 5), выполненного для оператора H^{Λ_0} на декорированном графе (полученном декорацией графа Γ):

$$\beta_0 \leq \dim \ker H^{\Lambda_0} \leq \beta_0 + \beta_1$$

где β_0 - количество компонент связности графа Γ, β_1 - количество независимых циклов графа Γ. Приведен пример, в котором указанная оценка достигается (п. 3.4), и показано, что сколь угодно малым изменением длин ребер можно добиться равенства $\dim \ker H^{\Lambda_0} = \beta_0$. Также показано, что величина $\beta_1(\Gamma) - \dim \ker H^{\Lambda_0}$ не убывает при добавлении новых ребер и многообразий.

В **четвертой главе** мы вычисляем след экспоненты операторов Лапласа с условиями типа локальности (это означает, что граничные условия имеют вид $\Gamma^{(2)} = \Lambda \Gamma^{(1)}$, где Λ - матрица из четырех диагональных блоков), для чего применяем пребразование Лапласа

$$Tr(t\ e^{-tH^\Lambda}) \risingdotseq Tr(H^\Lambda + p)^{-2}$$

к каждому члену псевдоасимптотического разложения $Tr(H^{\Lambda} + p)^{-2}$ (утверждение 7), которое было найдено С.В. Рогановой, и даем оценку остаточного члена (утверждение 8). В теореме 7 найдены первые члены разложения $Tr(t\ e^{-tH^{\Lambda}})$.

В **пятой главе** мы, используя технику С.В. Рогановой, вычисляем $Tr(H^{\Lambda_0} + z^2)^{-2}$ для оператора Лапласа с введенными в п. 3.2 условиями непрерывности H^{Λ_0}. Для этих целей необходимо изменить операторы граничных условий и сравнивать резольвенту оператора H^{Λ_0} с резольвентой оператора H_0 - прямой суммы операторов Лапласа на многообразиях и операторов Лапласа на отрезках с условием Дирихле. В теореме 8 найдены первые члены псевдоасимптотического разложения $Tr(H^{\Lambda_0} + z^2)^{-2}$.

Оказывается, что в разложении $Tr(H^{\Lambda_0}+z^2)^{-2}$ слагаемые, не содержащие логарифмических членов, дают разложение для следа квадрата резольвенты прямой суммы операторов Лапласа на многообразиях и на отрезках с условиями Неймана. В то время, как в разложении следов операторов, рассматриваемых С.В. Рогановой, присутствуют ненулевые добавки к степенным членам.

В **шестой главе** рассматривается задача о предельном поведении спектра оператора Лапласа с потенциалом, сходящимся к дельта-функции. В пункте 6.1 рассматривается оператор на окружности и доказывается

Теорема 9. Рассмотрим задачу на окружности, параметризованной $x \in [0,1)$: $-y'' + \frac{1}{\varepsilon}V(\frac{x}{\varepsilon})y = \lambda y$, где $V(x)$ - интегрируемая функция с носителем $[0,1]$. Для каждой точки λ_0 вида $(2\pi k)^2 (k \in \mathbb{N})$ или решения уравнения $\frac{1}{M} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda_0}} \operatorname{ctg} \frac{\sqrt{\lambda_0}}{2}$ (где $M = \int_0^1 V(x)dx$) существует единственное собственное значение $\lambda(\varepsilon)$, т.ч. $\lambda(\varepsilon) \to \lambda_0$. Других собственных значений нет.

В пункте 6.2 рассматривается оператор на сфере и доказывается

Теорема 10. Рассмотрим задачу на нахождение собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами с потенциалом на стандартной двумерной сфере радиуса 1 : $(\Delta - V_\varepsilon(\cos\psi))u = -\lambda u$, где ψ - широта, $V_\varepsilon(\cos\psi) = \frac{C}{\varepsilon^2}$ при $0 < \psi < \varepsilon$, и $V_\varepsilon(\cos\psi) = 0$ при $\psi > \varepsilon$.

Тогда каждая непрерывная и ограниченная функция $\lambda(\varepsilon)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ к числу вида $n(n+1),\ n \in \mathbb{Z}$.

Аналогично, в пункте 6.3 рассматривается оператор Лапласа на двумерном диске с кусочно-постоянным потенциалом, сходящимся к дельта-функции. В теореме 11 доказывается сходимсть непрерывных ограниченных собственных значений к точкам спектра обычного оператора Лапласа.

В **седьмой главе** рассматривается задача об асимптотике спектра оператора Лапласа на двумерном торе вращения, радиус меридиана которого стремится к нулю. Теорема 12 вычисляет первые члены асимптотики собственных значений.

Благодарности.

Автор выражает искреннюю благодарность своему научному руководителю профессору Андрею Игоревичу Шафаревичу за постановку задач, постоянное внимание, многочисленные плодотворные обсуждения и помощь в работе.

Список публикаций по теме диссертации.

[1] А.А. Толченников. О ядре операторов Лапласа-Бельтрами с потенциалом нулевого радиуса и на декорированных графах.// Математический сборник. – 2008. – Т. 199, N7. – с. 123-138.

[2] A.A. Tolchennikov. Kernel and Trace Formula for the Exponential of the Laplace-Beltrami Operator on a Decorated Graph. // Russian Journal of Mathematical Physics. – 2008. – Vol. 15, No. 1. – pp.128-139.

[3] А.А. Толченников. Тезисы конференции "Дни дифракции 2009". Изд-во СПбГУ. – 2009. – с. 88.

[4] А.А. Толченников. Воронежская зимняя математическая школа С.Г. Крейна - 2008. Тезисы докладов. Изд-во ВорГУ. – 2008. – с. 136.