Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова
Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.518.8, 519.65

Михалин Дмитрий Александрович

НЕРАВЕНСТВА КОЛМОГОРОВСКОГО ТИПА НА ПРЯМОЙ, ПОЛУПРЯМОЙ, ОТРЕЗКЕ И ОКРУЖНОСТИ И ЗАДАЧИ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

01.01.09 — дискретная математика и математическая кибернетика,
01.01.01 — математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2010 г.

Работа выполнена на кафедре оптимального управления Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Владимир Михайлович Тихомиров.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Василий Николаевич Малоземов;
	доктор физико-математических наук, профессор Константин Юрьевич Осипенко.
Ведущая организация:	Российский государственный геолого-разведочный университет им. Серго Орджоникидзе

Защита диссертации состоится 19 февраля 2010 года в 16 ч. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14-й этаж).

Автореферат разослан 19 января 2010 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Работа посвящена точным неравенствам для производных гладких функций. Важный класс таких неравенств составляют неравенства для производных на прямой и полупрямой вида

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{C^b(T)} \leqslant K\|x(\cdot)\|_{C^b(T)}^{\frac{n-k}{n}}\|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_\infty(T)}^{\frac{k}{n}}, \tag{1}$$

где $0 \leqslant k < n$ — целые, T — прямая $\mathbb{R}$ или полупрямая $\mathbb{R}_+$, $C^b(T)$ — пространство ограниченных непрерывных функций на T с нормой $\|x(\cdot)\|_{C^b(T)} = \sup_{t\in T}|x(t)|$, $L_\infty(T)$ — пространство измеримых, существенно ограниченных функций на T с нормой $\|x(\cdot)\|_{L_\infty(T)} = \mathrm{vraisup}|x(t)|$. Задача состоит в нахождении наименьшей константы K, при которой неравенство (1) справедливо для всех функций $x(\cdot) \in \mathcal{W}^n_\infty(T) = \big\{x(\cdot) \in C^b(T)\,|\,x^{(n-1)}(\cdot) \in AC(T), x^{(n)}(\cdot) \in L_\infty(T)\big\}$, где $AC(T)$ — пространство локально абсолютно непрерывных функций на T. Эту оптимальную константу обозначим $K_T(n,k)$.

Задача о вычислении точной константы в неравенстве (1) равносильна нахождению точного значения в следующей экстремальной задаче:

$$x^{(k)}(0) \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{C^b(T)} \leqslant \gamma_1, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_\infty(T)} \leqslant \gamma_2 \tag{2}$$

для некоторых $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ (выбор этих констант на решение задачи не влияет). Функцию $\widehat{x}(\cdot)$, на которой достигается максимум в этой задаче, назовем *экстремальной функцией*. Задача (2) рассматривается нами также на окружности $\mathbb{T}$ и на отрезке $I = [0,1]$.

Точкой отсчёта для данной тематики явилась заметка Э. Ландау[1], опубликованная в 1913 году, в которой было доказано, что $K_{\mathbb{R}_+}(2,1) = 2$. Годом позже Адамар[2] доказал, что $K_{\mathbb{R}}(2,1) = \sqrt{2}$. Неравенство Адамара при-

[1] Landau E. Einige Ungleichingen für zweimal differentierbare Funktionen // Proc. London Math. Soc. 1913. V. 2. № 13. P. 43–49.

[2] Hadamard J. Sur le module maximum d'une fonction et de ses dérivées // C. R. Soc. Math. France. 1914. V. 41. P. 68–72.

влекло внимание А. Н. Колмогорова, и он поставил перед своим учеником Г. Е. Шиловым (в ту пору студентом, носившим фамилию Боссе Ю. Г.[3]) задачу обобщить результат Адамара на любые k и n. Шилов нашел константу $K_{\mathbb{R}}(n,k)$ при $n = 3,4$ для всех k и при $n = 5$ для некоторых k, но дальше продвинуться не смог[4]. Это дало повод Колмогорову самому взяться за решение задачи. Он решил ее в 1938 году[5]. Впоследствии было получено множество примыкающих результатов. В частности, в работе В. М. Тихомирова[6] рассматривалась задача (2) для $T = [0,1]$ и были описаны экстремальные функции, получившие название чебышевских сплайнов.

Задача (2) на полупрямой $\mathbb{R}_+$ была исследована Шёнбергом и Каваретто́й[7] в следующей постановке:

$$|x^{(k)}(0)| \to \max, \qquad \|x(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leqslant 1, \qquad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_\infty(\mathbb{R}_+)} \leqslant 2^{n-1}n!. \quad (3)$$

Было доказано, что экстремальная функция является сплайном; причем при $n = 2,3$ этот сплайн на любом отрезке непрерывности n-й производной с точностью до константы совпадает со смещенным чебышевским полиномом, и, соответственно, значение задачи (3) совпадает со значением k-ой производной чебышевского полинома в точке $t = 1$.

При $n \geqslant 4$ построена[7] некоторая последовательность чебышёвских перфектных сплайнов $(S_{nm}(\cdot))$ (где m — число узлов), которая сходится к

[3]Боссе Ю. Г. (Шилов Г. Е.) О неравенствах между производными // Сб. работ студ. науч. кружков МГУ. 1937, Т. 1, с. 68–72.

[4]Боссе Ю. Г. (Шилов Г. Е.) О неравенствах между производными // Сб. работ студ. науч. кружков МГУ. 1937, Т. 1, с. 68–72.

[5]Колмогоров А. Н. О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 252–261.

[6]Тихомиров В. М. Наилучшие методы приближения и интерполирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1,1]$ // Матем. сборник. 1969, Т. 80, № 2, с. 290–304.

[7]Shoenberg I. J., Cavaretta A. S. Solution of Landau's problem concerning higher derivatives on the half line // Proc. of the Intern. Conf. on Construction Function Theory, Golden Sands (Varna), May 19–25, 1970. Publ. House Bulgarian Acad. Sci., Sofia, 1972. P. 297–308.

экстремальной функции при стремлении m к бесконечности. При этом последовательность $(|S^{(k)}_{nm}(0)|)$ монотонно убывает и стремится к решению задачи (3), которое, в отличие от случая $n = 2, 3$, оказывается строго меньше, чем значение k-ой производной чебышевского полинома в точке $t = 1$.

Шёнберг и Каваретта[8] приводят также вычисленные значения величины $S^{(k)}_{nm}(0)$ при нескольких первых значениях n, k и m.

В последние годы вышло несколько монографий, посвященных неравенствам колмогоровского типа[9,10,11].

Интерес к неравенствам для производных и актуальность этой тематики вызваны несколькими причинами. Точные неравенства на протяжении всей истории привлекали внимание многих математиков. Достаточно привести в пример книгу “Неравенства” Харди, Литтлвуда и Полиа. С. Б. Стечкин в 60-е годы связал проблематику неравенств для производных гладких функций с интересной для численного анализа задачей оптимальной аппроксимации неограниченных операторов ограниченными (это актуальная проблема вычислительной математики, ибо численное решение дифференциальных уравнений относится к классу задач аппроксимации неограниченного дифференциального оператора ограниченными, в частности, сеточными операторами). Впоследствии эта проблематика была включена в более широкий класс задач оптимального восстановления. Точно решенные неравенства могут служить полигоном для различных теорий в анализе, в частности, для теории экстремальных задач.

Все описанные решения, касающиеся точных неравенств для производ-

---

[8] Shoenberg I. J., Cavaretta A. S. Solution of Landau's problem concerning higher derivatives on the half line // Proc. of the Intern. Conf. on Construction Function Theory, Golden Sands (Varna), May 19–25, 1970. Publ. House Bulgarian Acad. Sci., Sofia, 1972. P. 297–308.

[9] Бабенко В. Ф., Корнейчук Н. П., Кофанов В. А., Пичугов С. А. Неравенства для производных и их приложения. Киев: Наукова думка, 2003.

[10] Bagdasarov S. Chebyshev Splines and Kolmogorov Inequalities. Bukhauser, Basel etc. 1998.

[11] Kwong M. K., Zettl A. Norm Inequalities for Derivatives and Differences // Berlin. Springer-Verlag, 1992, 150 p. (Lecture Notes in Mathematics, V. 1536)

ных, были получены авторами "индивидуально", без использования общей теории экстремума. Мы же исследуем задачи (1) и (2), базируясь на одном из принципов общей теории — принципе Лагранжа.

В диссертации также рассматриваются экстремальные задачи, в которых ограничения на норму функции и ее n-й производной заданы не на одном и том же множестве T, а на разных множествах:

$$x^{(k)}(\tau) \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{C(\Delta)} \leqslant \gamma_1, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_\infty(T)} \leqslant \gamma_2, \quad \gamma_1, \gamma_2 > 0, \tag{4}$$

где Δ — некоторый отрезок, τ — некоторая точка T, а γ_1, γ_2 — некоторые числа.

Параллельно с решением экстремальных задач (2) и (4) в настоящей работе исследуются задача Стечкина и задача оптимального восстановления, которые были упомянуты выше. Точная постановка задачи Стечкина такова[12]. Пусть X и Y — банаховы пространства, $U : X \to Y$ — линейный (вообще говоря, неограниченный) оператор с областью определения $D_U \subset X$ и K — некоторый класс элементов из D_U. Множество линейных ограниченных операторов из X в Y, норма которых не превосходит числа $N > 0$, обозначим $\mathcal{L}(N) = \mathcal{L}(N; X, Y)$. Рассматривается задача о наилучшем приближении оператора U всевозможными линейными операторами S с нормой, не превосходящей числа $N > 0$, на заданном классе K. Другими словами, рассматривается величина

$$E_N(U; K) = \inf_{S \in \mathcal{L}(N)} R(U, S; K) = \inf_{S \in \mathcal{L}(N)} \sup_{x \in K} \|Ux - Sx\|_Y. \tag{5}$$

Задача состоит в исследовании вопроса существования, единственности и характеризации экстремального оператора, на котором в (5) достигается нижняя грань, а также, в ряде частных случаев, в точном вычислении величины $E_N(U; K)$.

[12] Стечкин С. Б. Наилучшее приближение линейных операторов // Матем. заметки. 1967, Т. 1, № 2, с. 137–148.

Общую теорию восстановления одним из первых стал создавать С. А. Смоляк[13], хотя в частных постановках подобные вопросы рассматривались и ранее (см., например, работы А. Сарда[14] и С. М. Никольского[15]). Общая задача о восстановлении линейного функционала на классе функций по некоторой информации об этой функции ставится следующим образом.

Пусть X и Y — вещественные векторные пространства, x' — линейный функционал на X, который требуется восстановить возможно лучшим образом на элементах x из некоторого класса $C \subset X$ по информации $y = F(x)$, где $F : X \to Y$ — некоторое, вообще говоря, многозначное отображение, называемое *информационным оператором.*

Методом восстановления функционала x' из пространства X', сопряженного с X, на классе C по информации F назовем любую функцию $\varphi : F(C) \to \mathbb{R}$. Погрешность, которую производит данный метод восстановления φ, будем оценивать величиной

$$e(x', C, F, \varphi) := \sup_{\substack{x \in C, \\ y \in F(x)}} |\langle x, x' \rangle - \varphi(y)|,$$

где $\langle x, x' \rangle$ — значение линейного функционала x' на элементе x. *Оптимальной погрешностью восстановления* назовём величину

$$E(x', C, F) := \inf_{\varphi} e(x', C, F, \varphi), \tag{6}$$

где нижняя грань берется по всем методам восстановления $\varphi : F(C) \to \mathbb{R}$, а метод $\widehat{\varphi}$, на котором эта нижняя грань достигается, назовем *оптимальным методом восстановления*, и мы пишем $\langle x, x' \rangle \approx \widehat{\varphi}(y)$, где $y \in F(x)$. Задачу нахождения величины $E(x', C, F)$ и соответствующего оптималь-

[13] Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук. М., 1965.

[14] Sard A. Best approximate integration formulae; best approximation formulae // Aner. J. Math. 1949, V. 71, P. 80–91.

[15] Никольский С. М. Квадратурные формулы. Изд. 2-е. М.: Наука, 1974. (1-е изд. — 1950).

ного метода $\widehat{\varphi}$ мы будем называть *задачей оптимального восстановления* и обозначать (x', C, F).

Цель работы. Одной из основных целей настоящей работы является исследование экстремальной задачи

$$x^{(k)}(\tau) \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{C(\Delta)} \leqslant \delta, \quad x(\cdot) \in W^n_\infty(T, \Gamma), \tag{7}$$

где $W^n_\infty(T, \Gamma)$ — соболевский класс:

$$W^n_\infty(T, \Gamma) = \{x(\cdot) | x^{(n-1)}(\cdot) \in AC(T),\ |x^{(n-1)}(t') - x^{(n-1)}(t'')| \leqslant |t' - t''|,$$
$$\text{и выполнено краевое условие } \Gamma\},$$

Δ — отрезок $[-1, 1]$ или $[0, 1]$, а (T, Γ) — это, соответственно, либо $(\mathbb{R}, \Gamma_{00})$ (т. е. когда рассматривается класс $W^n_\infty(\mathbb{R})$ при отсутствии граничных условий), либо $(\mathbb{R}_+, \Gamma_{n0})$ (когда рассматриваются функции из $W^n_\infty(\mathbb{R}_+)$ такие, что $x^{(s)}(0) = 0,\ 0 \leqslant s < n$), и $|\tau| > 1$.

Также решается связанная с экстремальной задачей (7) задача оптимального восстановления $(x^{(k)}(\tau), W^n_\infty(T, \Gamma), F_{\delta C(\Delta)})$, где $F_{\delta C(\Delta)}$ — многозначный информационный оператор, сопоставляющий функции $x(\cdot)$ такую функцию $y(\cdot) \in C(\Delta)$, что $\|x(\cdot) - y(\cdot)\|_{C(\Delta)} \leqslant \delta$.

Требуется решить задачу оптимального восстановления $(x^{(k)}(\tau), W^n_\infty(T, \Gamma), F_{\delta C(\Delta)})$, то есть найти величину $E(x^{(k)}(\tau), W^n_\infty(T, \Gamma), F_{\delta C(\Delta)})$ и оптимальный метод восстановления.

Также решается задача восстановления $(x^{(k)}(\tau), W^n_\infty(\mathbb{T}), F_{\delta C(\mathbb{T})})$. В этом случае известно решение соответствующей экстремальной задачи для дискретного множества значений δ, и для этих значений ищется решение соответствующей задачи восстановления.

Методика исследований. В отличие от перечисленных выше решений задач (1) и (2) и им подобных, которые были получены “индивидуально”, в настоящей работе используется аппарат общей теории экстремума.

Мы исследуем задачи (1), (2) и (4) при помощи принципа (метода множителей) Лагранжа. Из необходимых и достаточных условий, получаемых с помощью этого метода, выводится так называемое “основное тождество”, из которого в дальнейшем и получаются решения всех поставленных задач.

Между экстремальной задачей (7) и поставленной выше задачей восстановления имеется следующая взаимосвязь: если $\widehat{x}$ есть решение задачи (7), а $\widehat{\lambda}$ — вектор множителей Лагранжа, на котором достигается минимум функции Лагранжа, то $\widehat{\lambda}$ — оптимальный метод восстановления в задаче $(x^{(k)}(\tau), W^n_\infty(T,\Gamma), F_{\delta C(\Delta)})$, а оптимальная погрешность восстановления равна значению задачи (7).

Таким образом, решив экстремальную задачу (7) и найдя при этом множители Лагранжа, мы автоматически получаем решение соответствующей задачи восстановления.

При решении задачи восстановления $(x^{(k)}(\tau), W^n_\infty(\mathbb{T}), F_{\delta C(\mathbb{T})})$ вычисление множителей Лагранжа и решение задачи восстановления проводится методом, аналогичным примененному А. П. Буслаевым[16] для $T=\mathbb{R}$.

Научная новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

1. Получены решения задачи (7), когда Δ — отрезок $[-1,1]$ или $[0,1]$, а (T,Γ) — это, соответственно, либо $(\mathbb{R},\Gamma_{00})$, либо $(\mathbb{R}_+,\Gamma_{n0})$, для произвольных $n\in\mathbb{N}$ и $0\leqslant k<n$.

2. При решении задачи с граничными условиями было впервые доказано существование и единственность специальных чебышевских и золотаревских перфектных сплайнов, дающих решение в экстремальной задаче (7), а также описаны их основные свойства.

3. Для случая $T=\mathbb{T}$ приводится вычисление множителей Лагранжа и

[16] Буслаев А. П. О наилучшем приближении оператора дифференцирования. М., 1979.

решение задачи восстановления.

Теоретическая и практическая ценность работы. Диссертация носит теоретический характер. Изложенные в диссертации подходы и полученные результаты представляют интерес для специалистов по теории кодирования, теории приближения и оптимальному восстановлению.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

1. Семинар по теории приближения и теории экстремальных задач под руководством проф. В. М. Тихомирова на кафедре общих проблем управления механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (неоднократно, 2002–2008).

2. Семинар по проблемам оптимального восстановления под руководством проф. К. Ю. Осипенко на кафедре высшей математики МАТИ (2008).

3. Семинар по дискретному и гармоническому анализу под руководством проф. В. Н. Малоземова на математико-механическом факультете СПбГУ (2008).

4. Семинар "Теория автоматов" под руководством академика В. Б. Кудрявцева на кафедре математической теории интеллектуальных систем механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова (2009).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения и трех глав, которые содержат одиннадцать параграфов. Объем диссертации — 71 страница. Список литературы включает 53 наименования.

Краткое содержание работы

Во введении описывается общая постановка задачи и излагается содержание работы по главам и параграфам.

В первой главе диссертации содержатся предварительные сведения, необходимые для решения поставленных задач. Приводится обзор научной литературы и известных исследований по теме настоящей работы.

В первом параграфе ставится общая задача о точной константе в неравенствах для производных колмогоровского типа:

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \leqslant K\|x(\cdot)\|^{\alpha}_{L_p(T)}\|x^{(n)}(\cdot)\|^{\beta}_{L_r(T)}, \tag{8}$$

где $0 \leqslant k < n$ — целые, $1 \leqslant p, q, r \leqslant \infty$, $\alpha, \beta \geqslant 0$, $T = \mathbb{R} \vee \mathbb{R}_+$, справедливые для всех функций $x(\cdot)$ из $L_p(T)$, у которых $(n-1)$-я производная локально абсолютно непрерывна на T и n-я производная принадлежит $L_r(T)$ (при этом числа α и β однозначно определяются: $\alpha = \frac{n-k-1/r+1/q}{n-1/r+1/p}$, $\beta = 1 - \alpha$). Пространство таких функций мы будем обозначать через $\mathcal{W}^n_{p,r}(T)$ (или просто $\mathcal{W}^n_p(T)$, если $p = r$).

Задача о вычислении точной константы в неравенстве (8) равносильна нахождению точного значения в следующей экстремальной задаче:

$$\|x^{(k)}(\cdot)\|_{L_q(T)} \to \max, \quad \|x(\cdot)\|_{L_p(T)} \leqslant \gamma_1, \quad \|x^{(n)}(\cdot)\|_{L_r(T)} \leqslant \gamma_2 \tag{9}$$

для любых фиксированных чисел $\gamma_1, \gamma_2 > 0$.

Перечислены основные случаи, при которых ранее были решены неравенства колмогоровского типа, и приведены полученные результаты.

Во втором параграфе главы приводятся основные понятся и факты выпуклого анализа, необходимые для нашего исследования.

Даются определения эффективного множества и надграфика функции, выпуклой функции в векторном пространстве X. Вводится понятие двойственных пространств, сопряженной функции и второй сопряженной. Приводится теорема об условиях совпадения функции со своей второй сопряженной, которая служит базой теории двойственности выпуклых функций:

Теорема (Фенхель–Моро) *Пусть X — векторное топологическое пространство $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Функция f совпадает со своей второй сопряженной тогда и только тогда, когда f выпукла и замкнута.*

Вводится понятие субдифференциала, который во многих случаях играет в выпуклом анализе роль производной в гладком анализе. Для субдифференциального исчисления приводятся аналог теоремы Ферма о критерии абсолютного минимума, а также теоремы Моро-Рокафеллара и Дубовицкого-Милютина о субдифференциале суммы и максимума двух функций.

В третьем параграфе дается определение выпуклой задачи:

$$f_0(x) \to \min, \quad f_i(x) \leqslant 0,\ i = 1, \ldots, m, \quad x \in A. \tag{10}$$

Здесь $f_i \colon X \to \overline{\mathbb{R}}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, — выпуклые функции, отображающие линейное пространство X в расширенную прямую, $A \subset X$ — выпуклое множество.

Для этой задачи приводится правило множителей Лагранжа, которое является основным инструментом для решения поставленных задач.

Затем показано применение принципа Лагранжа в общей задаче о неравенствах для производных в различных случаях. Рассмотрены случаи классического вариационного исчисления и оптимального управления. Из принципа Лагранжа выводится так называемое “основное тождество”, из которого в дальнейшем и получаются решения всех поставленных задач.

В четвертом параграфе ставится вкратце описанная выше (стр. 5) задача оптимального восстановления (x', C, F). С ней связывается следующая задача, называемая *ассоциированной*:

$$\langle x, x' \rangle \to \max, \quad x \in F^{-1}(0), \quad x \in C, \tag{11}$$

которую можно переписать в виде

$$\langle x, x' \rangle \to \max, \quad u = 0, \quad u \in F(x), \quad x \in C, \tag{12}$$

где $F^{-1}(y) = \{x \in C \,|\, y \in F(x)\}$.

Если множество C и функция F выпуклы, то (12) — выпуклая задача.

Двойственная задача к (12) относительно стандартного возмущения[17] имеет вид

$$\sup_{\substack{x \in C, \\ y \in F(x)}} (\langle y, y' \rangle + \langle x, x' \rangle) \to \min, \tag{13}$$

где y' — линейный фунционал на Y.

Связь между выписанными задачами и их решениями дается в следующей теореме:

Теорема (двойственности для задачи восстановления)
Пусть в задаче (11) множества C и $\mathrm{gr}F$ выпуклы и уравновешены. Тогда допустимая в (12) точка $(\widehat{x}(0), 0)$ является решением этой задачи в том и только в том случае, когда найдется такой множитель Лагранжа $\widehat{\lambda} \in Y'$ (линейный фунционал на Y), что

$$\min_{\substack{x \in C, \\ u \in F(x)}} \mathcal{L}((x, u), -1, \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}((\widehat{x}, 0), -1, \widehat{\lambda}). \tag{14}$$

При этом
(а) $-\widehat{\lambda}$ *— решение задачи (13) и значения задач (12) и (13) совпадают;*
(б) $\widehat{\lambda}$ *— оптимальный метод восстановления в задаче (x', C, F) и $E(x', C, F) = \langle \widehat{x}, x' \rangle$.*

Вторая глава работы посвящена доказательству существования и единственности чебышевских и золотаревских перфектных сплайнов.

[17] Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000, с. 61.

Определение Функция $x(\cdot)$, заданная и непрерывная на отрезке $\Delta = [a, b]$, называется *полиномиальным сплайном* (или просто *сплайном*) порядка n с узлами $\{\xi_j\}_{j=1}^{m}$, такими, что $a =: \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_m < \xi_{m+1} := b$, если на каждом из промежутков $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, m$ функция $x(\cdot)$ есть алгебраический полином степени, не превосходящей n.

Определение Сплайн $x(\cdot) \in C^{(n-1)}(\Delta)$ степени n с узлами $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m$ называется *перфектным*, если на отрезке $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, m$ он имеет n-ю производную $x^{(n)}(\cdot) = (-1)^j \gamma$ (где $\gamma = \pm 1$), т. е. эта производная по модулю равна γ, и при этом ее знаки чередуются.

Определение Пусть $x(\cdot) \in C[a, b]$. Говорят, что $x(\cdot)$ обладает *N-альтернансом*, если существуют точки $a \leqslant \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_N \leqslant b$, такие, что $|x(\tau_j)| = \|x(\cdot)\|_{C[a,b]}$ при $1 \leqslant j \leqslant N$ и $x(\tau_j)x(\tau_{j+1}) < 0$ при $1 \leqslant j < N$.

Определение Скажем, что функция $x(\cdot) \in C^{(n-1)}[a, b]$ *удовлетворяет Γ_{uv}-условию* на $[a, b]$, где $u, v \in \mathbb{Z}_+$, $u \leqslant n$ и $v \leqslant n$, если $x^{(j)}(a) = 0$ при $0 \leqslant j \leqslant u - 1$ и $x^{(j)}(b) = 0$ при $0 \leqslant j \leqslant v - 1$ (если $u = 0$ или $v = 0$, то условия в соответствующем конце отрезка отсутствуют).

Перфектный сплайн степени n с m узлами, удовлетворяющий Γ_{uv}-условию на отрезке $[a, b]$, назовем *($nm\Gamma_{uv}[a, b]$)-сплайном.*

Если такой сплайн имеет $(n + m - (u + v) + 1)$-альтернанс на отрезке $[a, b]$, то будем называть его *чебышевским ($nm\Gamma_{uv}[a, b]$)-сплайном*; а если лишь $(n + m - (u + v))$-альтернанс, то *золотаревским.*

Доказывается теорема о существовании чебышевских и золотаревских сплайнов как для задачи без граничных условий, так и с нулевыми граничными условиями в концах отрезка:

Теорема (о чебышевских и золотаревских сплайнах)
Для всяких $n \in \mathbb{N}$, $m, u, v \in \mathbb{Z}_+$, удовлетворяющих условиям $u, v \leqslant n$ и $n + m - (u + v) \geqslant 0$, существует чебышевский ($nm\Gamma_{uv}[a, b]$)-сплайн

$x_{nm\Gamma_{uv}[a,b]}(\cdot)$. Такой сплайн единственный с точностью до знака.

Для любого $\delta > 0$, лежащего между $\|x_{nm\Gamma_{uv}[a,b]}(\cdot)\|_{C[a,b]}$ и $\|x_{n,m-1,\Gamma_{uv}[a,b]}(\cdot)\|_{C[a,b]}$, существуют ровно четыре различных золотаревских $(nm\Gamma_{uv}[a,b])$-сплайна, равномерная норма которых на отрезке $[a,b]$ равна δ.

Достаточно доказать существование и единственность искомых сплайнов на отрезке $[0,1]$, которые обозначаются просто $(nm\Gamma_{uv})$-сплайнами.

При отсутствии граничных условий приводятся результаты, полученные ранее другими авторами. В остальных случаях доказательство теоремы разбито на несколько этапов.

Сначала приводится доказательство существования чебышевских сплайнов, основанное на теореме Борсука[18] (согласно которой нечетное непрерывное отображение r-мерной сферы $\mathbb{S}^r$ в $\mathbb{R}^r$ обращается в нуль в некоторой точке) и на свойствах обобщенных полных чебышевских пространств (ECT-пространств[19,20]).

Единственность чебышевских сплайнов доказывается двумя способами, один из которых является распространением на рассматриваемый случай доказательства единственности чебышевских $(nm\Gamma_{00})$- и $(nm\Gamma_{nn})$-сплайнов, приведенного В. Н. Малоземовым и А. Б. Певным[21].

При доказательстве существования и единственности золотаревских $(nm\Gamma_{uv})$-сплайнов используется аппарат обобщенных перфектных сплайнов, использованный С. Карлиным[22] при доказательстве существования

---

[18] Borsuk K. Drei Sätze über die n-dimensionale euklidishe Späre // Fund. Math., 1933, Bd. 20, s. 177–191.

[19] Дзядык В. К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. М.: Наука, 1977.

[20] Демидович В. Б. Приближенные вычисления с помощью обобщенных полиномов из чебышевских пространств. Чебышевские обобщенные полиномы. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990.

[21] Малоземов В. Н., Певный А. Б. Полиномиальные сплайны. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1986. 120 с.

[22] Karlin S. Oscillatory perfect splines and related extremum problems // Spline Functions and

и единственности чебышевских и золотаревских сплайнов без граничных условий.

В третьей главе работы полученные чебышевские и золотаревские сплайны применяются для решения экстремальных задач и задач оптимального восстановления.

В первом параграфе в качестве простейшего примера применения выбранной методики решается экстремальная задача (7) и соответствующая задача оптимального восстановления при малых значениях n. Эти задачи решаются на пространствах $W^n_\infty(\mathbb{R})$ (для функций на отрезке $[-1,1]$) при $n = 1, 2, 3$ и $W^n_\infty(\mathbb{R}_+, \Gamma_{n0})$ (для функций на отрезке $[0,1]$) при $n = 1, 2$. В этих случаях возможно явное построение чебышевских и золотаревских сплайнов.

Во втором параграфе приводится с небольшими изменениями и дополнениями результат, полученный А. П. Буслаевым для $T = \mathbb{R}$. Оптимальный метод восстановления имеет вид

$$\dot{x}(0) \approx \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mu_j y\left(\sqrt[n]{\frac{\delta}{K_n}}\left(\pi j + \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

где множители μ_j находятся из формулы

$$\mu_j = \frac{1}{4}\int_{-2B_\delta}^{2B_\delta} (n-1)iB_\delta \frac{(\operatorname{ctg}(\frac{\pi\sigma}{2}))^{(n-2)}}{(\frac{1}{\sin(\frac{\pi\sigma}{2})})^{(n-1)}} e^{-i\sigma(\frac{1}{B_\delta}(\pi j + \frac{\pi}{2}))}\, d\sigma, \tag{15}$$

где $B_\delta = \sqrt[n]{\frac{K_n}{\delta}}$, а константы Фавара

$$K_n = \begin{cases} \frac{4}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}, & n \text{ нечетно,} \\ \frac{4}{\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}, & n \text{ четно.} \end{cases}$$

При некоторых n приводятся вычисленные значения множителей μ_j.

В третьем параграфе методом, аналогичным примененному А. П. Буслаевым для $T = \mathbb{R}$, решается задача оптимального восстановления на

Approximation Theory, by S. Karlin, C. A. Micchelli, A. Pinkus and I. J. Shoenberg, pp. 371–460, Academic Press, New York, 1976.

окружности. Доказывается, что множители Лагранжа μ_j находятся из системы линейных уравнений:

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}} \frac{e^{is\frac{l\pi}{m}}}{s^{n-1}} = i\sum_{j=1}^{m}\mu_j \sum_{s\in\mathbb{Z}} \frac{e^{is\frac{l\pi}{m}}\left(e^{-\frac{(2j-1)is\pi}{2m}} - e^{\frac{(2j-1)is\pi}{2m}}\right)}{s^n}, \quad l=0,\ldots,m-1. \tag{16}$$

В четвертом параграфе главы 3 приводится решение задачи экстраполяции $(x^{(k)}(\tau), W^n_\infty(T,\Gamma), F_{\delta C(\Delta)})$ и соответствующей экстремальной задачи (7) как для случая отрезка без ограничений, так и при наличии нулевых ограничений в левом конце отрезка. Полученный результат формулируется в следующем виде:

Теорема (об оптимальном методе в задаче экстраполяции) *Пусть x_δ — чебышевский или золотаревский сплайн ($x_{nm\Gamma_{00}\Delta}(\cdot)$, $x_{nm\delta\Gamma_{00}\Delta}(\cdot)$, $x_{nm\Gamma_{n0}\Delta}(\cdot)$ или $x_{nm\delta\Gamma_{n0}\Delta}(\cdot)$), имеющий норму δ; $\{\tau_j\}_{j=1}^r$ — его точки альтернанса. Тогда*

$$E(x^{(k)}(\tau), W^n_\infty(T,\Gamma), F_{\delta C(\Delta)}) = |x^{(k)}_\delta(\tau)|$$

и оптимальный метод восстановления имеет вид $x^{(k)}(\tau) \approx \sum_{j=1}^r \mu_j y(\tau_j)$, где μ_j — некоторые величины, зависящие от τ, δ, n, k и являющиеся решением некоторой системы линейных уравнений.

В конце параграфа приводится иллюстрация применения полученных результатов в некоторых частных случаях.

Благодарности. Автор выражает свою глубокую признательность доктору физико-математических наук, профессору Владимиру Михайловичу Тихомирову за постановку задач, многочисленные плодотворные обсуждения и помощь в работе.

Список публикаций по теме диссертации

[1] Михалин Д. А. Оптимальное восстановление значений гладких функций и их производных по неточной информации на отрезке. // Фундаментальная и прикладная математика. 2002, Т. 8, Вып. 4, с. 1047–1058.

[2] Михалин Д. А. Чебышёвские и золотаревские перфектные сплайны на отрезке с нулевыми граничными условиями. // Доклады Академии Наук. Т. 425, № 5 (2009), с. 592–594.

[3] Михалин Д. А. Специальные чебышёвские и золотарёвские перфектные сплайны на отрезке. // Успехи матем. наук, 64:2 (386) (2009), с. 203–204.