МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 512.761.3

ГУСЕВ ГЛЕБ ГЕННАДЬЕВИЧ

ДЗЕТА-ФУНКЦИИ МОНОДРОМИИ И ДИАГРАММЫ НЬЮТОНА

Специальность 01.01.04 – геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2010

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор Гусейн-Заде Сабир Меджидович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Казарян Максим Эдуардович
	кандидат физико-математических наук Чулков Сергей Павлович
Ведущая организация:	Государственный университет - Высшая школа экономики

Защита диссертации состоится 19 февраля 2010 года в 16 часов 45 минут на
заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государствен-
ном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация,
119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 19 января 2010 года.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор

А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая диссертация посвящена вычислению дзета-функций монодромий некоторых аналитических и алгебраических функций и их деформаций в терминах многогранников Ньютона. Задача вычисления топологических инвариантов алгебраических многообразий или ростков аналитических пространств в терминах многогранников Ньютона определяющих их уравнений была поставлена В. И. Арнольдом в начале 70-ых годов. Она была мотивирована тем фактом, что для уравнений общего положения с фиксированными многогранниками Ньютона дискретные инварианты множества решений одинаковы и зависят только от многогранников.

Первый общий результат в этом направлении был получен А. Кушниренко. Он вычислил эйлерову характеристику слоя ростка функции[1]. Кроме этого он получил формулу для числа решений n полиномиальных уравнений от n неизвестных при условии, что многогранники Ньютона всех многочленов системы совпадают[2]. Д. Бернштейн получил обобщение этого результата, которое не требует последнего условия[3]. Вскоре Д. Бернштейном, А. Кушниренко и А. Хованским была получена формула для эйлеровой характеристики невырожденного полного пересечения в комплексном торе, обобщающая предыдущие результаты[4]. А. Хованский предложил наиболее эффективный метод решения подобных задач, использующий торические пополнения[5].

Первая формула для дзета-функции монодромии ростка аналитической функции в терминах его диаграммы Ньютона была получена А. Варченко в 1976 г.[6] Она была обобщена в нескольких направлениях. М. Ока получил ее аналог для ростка функции на невырожденном полном пересечении, его теорема требует условия "удобства"("convenience")[7]. Это условие на то, что диаграммы Ньютона всех ростков функций рассматриваемой системы имеют непустое пересечение с осями координат.

[1] Кушниренко А. Г., Многогранник Ньютона и числа Милнора, Функ. анал. и прил., 9: 1, с. 74–75, 1975.

[2] Кушниренко А. Г., Многогранник Ньютона и число решений системы k уравнений с k неизвестными, УМН 30, с. 266–267, 1975.

[3] Бернштейн Д. Н., Число корней системы уравнений, Функ. анал. и прил., 9: 3, с. 1–4, 1975.

[4] Бернштейн Д. Н., Кушниренко А. Г., Хованский А. Г., Многогранники Ньютона, УМН, 31: 3, с. 201–202, 1976.

[5] Хованский А. Г., Многогранники Ньютона и торические многообразия, Функ. анал. и прил., 11: 4, с. 56–64, 1977.

Хованский А. Г., Многогранники Ньютона и род полных пересечений, Функ. анал. и прил., 12: 1, с. 51–61, 1978.

[6] Varchenko A. N., Zeta function of monodromy and Newton's diagram, Inv. Math. 37, p. 253–262, 1976.

[7] Oka M., Principal zeta-function of non-degenerate complete intersection singularity, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA., 37, p. 11–32, 1990.

С. М. Гусейн-Заде, И. Луенго и А. Мелле-Эрнандес определили дзета-функцию монодромии ростка мероморфной функции и получили формулу, выражающую эту дзета-функцию в терминах диаграмм Ньютона ростков числителя и знаменателя[8].

Известны также некоторые "глобальные"аналоги перечисленных результатов. Так, для многочлена Лорана на комплексном торе получена формула, выражающая его дзета-функцию на бесконечности в терминах его многогранника Ньютона (А. Либгобер, С. Спербер, 1995)[9]. Ю.Матсуи и К.Такеучи обобщили этот результат, получив формулу для дзета-функции на бесконечности многочлена на невырожденном полном пересечении[10]. Этот результат получен с помощью теории пучков.

С. М. Гусейн-Заде и Д. Сирсма предложили "принцип локализации"[11]. Он связывает дзета-функцию деформации сечения одномерного расслоения с дзета-функциями ростков деформации в различных точках многообразия. Эта связь выражается в терминах интегрирования по эйлеровой характеристике, которое было введено О. Виро в 1988 году[12]. Принцип локализации ранее не применялся в задачах построения формул для алгебраических инвариантов алгебраических функций (ростков аналитических функций) в терминах многогранников Ньютона (соответственно, диаграмм Ньютона). Принцип локализации оказывается удобным языком для получения некоторых новых результатов в этом направлении.

Цель работы: вычисление дзета-функций в нуле многочленов и ростков функций на полных пересечениях, а также дзета-функций в нуле и на бесконечности деформаций полных пересечений и их ростков.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми.

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Получены явные формулы для дзета-функции деформации ростка в терминах ее диаграммы Ньютона в случае деформации, невырожденной относительно своей диаграммы. Эти формулы обобщают формулу Варченко и формулу, полученную Гусейн-Заде, Луенго и

[8]Gusein-Zade S. M., Luengo I., Melle-Hernandez A., Zeta-functions for germs of meromorphic functions and Newton diagrams, Funct. Anal. Appl., 1998.

[9]Libgober, A., Sperber, S., On the zeta function of monodromy of a polynomial map, Compositio Mathematica, 95: 3, p. 287–307, 1995.

[10]Yutaka Matsui, Kiyoshi Takeuchi, Monodromy zeta-function at infinity, Newton polyhedra and constructible sheaves, arXiv: math.AG/0809.3149v3.

[11]Gusein-Zade S. M., Siersma D., Deformations of polynomials and their zeta-functions, Journal of Mathematical Sciences, 144: 1, p. 3782–3788, 2007.

[12]Viro O. Y., Some integral calculus based on Euler characteristic, Lecture Notes in Math., vol. 1346, Springer-Verlag, p. 127–138, 1988.

Мелле-Эрнандесом для дзета-функции мероморфной функции. Получены также явные формулы для для дзета-функции деформации невырожденного ростка полного пересечения. Эти формулы позволяют обобщить формулу М. Ока, отказавшись от условия "удобства"("convenience").

2. Для многочлена одной переменной степени 2 и 3, коэффициенты которого есть многочлены Лорана от нескольких комплексных параметров, получены формулы для эйлеровых характеристик стратов в комплексном торе, соответствующих различным комбинациям совпадений корней многочлена. Эти формулы в известной мере обобщают формулу для эйлеровой характеристики пересечения в комплексном торе, полученную А. Г. Хованским.

3. Получены некоторые "глобальные"аналоги формул для дзета-функций. Это формулы для дзета-функций в нуле и на бесконечности невырожденной однопараметрической полиномиальной деформации полного пересечения в комплексном торе. В частности, из этих формул выведена формула для дзета-функции в нуле многочлена на полном пересечении.

Методы исследования. В работе используются методы теории особенностей, основанные на изучении торических пополнений и торических модификаций. Рассматриваются торические многообразия, соответствующие достаточно мелким разбиениям на симплициальные конусы пространства, двойственного вещественному линейному пространству, содержащему многогранники Ньютона (или диаграммы Ньютона в локальных случаях). Этот метод был предложен А. Хованским. В основе вычисления дзета-функций лежат формулы, аналогичные формуле А'Кампо[13]. Важную роль играют методы и факты, связанные с интегрированием по эйлеровой характеристике, в особенности — принцип локализации С. М. Гусейн-Заде и Д. Сирсма. Получение дзета-функции в нуле многочлена на полном пересечении основано на идеи перехода к рассмотрению графика многочлена. А именно, дзета-функция многочлена совпадает с дзета-функцией следующей полиномиальной деформации. Параметром деформации является дополнительная координата значений в объемлющем пространстве графика многочлена, а уравнения, задающие деформацию, совпадают с уравнениями, задающими график. В основе получения формул для эйлеровых характеристик стратов лежит теорема об эйлеровой характеристики невырожденного полного пересечения в ком-

[13] A'Campo N., La fonction zeta d'une monodromie, Comm. Math. Helv., 50, p. 233–248, 1975.

плексном торе и формула Фубини для интегрирования по эйлеровой характеристике.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Результаты и методы диссертации могут найти применение в теории особенностей, комплексной алгебраической геометрии и топологии.

Апробация диссертации. Результаты диссертации докладывались:

- Неоднократно (2006-2009 гг.) на научно-исследовательском семинаре "Топологические инварианты особенностей"кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ.
- На международной конференции-школе YMIS "Пространства дуг, интегрирование и комбинаторная алгебра Седано (Испания), в феврале 2008 года.
- На семинаре Г. Ван-дер-Геера института Кортевега - де Фриза, Амстердам (Нидерланды), в апреле 2008 года.
- На семинаре имени М. М. Постникова "Алгебраическая топология и ее приложения"кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ в октябре 2008 г.
- На семинаре "Геометрия"Бостонского Университета (США) в ноябре 2008 года.
- На научно-исследовательском семинаре кафедры анализа данных МФТИ в марте 2009 года.
- На международной конференции "Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin Memorial Санкт-Петербург, в январе 2010 г.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, список которых приведён в конце автореферата [1-3].

Структура диссертации. Диссертация состоит из пяти глав, первая из которых является введением. Текст диссертации изложен на 59 страницах. Список литературы содержит 29 наименований.

Содержание работы

Во введении описана история рассматриваемой проблемы, приведён список основных результатов, изложено содержание диссертационной работы и дан список основных обозначений.

Во второй главе вводятся основные понятия, рассматриваемые в работе, кратко излагаются классические методы, связанные с подсчетом эйлеровых характеристик и дзета-функций, приводятся некоторые формулы для инвариантов, полученные ранее.

В первом параграфе содержатся определения дзета-функций монодромий в различных постановках, которые далее рассматриваются в работе. Приведено понятие интегрирования по эйлеровой характеристике и рассмотрены некоторые технические утверждения, в частности, аналоги формулы Фубини и теоремы о замене переменной в интеграле. Сформулированы теоремы, лежащие в основе техники вычисления дзета-функций. Первой из них является формула A'Кампо (1975), выражающая дзета-функцию ростка функции через его разрешение. Также сформулировано обобщение формулы A'Кампо в терминах интеграла по эйлеровой характеристике для модификации особенности, которая является изоморфизмом вне множества нулей. Приводится "принцип локализации"С. М. Гусейн-Заде и Д. Сирсмы.

Во втором параграфе изложен метод подсчета инвариантов алгебраических и аналитических множеств, разработанный А. Хованским в 1977, 1978 годах. Для многообразия общего положения, заданного в комплексном торе, строится подходящая торическая компактификация, в которой замыкание многообразия неособо и трансверсально орбитам компактификации. Соответственно, для ростка невырожденного полного пересечения строится торическая модификация, разрешающая особенности ростка.

В третьем параграфе приводятся основные теоремы, полученные ранее, для вычисления эйлеровых характеристик и дзета-функций в терминах многогранников и диаграмм Ньютона определяющих уравнений. Это формула Бернштейна-Кушниренко-Хованского для эйлеровой характеристики невырожденного полного пересечения в торе, формула Варченко для дзета-функции ростка функции в комплексном аффинном пространстве, обобщения формулы Варченко, полученные М. Ока с одной стороны и С. М. Гусейн-Заде, И. Луенго и А. Мелле-Эрнандесом с другой. В конце приводится формула для дзета-функции на бесконечности многочлена на невырожденном полном пересечении в аффинном пространстве, полученная А. Либгобером и С. Спербером и обобщенная Ю. Матсуи и К. Такеучи.

В третьей главе получены формулы для дзета-функции невырожденной деформации ростка функции и дзета-функции невырожденной деформации ростка полного пересечения. (Понятие дзета-функции монодромии деформации было введено С. М. Гусейн-Заде и Д. Сирсмой для исследования монодромий семейств полиномиальных функций.) Эти формулы обобщают формулу Варченко, формулу Ока, и формулу, полученную Гусейн-Заде, Луенго и Мелле-Эрнандесом.

Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_k$ - ростки голоморфных функций на $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{C}_\sigma \times \mathbb{C}^n_{\mathbf{z}}$ в начале координат. Они задают деформацию

$$f_{i,\sigma}(\mathbf{z}) := F_i(\sigma, \mathbf{z}),\ i = 1, 2, \ldots, k$$

ростков функций $f_i := f_{i,0}$ в точке $0 \in \mathbb{C}^n_{\mathbf{z}}$.

Для произвольного множества $I \subset \{0, 1, \ldots, n\}$ обозначаем через $\mathbb{R}^I$, $\Gamma^I(F_i)$ множества $\{\mathbf{k} \mid k_i = 0, i \notin I\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и $\Gamma(F_i) \cap \mathbb{R}^I$ соответственно (где координаты $k_0, k_1, \ldots, k_n$ отвечают переменным $\sigma, z_1, \ldots, z_n$ соответственно, $\Gamma(F_i)$ — диаграмма Ньютона ростка F_i). Множество $\mathcal{Z}^I \subset (\mathbb{R}^I)^*$ состоит из примитивных целочисленных ковекторов. Подмножество $\mathcal{Z}^I_{++} \subset \mathcal{Z}^I$ состоит из ковекторов, все компоненты которых строго положительны. Если $\Gamma^I(F_i) \neq \emptyset$, для каждого ковектора $\alpha \in \mathcal{Z}^I_{++}$ определена грань $\Gamma^{I,\alpha}(F_i) \subset \Gamma^I(F_i)$, на которой $\alpha|_{\Gamma^I(F_i)}$ достигает своего минимального значения.

Для каждого подмножества $I \in \{0, 1, \ldots, n\}$, содержащего число 0, рассмотрим множество $F(I) = \{j \in \{1, 2, \ldots, k\} \mid \Gamma^I(F_j) \neq \emptyset\}$ и рациональную функцию $\zeta^I_{F_1,F_2,\ldots,F_k}(t)$, определенную следующим образом. Для $I \neq \{0\}$ положим:

$$\zeta^I_{F_1,F_2,\ldots,F_k}(t) = \prod_{\alpha \in \mathcal{Z}^I_{++}} (1 - t^{\alpha(\frac{\partial}{\partial k_0})})^{l!\, Q^l_k\left(\Gamma^{I,\alpha}(F_{j_1}), \Gamma^{I,\alpha}(F_{j_2}), \ldots, \Gamma^{I,\alpha}(F_{j_{k(I)}})\right)},$$

где $l = |I| - 1$, $\frac{\partial}{\partial k_0}$ — вектор в $\mathbb{R}^I$ с единственной ненулевой координатой $k_0 = 1$, $\{j_1, j_2, \ldots, j_{k(I)}\} = F(I)$, $Q^l_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \left[\prod_{i=1}^k \frac{x_i}{1+x_i}\right]_l$, где $[\cdot]_l$ – однородная часть степени l рассматриваемого ряда, однородный многочлен степени l от набора l-мерных тел понимается как соответствующая линейная комбинация их целочисленных смешанных объемов. Пусть $\zeta^{\{0\}}_{F_1,F_2,\ldots,F_k}(t) = (1 - t)$, если $\Gamma^{\{0\}}(F_i) = \emptyset$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k$, и $\zeta^{\{0\}}_{F_1,F_2,\ldots,F_k}(t) = 1$ в остальных случаях.

Теорема. Пусть система ростков функций $F_1, F_2, \ldots, F_k$ невырождена относительно своих диаграмм Ньютона $\Gamma(F_1), \Gamma(F_2), \ldots, \Gamma(F_k)$. Тогда имеют место следующие формулы для дзета-функции деформации $f_{i,\sigma}$ ростка множества $\{f_1 = f_2 = \ldots = f_k = 0\}$, рассмотренного в $(\mathbb{C}^*)^n$ и

$\mathbb{C}^n$ соответственно:

$$\zeta_{f_{i,\sigma}|_{(\mathbb{C}^*)^n}}(t) = \zeta^{\{0,1\ldots,n\}}_{F_1,F_2,\ldots,F_k}(t),$$

$$\zeta_{f_{i,\sigma}|_{\mathbb{C}^n}}(t) = \prod_{I\colon 0\in I\subset\{0,1,\ldots,n\}} \zeta^I_{F_1,F_2,\ldots,F_k}(t).$$

Рассмотрим набор ростков функций $F_0, F_1, \ldots, F_k$ на $(\mathbb{C}^{n+1}, 0)$ вида $F_0(\sigma, \mathbf{z}) = f_0(\mathbf{z}) - \sigma$, $F_i(\sigma, \mathbf{z}) = f_i(\mathbf{z})$, $i = 1, 2, \ldots, k$, где $\{f_i\}$ — невырожденная система ростков функций на $(\mathbb{C}^n, 0)$. Приведенная теорема дает формулу для дзета-функции $\zeta_{f_0|_V}(t) = \zeta_{f_{i,\sigma}|_{\mathbb{C}^n}}(t)$, где $V = \{f_1 = f_2 = \ldots = f_k = 0\} \subset (\mathbb{C}^n, 0)$ — росток невырожденного полного пересечения.

Следствие. Формула М. Ока для дзета-функции ростка функции на невырожденном полном пересечении останется верной, если отказаться от условия "удобства"("convenience").

Изучение дзета-функций полиномиальных деформаций тесно связано со следующим вопросом. Пусть коэффициенты многочлена $P_{\mathbf{z}}(t) = p_0(\mathbf{z})t^k + p_1(\mathbf{z})t^{k-1} + \ldots + p_k(\mathbf{z})$ есть многочлены Лорана от n комплексных переменных $(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \mathbf{z}$. Пространство параметров $(\mathbb{C}^*)^n$, где $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus 0$, разбивается на страты, соответствующие различным степеням $\deg P_{\mathbf{z}} \leq k$ многочлена $P_{\mathbf{z}}$ и различным комбинациям совпадения его корней. Для многочлена общего положения с фиксированными многогранниками Ньютона $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_k$ коэффициентов $p_0, p_1, \ldots, p_k$ эйлеровы характеристики этих стратов фиксированы. Возникает задача вычисления этих эйлеровых характеристик в терминах многогранников Ньютона. В главе 4 получены формулы, выражающие их в терминах многогранников δ_i для случаев $k = 2, 3$.

При $k = 2$ множество $(\mathbb{C}^*)^n$ параметров разбивается на 5 стратов — K: $\deg(P_{\mathbf{z}}) = 2$, корни многочлена $P_{\mathbf{z}}$ различны; L: $\deg(P_{\mathbf{z}}) = 2$, корни совпадают; M: $\deg(P_{\mathbf{z}}) = 1$; N: $\deg(P_{\mathbf{z}}) = 0$; O: $P_{\mathbf{z}} \equiv 0$.

Теорема. Для многочленов Лорана p_i общего положения с фиксированными многогранниками Ньютона δ_i, $i = 0, 1, 2$, имеем:

$$\begin{aligned}
\chi(K) =& (-1)^n n!\,[\delta_0^n + 2\delta_*^n + Q_2^n(\delta_0, \delta_*) + Q_2^n(\delta_*, \delta_2) + Q_2^n(\delta_0, \delta_1) + \\
&+ Q_3^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2)],\\
\chi(L) =& (-1)^{n-1} n!\,[2\delta_*^n + Q_2^n(\delta_0, \delta_*) + Q_2^n(\delta_*, \delta_2) + Q_2^n(\delta_0, \delta_1) + Q_3^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2)],\\
\chi(M) =& (-1)^{n-1} n!\,[\delta_0^n + Q_2^n(\delta_0, \delta_1)],\\
\chi(N) =& (-1)^n n!\,[Q_2^n(\delta_0, \delta_1) + Q_3^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2)],\\
\chi(O) =& (-1)^{n-1} n!\, Q_3^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2),
\end{aligned}$$

где $\delta_* = \langle \delta_1 \cup 1/2(\delta_0 + \delta_2) \rangle$, $\langle\cdot\rangle$ обозначает выпуклую оболочку, $+$ — сумма Минковского.

Для приведенного многочлена степени два $P_{\mathbf{z}}(t) = t^2 + p_1(\mathbf{z})\, t + p_2(\mathbf{z})$, используя метод торических компактификаций, можно доказать индукцией по n еще одну формулу для эйлеровой характеристики страта L:

$$\chi(L) = (-1)^{n-1} n!\, [(2\delta_*)^n - Q_2^n(2\delta_*, \delta_1) + Q_2^n(\delta_1, \delta_2)]. \tag{-1}$$

Две формулы для страта $\chi(L)$ оказываются различными. Это приводит к следующим комбинаторно-геометрическим следствиям.

Предложение. Пусть выпуклые тела $S_0, S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ связаны соотношением $S_0 = \langle S_1 \cup S_2 \rangle$. Тогда

$$R^n(S_0, S_1, S_2) = 0, \tag{-1}$$

где $R^n(x_0, x_1, x_2) = (2^n - 2)x_0^n + Q_2^n(x_1, 2x_2) - Q_2^n(2x_0, x_1) - Q_2^n(x_0, 2x_2)$ — однородный многочлен степени n. "Прямое"геометрическое доказательство этих соотношений нам не известно.

Пример. Для выпуклых фигур S_0, S_1, S_2 на плоскости, связанных соотношением $S_0 = \langle S_1 \cup S_2 \rangle$, имеется тождество:

$$(S_0 - S_1)(S_0 - S_2) = 0.$$

При $k = 3$ множество $(\mathbb{C}^*)^n$ параметров разбивается на 8 стратов. Кроме 5-ти стратов K, L, M, N, O появляется еще 3 — H: $\deg(P_{\mathbf{z}}) = 3$, корни многочлена $P_{\mathbf{z}}$ различны; I: $\deg(P_{\mathbf{z}}) = 3$, два корня из трех совпадают; J: $\deg(P_{\mathbf{z}}) = 3$, все три корня совпадают.

Рассмотрим вложения $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, где первое пространство снабжено координатами $\mathbf{k} = (k_1, k_2 \ldots, k_n)$, второе — дополнительной координатой k_t, а третье — еще одной координатой k_σ. Обозначим через v_t, v_σ точки в $\mathbb{R}^{n+2}$ с единственной ненулевой координатой $k_t = 1$ и единственной ненулевой координатой $k_\sigma = 1$ соответственно. Обозначим $\Delta_{1,2,3} = \langle (\delta_1 + 2v_t) \cup (\delta_2 + v_t) \cup \delta_3 \rangle$, $\mathfrak{D}_i = \langle v_\sigma \cup (\delta_i + (3 - i)v_t) \rangle$.

Теорема. Для многочленов Лорана p_i общего положения с фиксированными многогранниками Ньютона δ_i, $i = 0, 1, 2, 3$, имеем:

$$\begin{aligned}
\chi(H) =& (-1)^n n!\,[(n+1)(n+2)Q_4^{n+2}(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3)+\\
&+(n+1)(\Delta^{n+1} + Q_2^{n+1}(\delta_0, \Delta_{123}))-\\
&-2\delta_0^n - \delta_3^n - Q_2^n(\delta_0, \delta_3) - Q_3^n(\delta_1, \delta_2, \delta_3) - Q_4^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3)],\\
\chi(I) =& (-1)^{n-1} n!\,[2(n+1)(n+2)Q_4^{n+2}(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3)+\\
&+(n+1)(\Delta^{n+1} + Q_2^{n+1}(\delta_0, \Delta_{123}))-\\
&-3\delta_0^n - \delta_3^n - Q_2^n(\delta_0, \delta_3) - 2Q_3^n(\delta_1, \delta_2, \delta_3) - 2Q_4^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3)],\\
\chi(J) =& (-1)^n n!\,[(n+1)(n+2)Q_4^{n+2}(\mathfrak{D}_0, \mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \mathfrak{D}_3) - Q_3^n(\delta_1, \delta_2, \delta_3)-\\
&-Q_4^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3)],\\
\chi(K) =& (-1)^{n-1} n!\,[(n+1)Q_2^{n+1}(\delta_0, \Delta_{123}) - \delta_0^n - Q_2^n(\delta_0, \delta_3)+\\
&+Q_3^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2) + Q_4^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3)],\\
\chi(L) =& (-1)^n n!\,[(n+1)Q_2^{n+1}(\delta_0, \Delta_{123}) - 2\delta_0^n - Q_2^n(\delta_0, \delta_3)-\\
&-Q_2^n(\delta_0, \delta_1) + Q_3^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2) + Q_4^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3)],\\
\chi(M) =& (-1)^n n!\,[Q_2^n(\delta_0, \delta_1) + Q_3^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2)],\\
\chi(N) =& (-1)^{n-1} n!\,[Q_3^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2) + Q_4^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3)],\\
\chi(O) =& (-1)^n n!\, Q_4^n(\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3).
\end{aligned}$$

В пятой главе получены некоторые "глобальные"аналоги формул для дзета-функций. Это формулы для дзета-функций в нуле и на бесконечности однопараметрической полиномиальной деформации полного пересечения в комплексном торе. В частности, из этих формул выведена формула для дзета-функции в нуле многочлена на полном пересечении, которую можно считать аналогом формулы Либгобера-Спербера.

В первом параграфе получен следующий результат. Пусть $F_0, F_1, \ldots, F_k$ — набор функций на $\mathbb{C}^n$, заданных как многочлены от n комплексных переменных $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Для произвольного множества $I \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ обозначим через Δ_i^I множество $\Delta_i \cap \mathbb{R}^I$, где $\Delta_i = \Delta_i(F)$ — многогранник Ньютона многочлена F_i. Если $\Delta_i^I \neq \emptyset$, для каждого ковектора $\alpha \in \mathcal{Z}^I$ определена грань $\Delta_i^{I,\alpha} \subset \Delta_i^I$, на которой $\alpha|_{\Delta_i^I}$ достигает своего минимального значения.

Пусть индексное множество I содержит число n. Обозначим через $\mathcal{Z}_+^I \subset \mathcal{Z}^I$ ($\mathcal{Z}_-^I \subset \mathcal{Z}^I$) подмножество ковекторов $\alpha = \ldots + \alpha_n\, dk_n$, последняя компонента которых положительна: $\alpha_n > 0$ (последняя компонента которых отрицательна: $\alpha_n < 0$). Координаты $k_1, k_2, \ldots, k_n$ пространства $\mathbb{R}^n$ здесь отвечают переменным $z_1, z_2, \ldots, z_n$ соответственно. Рассмотрим рациональные функции $\zeta^I_{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k}(t)$, $\zeta^{I,\infty}_{\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k}(t)$, определенные следующим образом. Обозначим: $F(I) = \{j \in \{1, 2, \ldots, k\} \mid F_j^I \neq 0\}$.

Для $I \neq \{n\}$ имеем:

$$\zeta^{I}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t) = \prod_{\alpha\in\mathcal{Z}^I_+} \left(1 - t^{\alpha(\frac{\partial}{\partial k_n})}\right)^{l!\,Q^l_k(\Delta^{I,\alpha}_{j_1},\Delta^{I,\alpha}_{j_2},\ldots,\Delta^{I,\alpha}_{j_{k(I)}})},$$

$$\zeta^{I,\infty}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t) = \prod_{\alpha\in\mathcal{Z}^I_-} \left(1 - t^{-\alpha(\frac{\partial}{\partial k_n})}\right)^{l!\,Q^l_k(\Delta^{I,\alpha}_{j_1},\Delta^{I,\alpha}_{j_2},\ldots,\Delta^{I,\alpha}_{j_{k(I)}})},$$

где $l = |I| - 1$, $\{j_1, j_2, \ldots, j_{k(I)}\} = F(I)$. Введем обозначения: $\zeta^{\{n\}}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t) = \zeta^{\{n\},\infty}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t) = (1 - t)$, если $\Delta^{\{n\}}_i = \emptyset$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k$, и $\zeta^{\{n\}}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t) = \zeta^{\{n\},\infty}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t) = 1$ в остальных случаях.

Теорема. Для многочленов $F_1, F_2, \ldots, F_k$ общего положения дзета-функции в нуле (на бесконечности) деформации $f_{i,z_n}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}) := F_i(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ пространства $\{f_1 = f_2 = \ldots = f_k = 0\} \subset \mathbb{C}^{n-1}$, где $f_i = f_{i,0}$, вычисляются по следующим формулам:

$$\zeta_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n}}(t) = \zeta^{\{1,2,\ldots,n\}}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t),$$

$$\zeta_{z_n|_V}(t) = \prod_{I\colon n\in I\subset\{1,2,\ldots,n\}} \zeta^{I}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t),$$

$$\zeta^{\infty}_{z_n|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n}}(t) = \zeta^{\{1,2,\ldots,n\},\infty}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t),$$

$$\zeta^{\infty}_{z_n|_V}(t) = \prod_{I\colon n\in I\subset\{1,2,\ldots,n\}} \zeta^{I,\infty}_{\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_k}(t)$$

(здесь $V = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid F_1(\mathbf{z}) = F_2(\mathbf{z}) = \ldots = F_k(\mathbf{z}) = 0\}$ — множество нулей).

Во втором параграфе получена формула для дзета-функции в нуле многочлена на полном пересечении.

Рассмотрим набор многочленов $F_0, F_1, \ldots, F_k$ от переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и множество $V = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n \mid F_1(\mathbf{z}) = F_2(\mathbf{z}) = \ldots = F_k(\mathbf{z}) = 0\}$. Пусть $\Delta_i = \Delta(F_i)$ — многогранник Ньютона многочлена F_i, $i = 0, 1, \ldots, k$. Обозначим через $\mathcal{Z}^I_{\Delta_0}$ множество ковекторов $\alpha \in \mathcal{Z}^I$, для которых $\min(\alpha|_{\Delta^I_0}) > 0$. Если $\Delta^I_0 = \emptyset$, имеем: $\mathcal{Z}^I_{\Delta_0} = \emptyset$. Обозначим: $F(I) = \{j \in \{1, 2, \ldots, k\} \mid F^I_j \neq 0\}$,

$$\zeta^{I}_{\Delta_0;\Delta_1,\ldots,\Delta_k}(t) = \prod_{\alpha\in\mathcal{Z}^I_{\Delta_0}} \left(1 - t^{m_{\Delta^I_0}(\alpha)}\right)^{l!\,\widetilde{Q}^l_k(\Delta^{I,\alpha}_0,\Delta^{I,\alpha}_{j_1},\ldots,\Delta^{I,\alpha}_{j_{k(I)}})},$$

где $\{j_1, j_2, \ldots, j_{k(I)}\} = F(I)$, $m_{\Delta^I_0}(\alpha) = \min(\alpha|_{\Delta^I_0})$ — минимальное значение ковектора α на множестве Δ^I_0 и $\widetilde{Q}^l_k(x_0, x_1, \ldots, x_k) = \left[\prod_{i=1}^k \frac{x_i}{1+x_i}\right]_l - \left[\prod_{i=0}^k \frac{x_i}{1+x_i}\right]_l = Q^l_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) - Q^l_{k+1}(x_0, x_1, \ldots, x_k)$.

Теорема. Для многочленов $F_0, F_1, \ldots, F_k$ общего положения

$$\zeta_{F_0|_{V\cap(\mathbb{C}^*)^n}}(t) = \zeta^{\{1,2,\ldots,n\}}_{\Delta_0;\Delta_1,\ldots,\Delta_k}(t),$$

$$\zeta_{F_0|_V}(t) = \prod_{I\subset\{1,2,\ldots,n\}:\, I\neq\emptyset} \zeta^{I}_{\Delta_0;\Delta_1,\ldots,\Delta_k}(t).$$

Благодарности

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Сабиру Меджидовичу Гусейн-Заде, за постановку задач, поддержку, а главное - терпение. Автор также благодарит всех сотрудников кафедры высшей геометрии и топологии за творческую атмосферу, которая способствовала научной работе.

Автор выражает благодарность своим школьным учителям Анатолию Вадимовичу Егорову, Борису Михайловичу Давидовичу и Юрию Витальевичу Чеканову, благодаря которым он получил первое представление об основах науки; своему другу и однокласснику Евгению Горскому за полезные научные разговоры. Автор признателен Аскольду Георгиевичу Хованскому за интересные лекции и личные беседы; а также своему деду, Владимиру Ильичу Бельтюкову, за моральную поддержку. Спасибо!

Работы автора по теме диссертации

[1] Г. Г. Гусев, Эйлерова характеристика многообразия бифуркаций для многочлена степени 2, УМН, 63: 2, с. 167–168, 2008.

[2] G. G. Gusev, Monodromy zeta-functions of deformations and Newton diagrams, Rev. Mat. Complut., 22: 2, p. 447–454., 2009.

[3] G. G. Gusev, Monodromy zeta-function of a polynomial on a complete intersection and Newton polyhedra, proceedings of the conference "Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin Memorial p. 43-44, 2010.