Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Механико–математический факультет

На правах рукописи

Милютин Сергей Владимирович

Исследование трёхпараметрического итерационного метода, ориентированного на решение двух классов задач с нелинейными седловыми операторами

01.01.07 — Вычислительная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико–математических наук

Москва 2010

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики Механико–математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико–математических наук, профессор Евгений Владимирович Чижонков
Официальные оппоненты:	доктор физико–математических наук Юрий Викторович Василевский кандидат физико–математических наук Татьяна Константиновна Козубская
Ведущая организация:	Волгоградский государственный университет

Защита диссертации состоится 17 февраля 2010 года в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.002.16 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу:
Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП–1, Ленинские горы, д. 1,
Механико–математический факультет, аудитория 14–08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико– математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 15 января 2010 г.

Учёный секретарь
диссертационного совета
Д.501.002.16 при МГУ,
доктор физико–математических наук А.А. Корнев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Задача численного решения уравнений гидродинамики имеет важное практическое значение, так как в подавляющем большинстве случаев (например, в случае уравнений Навье–Стокса, описывающих течение вязкой несжимаемой жидкости) нахождение аналитического решения в явном виде не представляется возможным. При этом, как правило, при дискретизации исходных дифференциальных уравнений, рассматриваемых в переменных скорость–давление, приходят к системам нелинейных алгебраических уравнений с седловыми операторами.

В настоящее время разработано достаточно много методов решения седловых задач, среди которых можно выделить класс итерационных методов, полученный различными модификациями хорошо известного алгоритма Эрроу–Гурвица. Заметим, что в отличие от линейных симметричных седловых задач, для которых эффективность оригинального алгоритма Эрроу–Гурвица не уступает многим другим алгоритмам, при решении нелинейных задач метод Эрроу–Гурвица начинает сходиться крайне медленно, а во многих случаях вообще перестаёт сходиться. Таким образом, с практической точки зрения интерес представляют обобщения метода Эрроу–Гурвица, среди которых следует отметить двухпараметрический $\beta - \tau$ метод Г.М. Кобелькова, а также особо выделить трёхпараметрический итерационный метод, предложенный в работе Ю.В. Быченкова и Е.В. Чижонкова. Основными отличительными особенностями этих алгоритмов является простота реализации, минимальные требования к объёму памяти, а также гораздо более высокая скорость сходимости для нелинейных задач по сравнению с методом Эрроу–Гурвица.

Наибольший прогресс в теоретических исследованиях упомянутых итерационных методов удалось добиться в случае линейных симметричных задач: доказаны окончательные теоремы о сходимости алгоритмов и получены аналитические формулы для оптимальных итерационных параметров. Были также предприняты удачные попытки обоснования применения двухпараметрических и трёхпараметрического итерационных методов для решения нелинейных задач. В частности, Ю.В. Быченков обосновал трёхпараметрический итерационный метод для кососимметричной (как в уравнениях Навье–Стокса) и сильно монотонной нелинейностей. Представляется важным обобщение упомянутых методов на новые, более сложные нелинейные задачи, в частности— на задачи, описывающие течения бингамовской и обобщённой ньютоновской жидкостей.

Бингамовская жидкость — это модель вязкопластической среды, уравнение состояния которой имеет следующий вид:

$$\sigma_{i,j} = -p\,\delta_{i,j} + g\frac{D_{i,j}(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} + \nu D_{i,j}(\mathbf{u}).$$

Здесь $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера, g, ν — положительные константы, характеризующие физические свойства среды, σ — тензор напряжений, $D(\mathbf{u})$ — тензор скоростей деформаций, а $|D(\mathbf{u})|$ — его второй инвариант. С математической точки зрения уравнения, описывающие течение бингамовских сред, представляют обобщения уравнений Навье–Стокса, отличающиеся от последних наличием нелинейного слагаемого, моделирующего пластические свойства среды. Теоретические исследования данных уравнений были проведены в работах Ж. Дюво, Ж.-Л. Лионса и др., результатами которых являются теоремы существования и единственности обобщённых решений в двумерном случае, а также теорема существования решения в трёхмерном случае. С вычислительной точки зрения основная трудность, связанная с моделированием течения бингамовской жидкости, заключается в недифференцируемости дополнительного нелинейного слагаемого. Одним из способов обхода этой трудности является рассмотрение различных регуляризаций исходной задачи. Однако это не избавляет от вычислительных проблем, так как применение многих классических методов (например, ньютоновских и квази–ньютоновских) к регуляризованной задаче даёт крайне плохие результаты в силу плохой обусловленности получаемых уравнений. Таким образом, задача разработки эффективных методов расчёта течений бингамовской жидкости является актуальной.

Обобщённая ньютоновская жидкость — это модель нелинейно–вязкой жидкости, уравнение состояния которой имеет вид:

$$\sigma_{i,j} = -p\,\delta_{i,j} + \varphi\left(|D(\mathbf{u})|\right) D_{i,j}(\mathbf{u}),$$

где на функцию φ накладываются специальные ограничения, обеспечивающие существование и единственность обобщённых решений уравнений движения. Отметим, что данная модель является обобщением широкого класса физических постановок задач, в частности, при $\varphi \equiv \text{const} > 0$ из неё следуют уравнения Стокса.

Целью диссертационной работы является исследование вопросов применимости трёхпараметрического итерационного метода для численного решения двух классов нелинейных задач, а именно: задач, описывающих течение бингамовской вязкопластической и обобщённой ньютоновской жидкостей.

На защиту выносятся:

1. Доказательство локальной теоремы сходимости трёхпараметрического метода расчёта течений бингамовской жидкости.

2. Доказательство теоремы сходимости трёхпараметрического метода расчёта течений обобщённой ньютоновской жидкости.

3. Формулировка алгоритма поиска практически приемлемых для счёта итерационных параметров трёхпараметрического итерационного метода.

Научная новизна. В работе впервые проведено теоретическое обоснование сходимости трёхпараметрического итерационного метода для двух специальных классов нелинейных задач с седловыми операторами: в терминах указанных норм получены оценки скорости сходимости и исследованы их предельные свойства. Предложен и реализован алгоритм поиска практически приемлемых для счёта итерационных параметров в зависимости от параметров дискретизации и физических констант задачи.

На основе результатов численных экспериментов проведён сравнительный анализ трёхпараметрического метода с другими алгоритмами этого же класса.

Теоретическая и практическая ценность работы. Основная теоретическая ценность работы заключается в строгом математическом обосновании применимости трёхпараметрического итерационного метода для расчёта течений бингамовской и обобщённой ньютоновской жидкостей. Практическая ценность заключается в демонстрации на большом количестве тестовых примеров работоспособности исследуемого метода, а также в формулировке практического алгоритма поиска итерационных параметров.

Методы исследований. При доказательстве сходимости трёхпараметрического итерационного метода была использована теорема Каратеодоре, а также теорема о среднем. Для дискретизации уравнений движения использовался метод конечных элементов, а также метод конечных разностей на смещённых сетках

Публикации. По теме диссертации опубликовано 5 работ ($[1-5]$), из которых две ($[1-2]$)— в журналах из "Перечня ведущих рецензируемых журналов и изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертации на соискание степени доктора и кандидата наук".

Апробация работы. Результаты работы докладывались автором на научно–исследовательском семинаре кафедры вычислительной математики Механико–математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова под руководством проф. Г.М. Кобелькова (Москва, 2009), на ежегодных научных конференцях "Ломоносовские чтения"(Москва, 2008,2009), на международной конференции "Современные проблемы вычислительной математики и математической физики"(Москва 2009), на семинаре "Вычислительные и информационные технологии в математике"под руководством проф. В.И.Лебедева, д.ф.-м.н. Ю.М.Нечепуренко, чл.-корр. Е.Е.Тыртышникова (ИВМ РАН, Москва, 2009), на семинаре сектора "Вычислительная аэроакустика"под руководством к.ф.-

м.н. Т.К. Козубской (ИММ РАН, Москва, 2009) а также на 7–ом Всероссийском семинаре "Сеточные методы для краевых задач и приложения"(Казань, 2007).

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения. Библиография содержит 38 наименований. Общий объём диссертации 92 страницы. В работе содержится 14 рисунков и 15 таблиц.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** приводятся формулировки решаемых задач, а также выписывается трёхпараметрический итерационный метод, исследуемый в работе. В краткой форме описываются уравнения течения бингамовской и обобщённой ньютоновской жидкостей и формулируются основные теоретические результаты, касающиеся теорем существования и единственности.

Глава 1 посвящена обоснованию применимости трёхпараметрического итерационного метода для численного моделирования течений бингамовской жидкости.

В **§1.1** формулируется двумерная стационарная первая краевая задача, описывающая течение несжимаемой изотермической бингамовской вязкопластической жидкости в переменных скорость–давление в области Ω:

$$\begin{gathered} -\nu\, \Delta \mathbf{u} + \rho\, (\mathbf{u} \cdot \nabla)\, \mathbf{u} - g\, \nabla \cdot \frac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|} + \nabla p = \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0, \end{gathered} \tag{1}$$

где $\mathbf{u} \in V \equiv \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ и $p \in L_2(\Omega)/\mathbb{R}$. Основная трудность, возникающая при численном решении (1), связана с недифференцируемостью нелинейного слагаемого $\nabla \cdot \dfrac{D(\mathbf{u})}{|D(\mathbf{u})|}$ в так называемых застойных областях, а также в областях сдвигового течения, которые характеризуются условием $|D(\mathbf{u})| = 0$. Для преодоления данной трудности рассматривается известная $\varepsilon-$регуляризация ($\varepsilon > 0$) задачи (1) следующего вида:

$$\begin{gathered} -\nu\, \Delta \mathbf{u}^\varepsilon + \rho\, (\mathbf{u}^\varepsilon \cdot \nabla)\, \mathbf{u}^\varepsilon - g\, \nabla \cdot \frac{D(\mathbf{u}^\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2 + |D(\mathbf{u}^\varepsilon)|^2}} + \nabla p^\varepsilon = \mathbf{f}, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^\varepsilon = 0, \\ \mathbf{u}^\varepsilon|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

В **§1.2** исследуются свойства операторов регуляризации. В частности, доказывается следующая лемма:

Лемма 1. *Производная нелинейного оператора* $\left(\nabla \cdot \dfrac{D(\mathbf{u}^\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon^2 + |D(\mathbf{u}^\varepsilon)|^2}}\right)$ *является линейным, самосопряженным, неотрицательным оператором на* V.

В **§1.3** выписывается формальная дискретизация системы (2) (построенная, например, на основе метода конечных элементов), которая без ограничения общности имеет вид:

$$\begin{cases} A(u) + Bp = f \\ B^T u = 0 \end{cases} \qquad u \in U, p \in P. \tag{3}$$

Здесь U и P — конечномерные евклидовы пространства размерностей N_U и N_P соответственно, причём $N_U \geq N_P$. Отметим, что U и P являются аппроксимациями пространств V и $L_2(\Omega)/\mathbb{R}$ соответственно.

Оператор A представим в виде

$$A(u) = Su + N(u,u) + M(u),$$

где

$S : U \to U$ — линейный, самосопряженный, положительно определенный оператор;

$N : U \times U \to U$ — билинейный оператор, для которого справедливо

$$(N(u,v), v) = 0 \quad \forall u, v \in U, \tag{4}$$

$$|(N(u,v), w)| \leq c_N \|u\|_S \|v\|_S \|w\|_S \quad \forall u, v, w \in U, \tag{5}$$

причём его производная в точке u — линейный оператор N_u— допускает оценку

$$|(N_u v, v)| \leq d_N \|u\|_S \|v\|_S^2 \quad \forall u, v \in U; \tag{6}$$

$M : U \to U$ — нелинейный оператор, удовлетворяющий условию

$$0 \leq (M(v), v) \quad \forall v \in U, \tag{7}$$

причем его производная в точке u (линейный оператор M_u) является самосопряженным, неотрицательным оператором, для которого выполнено следующее неравенство:

$$0 \leq M_u \leq \sigma_1 S. \tag{8}$$

$B : P \to U$ — линейный оператор, для которого (вместе с оператором S) имеет место аналог известного LBB–условия

$$\kappa_1\,(p,p) \leq \sup_{0\neq u\in U} \frac{(Bp,u)}{\|u\|_S} \quad \forall p \in P, \quad \kappa_1 > 0. \tag{9}$$

Выше было использовано обозначение $\|u\|_s = \sqrt{(Su,u)}$. Отметим, что все константы в условиях (4)—(9) предполагаются сеточно–независимыми, а сами условия являются естественными в том смысле, что их аналоги справедливы в непрерывном случае. Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (4)—(9). Тогда для произвольной правой части $f \in U$ существует по крайней мере одно решение задачи (3).*

В **§1.4** изучается сходимость трёхпараметрического итерационного метода

$$\begin{gathered} Q\frac{u^{k+1}-u^k}{\tau} + A(u^k) + \beta BC^{-1}B^T u^k + Bp^k = f \\ -\alpha C(p^{k+1}-p^k) + B^T u^{k+1} = 0 \end{gathered} \tag{10}$$

для решения системы (3). В (10) использованы следующие обозначения: $(u^k;p^k) \equiv z^k$ — приближение на k—ой итерации к решению $(u;p) \equiv z$ системы (3). τ, β, α — независимые параметры итерационного процесса, причем $\tau > 0$, $\alpha > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$; $Q : U \to U$, $C : P \to P$ — линейные, положительно определенные, самосопряженные операторы. Предполагается, что выполнены следующие условия:

$$0 < \theta_1 Q \leq S \leq \Theta_1 Q, \tag{11}$$

$$0 < \gamma_1 C \leq B^T Q^{-1} B \leq \Gamma_1 C, \tag{12}$$

где $0 < \theta_1 \leq \Theta_1$, $0 < \gamma_1 \leq \Gamma_1$ — сеточно–независимые константы. Отметим, что условие (12) является аналогом LBB–условия, а (11) связано с задачей построения эффективного предобусловливателя для оператора S.

Определим параметрическую норму в $Z = U \times P$ следующим образом:

$$\|z\|_{\mathcal{R}} = \|(u;p)\|_{\mathcal{R}} = \sqrt{(Qu,u) + \alpha\tau(Cp,p)}.$$

Доказывается основная теорема о локальной сходимости метода (10) для расчёта течений бингамовской жидкости.

Теорема 2. *Зафиксируем некоторое $r > 0$. Пусть выполнены следующие условия:*

$$\beta \geq 0, \qquad \theta_1 - \Theta_1^{3/2} d_N(\|z\|_{\mathcal{R}} + r) - \frac{\Gamma_1}{\alpha} > 0,$$
$$0 < \tau < \min\left\{\frac{\alpha}{4\Gamma_1}, \frac{1}{\Theta_1 + \sigma_1\Theta_1 + \beta\Gamma_1}\right\}.$$

Тогда для произвольного начального приближения $z^0 \in B_r(z)$ метод (10) сходится со скоростью геометрической прогрессии с показателем $0 < q < 1$ в норме $\|\cdot\|_{\mathcal{R}}$, то есть выполнено $\|z^k - z\|_{\mathcal{R}} \leq q^k \|z^0 - z\|_{\mathcal{R}}$, где

$$q = \max\left\{\left(1 + \frac{\tau\Gamma_1}{\alpha}\right)\left(1 - \tau(\theta_1 - \Theta_1^{3/2} d_N(\|z\|_{\mathcal{R}} + r))\right),\right.$$
$$\left.\sqrt{1 - \frac{\tau\gamma_1}{\alpha} + 2\left(\frac{\tau\gamma_1}{\alpha}\right)^2}, \sqrt{1 - \frac{\tau\Gamma_1}{\alpha} + 2\left(\frac{\tau\Gamma_1}{\alpha}\right)^2}\right\} < 1.$$

Обозначим через T_1 оператор перехода в методе (10). Имеет место следующее следствие.

Следствие 1. *Если дополнительно к условиям теоремы 2 выполнено неравенство*

$$\Theta_1^{3/2} d_N(\|z\|_{\mathcal{R}} + r) < \frac{\theta_1}{2},$$

то справедлива следующая асимптотическая оценка:

$$\min_{\substack{\alpha > 0, \tau > 0, \\ \beta \in \mathbb{R}}} \frac{\left\|T_1(z^0) - z\right\|_{\mathcal{R}}}{\|z^0 - z\|_{\mathcal{R}}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{8}} c\,\xi,$$

где $c = \dfrac{\theta_1}{\Theta_1 + \eta_1} = \mathrm{const}$, $\xi = \dfrac{\gamma_1}{\Gamma_1} \to 0.$

Глава 2 посвящена обоснованию применимости трёхпараметрического итерационного метода для численного моделирования течений обобщённой ньютоновской жидкости.

В **§2.1** формулируется трёхмерная стационарная первая краевая задача для уравнений течения обобщённой ньютоновской жидкости:

$$\begin{gathered} \nabla p - \nabla \cdot \left[\varphi \left(|D(\mathbf{u})|^2 \right) D(\mathbf{u}) \right] = \mathbf{f}, \\ \bigtriangledown \cdot \mathbf{u} = 0, \\ \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

На функцию φ накладываются следующие ограничения:

1. $\varphi(x)$ — непрерывная на полупрямой $0 \le x < \infty$ функция, у которой в любой точке $x \in (0; \infty)$ существует производная $\dfrac{d\varphi(x)}{dx}$, непрерывно зависящая от x, и $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{d\varphi(x)}{dx} x = 0$.
2. Для $\forall x \in [0; \infty)$ функция $\varphi(x)$ удовлетворяет неравенствам: $a_2 \ge \varphi(x) \ge a_1$, $\varphi(x) + 2x\dfrac{d\varphi(x)}{dx} \ge a_3$, где a_1, a_2, a_3 — положительные константы.
3. Существуют положительные постоянные a_4 и a_5 такие, что $\left|\dfrac{d\varphi(x)}{dx}\right| \le \dfrac{a_4}{x}$ при $x \ge a_5$.

Приводятся известные теоремы существования и единственности решения задачи (13).

В **§2.2** выписывается формальная дискретизация системы (13), которая имеет форму задачи (3) с оператором A, представимым в виде:

$$A(u) = Gu + L(u), \tag{14}$$

где $G : U \to U$ — линейный, самосопряжённый, положительно определённый оператор;

$L : U \to U$ — нелинейный оператор, удовлетворяющий условию

$$(L(v), v) \geq 0 \quad \forall v \in U, \tag{15}$$

причём линейный оператор L_u (производная L в точке u) является самосопряжённым, положительно определённым оператором, для которого выполнено

$$0 \leq L_u \leq \sigma_2 G. \tag{16}$$

Рассматривается $B : P \to U$ — линейный оператор, для которого выполнено следующее неравенство

$$\kappa_2\,(p,p) \leq \sup_{0 \neq u \in U} \frac{(Bp, u)}{\|u\|_G} \quad \forall p \in P, \quad \kappa_2 > 0, \tag{17}$$

являющееся аналогом LBB–условия. На основании указанных свойств устанавливается теорема существования решений для дискретной задачи (3).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия (14)—(17). Тогда для произвольной правой части $f \in U$ существует по крайней мере одно решение задачи (3).*

В **§2.3** изучается сходимость трёхпараметрического итерационного метода (10) для решения системы вида (3), полученной при дискретизации уравнений обобщённой ньютоновской жидкости (условия (14)—(17)). Предварительно потребуем, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$0 < \theta_2 Q \leq G \leq \Theta_2 Q, \tag{18}$$

$$0 < \gamma_2 C \leq B^T Q^{-1} B \leq \Gamma_2 C, \tag{19}$$

где $0 < \theta_2 \leq \Theta_2$, $0 < \gamma_2 \leq \Gamma_2$ — сеточно–независимые константы. Условие (19) является аналогом LBB–условия, а (18) связано с задачей построения эффективного предобусловливателя оператора G.

Доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть выполнены следующие условия:*

$$\beta \geq 0, \qquad \theta_2 - \frac{\Gamma_2}{\alpha} > 0,$$
$$0 < \tau < \min\left\{\frac{\alpha}{4\Gamma_2}, \frac{1}{\Theta_2 + \sigma_2\Theta_2 + \beta\Gamma_2}\right\}.$$

Тогда для произвольного начального приближения z^0 метод (10) сходится со скоростью геометрической прогрессии с показателем $0 < q < 1$ в норме $\|\cdot\|_{\mathcal{R}}$, то есть выполнено $\|z^k - z\|_{\mathcal{R}} \leq q^k \|z^0 - z\|_{\mathcal{R}}$, где

$$q = \max\left\{\left(1 + \frac{\tau\Gamma_2}{\alpha}\right)(1 - \tau\theta_2), \right.$$

$$\left. \sqrt{1 - \frac{\tau\gamma_2}{\alpha} + 2\left(\frac{\tau\gamma_2}{\alpha}\right)^2}, \sqrt{1 - \frac{\tau\Gamma_2}{\alpha} + 2\left(\frac{\tau\Gamma_2}{\alpha}\right)^2}\right\} < 1.$$

Отметим, что результат, доказанный в теореме 4, является более сильным по сравнению с результатом, доказанным в теореме 2. Причина в том, что сходимость исследуемого трёхпараметрического метода для расчёта течений бингамовской жидкости имеет место лишь в окрестности точного решения, в то время как в случае обобщённой ньютоновской жидкости трёхпараметрический итерационный метод сходится с любого начального приближения. Обозначим через T_2 оператор перехода метода (10) с условиями (14)—(17). Имеет место следующее следствие.

Следствие 2. *При выполнении условий теоремы 4 справедлива следующая асимптотическая оценка:*

$$\min_{\substack{\alpha > 0, \tau > 0 \\ \beta \in \mathbb{R}}} \frac{\left\|T_2(z^0) - z\right\|_{\mathcal{R}}}{\|z^0 - z\|_{\mathcal{R}}} \leq 1 - \frac{1}{\sqrt{8}} c\,\xi,$$

где $c \equiv \mathrm{const}$, $\xi = \dfrac{\gamma_2}{\Gamma_2} \to 0$.

Глава 3 посвящена обсуждению практической реализации трёхпараметрического итерационного метода. Основная трудность, связанная с практическим использованием трёхпараметрического итерационного метода, заключается в определении приемлемых для счёта итерационных параметров. Будем называть оптимальными итерационными параметрами такие τ, α, β, для которых норма невязки убывает в заданное количество раз за минимальное количество итераций.

В **§3.1** обсуждаются основные особенности применения трёхпараметрического итерационного метода, к числу которых относятся следующие.

1. Метод (10) крайне чувствителен к изменению итерационных параметров. Если физические параметры задачи (ν, ρ, g в случае расчёта течений бингамовской жидкости) и параметр дискретизации h фиксированы, то уже в относительно небольшой окрестности оптимальных параметров τ_*, α_*, β_* метод либо перестаёт сходиться, либо сходится очень медленно.

2. При небольших изменениях физических параметров задачи (например, ν, ρ, g в случае расчёта течений бингамовской жидкости) оптимальные значения $\tau_*, \alpha_*, \beta_*$ также меняются слабо, что позволяет при малом изменении ν, ρ, g локализовать окрестность поиска новых оптимальных значений τ, α, β.

3. Оптимальные итерационные параметры метода (10) слабо зависят от параметра дискретизации исходной дифференциальной задачи, что позволяет эффективно определять $\tau_*, \alpha_*, \beta_*$ на сетке с крупным шагом, для их последующего уточнения, если это необходимо.

На основании перечисленных свойств предлагается практический алгоритм поиска оптимальных итерационных параметров (сформулируем его для задачи расчёта течений бингамовской жидкости).

Предположим, что удалось найти оптимальные значения τ, α, β для некоторых ν_0, ρ_0, g_0. Обозначим их через τ_0, α_0, β_0. На следующем шаге рассмотрим $\nu_1 = \nu_0 + \Delta\nu$, $\rho_1 = \rho_0 + \Delta\rho$, $g_1 = g_0 + \Delta g$ и с помощью какого–либо алгоритма оптимизации (например, циклического метода покоординатного спуска) найдём новые оптимальные значения τ_1, α_1, β_1, причём область поиска сузим до некоторого $B_R(\tau_0, \alpha_0, \beta_0)$ — шара радиуса R с центром в τ_0, α_0, β_0. Отметим, что конкретные значения $\Delta\nu$, $\Delta\rho$ и Δg, а также R подбираются для каждой задачи экспериментально. Соответственно, на следующем шаге данного алгоритма рассматриваются $\nu_2 = \nu_1 + \Delta\nu$, $\rho_2 = \rho_1 + \Delta\rho$, $g_2 = g_1 + \Delta g$ и уже для них находятся оптимальные итерационные параметры. В качестве отправной точки предложенного алгоритма может служить некоторая линейная задача (в случае бингамовской жидкости это задача Стокса ($\rho = 0$, $g = 0$, $\nu = 1$)), так как для неё получены аналитические формулы параметров τ_0, α_0, β_0. Следует отметить, что с помощью описанной процедуры мы находим оптимальные итерационные параметры с некоторой погрешностью, определяемой точностью алгоритма оптимизации. Таким образом, корректнее называть итерационные параметры, найденные с помощью предложенной процедуры, квазиоптимальными.

Глава 4 посвящена обсуждению численных экспериментов, демонстрирующих работоспособность метода.

В **§4.1—§4.2** представлены результаты численных экспериментов, среди которых расчёты течений в квадратной каверне, а также расчёты течения Пуазейля для цилиндрических труб как постоянного, так и переменного диаметра. Для всех экспериментов приводятся графики линий уровня функций тока, а также профили скорости и указываются квазиоптимальные итерационные параметры, построенные с помощью процедуры, описанной в **§3.1**. Обсуждается вопрос влияния параметра регуляризации ε в случае расчёта течений бингамовской жидкости на трёхпараметрический итерационный метод, а также на алгоритм поиска квазиоптимальных итерационных параметров.

Заключение содержит основные результаты диссертации.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

1. Для дискретного аналога ε— регуляризованных уравнений, описываю-

щих течения бингамовской вязкопластической жидкости, доказана локальная теорема сходимости трёхпараметрического итерационного метода.

2. Для дискретного аналога уравнений, описывающих течения обобщённой ньютоновской жидкости, доказана теорема сходимости трёхпараметрического итерационного метода с произвольного начального приближения.

3. Сформулирован и экспериментально опробован алгоритм поиска практически приемлемых для счёта итерационных параметров в зависимости от параметров дискретизации и физических констант задачи.

Кроме того, с целью демонстрации вычислительной эффективности трёхпараметрического итерационного метода рассчитаны приближённые решения различных модельных и реальных задач течения бингамовской вязкопластической и обобщённой ньютоновской жидкостей.

БЛАГОДАРНОСТИ

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю Евгению Владимировичу Чижонкову за постановку задачи и помощь в работе. Автор также выражает признательность коллективу кафедры вычислительной математики Механико–математического факультета МГУ.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ.

1. *Милютин С.В.* Об одном алгоритме расчёта течений бингамовской жидкости // ЖВМ и МФ. 2009. 49, №3. 549–558.

2. *Милютин С.В.* Об одном алгоритме расчёта течений обобщённой ньютоновской жидкости // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. №5. 63–65.

3. *Милютин С.В.* Практическая оптимизация трехпараметрического итерационного метода для расчёта течений бингамовской жидкости // Вычислительные методы и программирование. 2008. Т.9. 34–39.

4. *Милютин С.В.* К расчёту течений бингамовской жидкости. Сеточные методы для краевых задач и приложения:. Материалы Седьмого Всероссийского семинара. Казань: Изд-во Казанского гос. университета, 2007. 200–205.

5. *Милютин С.В.* Об одном алгоритме расчёта течений бингамовской жидкости. Международная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 16-18 июня 2009 г.: Тезисы докладов. - М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2009. - 396 с.