Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.6

Белоусов Григорий Николаевич

Поверхности дель Пеццо с логтерминальными особенностями

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва — 2010

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Прохоров Юрий Геннадьевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук Орлов Дмитрий Олегович,
	кандидат физико-математических наук Пржиялковский Виктор Владимирович
Ведущая организация:	Ярославский государственный педагогический университет имени К.Д. Ушинского

Защита диссертации состоится 19 марта 2010 г. в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.84 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 19 февраля 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Нормальная проективная поверхность X называется (особой) поверхностью дель Пеццо, если антиканонический дивизор Вейля $-K_X$ является обильным дивизором $\mathbb{Q}$-Картье.

Мы рассмотрим поверхности дель Пеццо над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ с логтерминальными особенностями. Такие поверхности естественным образом возникают в теории логминимальных моделей [1]. Отметим, что двумерная особенность логтерминальна тогда, и только тогда, когда она является факторособенностью по конечной группе [2].

Классификация неособых поверхностей дель Пеццо хорошо известна, и они являются классическим примером рациональных поверхностей [3], [4], [5]. Классификации поверхностей дель Пеццо с дювалевскими особенностями посвящена классическая работа дю Валя [6] и работы Демюзара [7]. Классификации поверхностей дель Пеццо с логтерминальными особенностями посвящены работы Наруки и Урабе [8], Биндшадлера, Брентона и Дрюкера [9]. В частности, классифицированы все поверхности дель Пеццо с дювалевскими особенностями [10], [11] для случая поверхностей с числом Пикара равным 1.

Для приложений к программе минимальных моделей наиболее интересен случай поверхностей дель Пеццо с числом Пикара 1. Известна полная

---

[1] Kawamata Y., Matsuda K. & Matsuki J. *Introduction to the minimal model program*, Adv. Stud. Pure Math. **10** (1987), 283 – 360.

[2] Kawamata Y. *Crepant blowing-up of 3-dimensional canonical singularities and its application to degenerations of surfaces*, Ann. of Math. **127** (1988), 93 – 163.

[3] Манин Ю. И. *Кубические формы: алгебра, геометрия, арифметика*, М. Наука, (1972).

[4] Манин Ю. И. Цфасман М. А. *Рациональные многообразия: алгебра, геометрия, арифметика*, Успехи мат. наук, (1986), **41**:2, 43 – 94.

[5] Nagata M., *On rational surface I, II* Mem. Coll. Sci. Kyoto (A), (1960), **32**, 351 – 370; **33**, 271 – 293.

[6] Du Val P. *On isolated singularities of surfaces which do not affect the conditions of adjunction, I, II, III*, Proc. Cambridge Phil. Soc., (1934), **30**, 453 – 465, 483 – 491.

[7] Demazure M. *Surfaces de del Pezzo II, III, IV, V*, Lect. Notes math., (1980), **777**, 23 – 69.

[8] Naruki I. Urabe T., *On singularities on degenerate del Pezzo surfaces of degree 1,2* Proc. Symp. Pure Math., (1983), **40**, part 2, 587 – 591.

[9] Bindschadler D. Brenton L. Drucker D. *Rational mappings of del Pezzo surfaces, and singular compactifications of two-dimensional affine varieties*, Tohoku Math. J. **36** 4 (1984), 519 – 609.

[10] Furushima M. *Singular del Pezzo surfaces and analytic compactifications of 3-dimensional complex affine space C^3*, Nagoya Math. J. **104** (1986), 1 – 28.

[11] Miyanishi M. & Zhang D. -Q. *Gorenstein log del Pezzo surfaces of rank one*, J. Algebra. **118** (1988), 63 – 84.

классификация поверхностей дель Пеццо с дювалевскими особенностями [12], [13]. В работе Алексеева–Никулина [14] классифицированы все поверхности дель Пеццо индекса 2.

Напомним, что нормальная проективная алгебраическая поверхность называется *рациональной гомологической проективной плоскостью*, если она имеет те же числа Бетти, что и проективная плоскость $\mathbb{P}^2$. К таким поверхностям применимо неравенство Богомолова–Миаоки–Яу.

Согласно неравенству Богомолова–Миаоки–Яу [15], [16], [17], [18], [19], [20] рациональная гомологическая плоскость имеет не более шести особых точек. В работе Кила–Макернена [21] доказано, что поверхность дель Пеццо с логтерминальными особенностями и числом Пикара 1 имеет не более пяти особых точек. Я. Коллар [22] поставил задачу описать все рациональные гомологические проективные плоскости, имеющие лишь логтерминальные особенности и, количество особых точек которых равно пяти. Эта проблема решена для поверхностей с численно эффективным каноническим классом [23]. Основная теорема главы 3 решает проблему Коллара в случае, когда $-K_X$ – обилен. Данная проблема тесно связана с

[12]Miyanishi M. & Zhang D. -Q. *Gorenstein log del Pezzo surfaces of rank one*, J. Algebra. **118** (1988), 63 – 84.

[13]Furushima M. *Singular del Pezzo surfaces and analytic compactifications of 3-dimensional complex affine space C^3*, Nagoya Math. J. **104** (1986), 1 – 28.

[14]Алексеев В. А., Никулин В. В. *Классификация поверхностей дель Пеццо с лог-терминальные особенности индекса ≤ 2, инволюции на поверхностях $K3$ и группы отражений в пространствах Лобачевского*, доклады по математике и ее приложениям, том **2** выпуск 2, Акад. наук СССР, Инст. мат. им. Стеклова, Москва – Тула (1988), 51– 150.

[15]Богомолов Ф. А., *Голоморфные тензоры и векторные расслоения на проективных многообразиях*, Изв. АН СССР. Сер. матем., **42**:6 (1978), 1227 – 1287.

[16]Miyaoka Y. *On the Chern numbers of surfaces of general type*, Invent. Math. **42** (1977), 225 – 237.

[17]Shing Tung Yau *Calabi's conjecture and some new results in algebraic geometry*, Proc. Nat. Akad. Sci. USA **74** (1977), no. 5, 1798 – 1799.

[18]Sakai F. *Semistable curves on algebraic surfaces and logarifmic pluricanonical maps* Math. Ann. **254** (1980), no. 2, 89 – 120.

[19]Miyaoka Y. *The maximal number of quotien singularities on surfaces with given numerical invariants*, Math. Ann. **268** (1984), no. 2, 159 – 171.

[20]Kabayashi R., Nakamura S., Sakai F. *A numerical characterization of ball quotients for normal surfaces with branch loci*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **65** (1989), no. 7, 238 – 241.

[21]Keel S. & McKernan J. *Rational curves on quasi-projective surfaces*, Memoirs AMS **140** (1999), no. 669.

[22]Kollar J. *Is there a topological Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality?*, Pure and Applied Math. Quarterly **4** No. 2 (2008), 203– 236.

[23]D. Hwang, J. Keum *The maximum number of singular points on rational homology projective planes* arXiv:math.AG/0801.3021, to appear in J. Algebraic Geometry.

алгебраической проблемой Монгомери-Янга и многими другими задачами из топологии [24].

Также, мы рассмотрим поверхности дель Пеццо с логтерминальными особенностями и действием конечной простой группы G на этой поверхности. Группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n_k$ называется *группой Кремоны* над полем k и обозначается $\mathrm{Cr}_n(k)$. Группа Кремоны $\mathrm{Cr}_1(k)$ изоморфна группе автоморфизмов проективной прямой. Следовательно, группа $\mathrm{Cr}_1(k)$ изоморфна $\mathrm{PSL}_2(k)$. Плоскую группу Кремоны над полем $\mathbb{C}$ мы будем обозначать Cr_2. Известно, что все поверхности дель Пеццо с логтерминальными особенностями рациональны [25]. Следовательно, группа G содержится в Cr_2, где Cr_2 – двумерная группа Кремоны. Все конечные подгруппы группы Cr_2 классифицированы [26]. Согласно этой классификации, в Cr_2 существуют три конечные простые подгруппы: $\mathfrak{A}_5$, $\mathfrak{A}_6$ и $G_{168} = \mathrm{PSL}_2(7)$. Мы классифицируем все поверхности дель Пеццо с действием этих групп.

Цель работы

- Решение проблемы Я. Коллара для поверхностей дель Пеццо с логтерминальными особенностями. Доказать, что максимальное число особых точек на поверхности дель Пеццо с логтерминальными особенностями и числом Пикара 1 не более четырех.
- Классификация поверхностей дель Пеццо с логтерминальными особенностями, допускающих действие простой конечной группы.

Научная новизна

1. Доказано, что поверхность дель Пеццо с логтерминальными особенностями и числом Пикара 1 имеет на более четырех особых точек.

2. Доказано, что существует единственная поверхность дель Пеццо

[24] Kollar J. *Is there a topological Bogomolov-Miyaoka-Yau inequality?*, Pure and Applied Math. Quarterly **4** No. 2 (2008), 203– 236.

[25] Алексеев В. А., Никулин В. В. *Классификация поверхностей дель Пеццо с лог-терминальные особенности индекса ≤ 2, инволюции на поверхностях $K3$ и группы отражений в пространствах Лобачевского*, доклады по математике и ее приложениям, том **2** выпуск 2, Акад. наук СССР, Инст. мат. им. Стеклова, Москва – Тула (1988), 51– 150.

[26] I. V. Dolgachev, V. A. Iskovskikh *Finite subgroups of the plane Cremona group*, Algebra, arithmetic and geometry: Manin Festschrift. Boston: Birkhauser, 2009. (Progr. Math.; V. **269**), 443 – 549.

с логтерминальными особенностями X, допускающая действие группы Валентинера $\mathfrak{A}_6$, и $X \simeq \mathbb{P}^2$.

3. Доказано, что если X – поверхность дель Пеццо с логтерминальными особенностями, допускающая действие группы Клейна $G_{168} = \mathrm{PSL}_2(7)$, то возможны только следующие два случая:

- $X \simeq \mathbb{P}^2$.
- $X \simeq S_2^{\mathrm{k}}$, где S_2^{k} – некоторая специальная неособая поверхность дель Пеццо степени два.

4. Доказано, что если X – поверхность дель Пеццо с логтерминальными особенностями, допускающая действие группы $G = \mathfrak{A}_5$ и $\rho(X)^G = 1$, то возможны только следующие случаи:

- $X \simeq \mathbb{P}^2$.
- $X \simeq S_5$, где S_5 – неособая поверхность дель Пеццо степени пять.
- $X \simeq \mathbb{P}(1, 1, 2n)$ – конус над рациональной кривой степени $2n$.
- $X \simeq F_{2n,ak-2n,a}$, где $F_{2n,ak-2n,a}$ – поверхность, определяемая следующим образом. Пусть k и n – натуральные числа такие, что $n \geq 1$ и $k \in \{12, 20, 30, 60\}$. Заметим, что группа $G = \mathfrak{A}_5$ естественным образом действует на поверхности Хирцебруха $\mathbb{F}_{2n}$. Пусть M и D – различные сечения такие, что $M^2 = 2n$ и $D^2 = -2n$. Пусть $p_1 : Z_1 \to \mathbb{F}_{2n}$ – раздутие орбиты из k точек на M. Пусть $p_2 : Z_2 \to Z_1$ – раздутие орбиты из k точек на собственном прообразе M и так далее. Пусть $r : Z_s \to F_{2n,ak-2n,a}$ – стягивание всех кривых с индексом самопересечения меньшим -1, где a – число раздутий собственного прообраза M и $ak-2n > 0$. Тогда $F_{2n,ak-2n,a}$ – поверхность дель Пеццо, допускающая нетривиальное действие группы G и $\rho(F_{2n,ak-2n,a})^G = 1$. Заметим, что $F_{2n,ak-2n,a}$ имеет две особые точки, которые имеют тип $\frac{1}{2n}(1, 1)$, $\frac{1}{ak-2n}(1, 1)$, и k дювалевских особых точек, которые имеют тип A_{a-1} (возможно $a = 1$ и на поверхности имеются только неподвижные особые точки).
- $X \simeq \tilde{\mathbb{P}^2}_{k,s}$, где $\tilde{\mathbb{P}^2}_{k,s}$ – поверхность, определяемая следующим образом. Пусть k – натуральное число такое, что $k \in \{12, 20, 30, 60\}$. Известно, что группа $G = \mathfrak{A}_5$ естественным образом действует на $\mathbb{P}^2$. Известно, что на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$ существует единственная G-инвариантная коника. Обозначим эту конику через C. Пусть $p_0 : Z_0 \to \mathbb{P}^2$ – раздутие одной орбиты, состоящей из k точек

$P_1, \dots, P_k$ на конике C и пусть C_0 – собственный прообраз коники C. Пусть $p_1 : Z_1 \to Z_0$ – раздутие орбиты, состоящей из k точек $P'_1, \dots, P'_k$ на C_0 таких, что точки $P'_1, \dots, P'_k$ отображаются в точки $P_1, \dots, P_k$ при морфизме p_1. Повторяя эту процедуру $s+1$ раз, мы получим неособую поверхность Z_s. Пусть $r : Z_s \to \widetilde{\mathbb{P}^2}_{k,s}$ – стягивание всех рациональных кривых, у которых индекс самопересечения не больше -2. Тогда $\widetilde{\mathbb{P}^2}_{k,s}$ – поверхность дель Пеццо с логтерминальными особенностями, допускающая нетривиальное действие группы G. Заметим, что $\rho(\widetilde{\mathbb{P}^2}_{k,s})^G = 1$. Множество особых точек поверхности $\widetilde{\mathbb{P}^2}_{k,s}$ состоит из одной (неподвижной) точки, особенность которой имеет тип $\frac{1}{k(s+1)-4}(1,1)$, и k дювалевских особых точек (образующих одну орбиту), которые имеют тип A_s.

Основные методы исследования

В работе применяются методы алгебраической геометрии (бирациональные перестройки) [27], теории особенностей алгебраических многообразий [28], теории представлений групп, топологические методы [29], [30], [31].

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут найти применение в алгебраической геометрии, топологии, теоретической и математической физике.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на следующих научно-исследовательских семинарах:

- на кафедральном семинаре кафедры высшей алгебры МГУ (2009);

[27] Хартсхорн Р. *Алгебраическая геометрия*, ИО НФМИ (2000).

[28] Прохоров Ю. Г. *Особенности алгебраических многообразий*, Москва, издательство МЦНМО, (2009).

[29] Sakai F. *Semistable curves on algebraic surfaces and logarifmic pluricanonical maps* Math. Ann. **254** (1980), no. 2, 89 – 120.

[30] Miyaoka Y. *The maximal number of quotien singularities on surfaces with given numerical invariants*, Math. Ann. **268** (1984), no. 2, 159 – 171.

[31] Kabayashi R., Nakamura S., Sakai F. *A numerical characterization of ball quotients for normal surfaces with branch loci*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **65** (1989), no. 7, 238 – 241.

- на семинаре «Геометрия алгебраических многообразий» кафедры высшей алгебры МГУ, 2005 – 2009 гг.;
- на международной алгебраической конференции, посвященной 100-летнему юбилею профессора А.Г. Куроша, Москва, МГУ, 2008 г.;
- на летней школе-конференции по алгебраической геометрии для молодых ученых России, Ярославль, 2008 г.;
- на летней школе-конференции по алгебраической геометрии и комплексному анализу для молодых ученых России, Ярославль, 2009 г.;
- на семинаре профессора Д. Кыма, университет г. Сеула, Южная Корея, 2009 г.

Публикации

Результаты автора по теме диссертации опубликованы в 4 работах [1 – 4].

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из 5 глав (первая из которых является вводной) и библиографии (53 наименования). Общий объем диссертации 68 страниц.

Краткое содержание работы

Первая глава – введение. Здесь обсуждается история изучаемых вопросов, дается обзор ранее известных результатов и формулируются основные утверждения, доказанные в диссертации.

В главе 2 мы напоминаем, необходимые для доказательства основных результатов диссертации, известные понятия и утверждения, принадлежащие другим авторам, из теории алгебраических многообразий (см. раздел 2) и теории особенностей алгебраических поверхностей (см. раздел 4), а также приводим некоторые факты о поверхностях дель Пеццо (см. разделы 3 и 5) и необходимые сведения из топологии (см. разделы 6). В разделе 1 мы устанавливаем соглашения относительно обозначений и понятий, используемых в диссертации.

В главе 3 мы докажем, что любая поверхность дель Пеццо с логтерминальными особенностями имеет не более 4 особых точек.

В разделе 1 мы приводим необходимые, для доказательства нашего утверждения, факты о поверхностях дель Пеццо и вводим обозначения, используемые в этой главе. Мы рассматриваем минимальное разрешение $\pi : \bar{X} \to X$ особенностей поверхности дель Пеццо X. Мы также вводим понятие минимальной кривой, что позволяет нам рассмотреть два случая:

(1) $|C + D + K_{\bar{X}}| \neq \varnothing$;
(2) $|C + D + K_{\bar{X}}| = \varnothing$.

Здесь C – минимальная кривая, D – исключительный дивизор морфизма π.

В разделе 2 мы рассматриваем случай $|C + D + K_{\bar{X}}| \neq \varnothing$. В этом случае существует разложение $D = D' + D''$, где D' и D'' не имеют общих компонент и не пересекаются. Более того, $K_{\bar{X}} + D'' + C \sim 0$ и дивизор D' состоит из (-2)-кривых. Далее перебором случаев мы получаем необходимое утверждение.

В разделе 3 мы рассматриваем случай $|C+D+K_{\bar{X}}| = \varnothing$. В этом случае C – (-1)-кривая и C пересекает каждую компоненту связности дивизора D не более, чем в одной точке. Снова перебором случаев мы получаем необходимое утверждение.

В главе 4 мы дадим другое доказательство теоремы о том, что число особых точек на поверхности дель Пеццо с логтерминальными особенностями не более 4. Мы используем обозначения главы 3.

В разделе 1 мы приводим необходимые, для доказательства нашего утверждения, факты о поверхностях дель Пеццо. Мы доказываем, что если поверхность дель Пеццо с логтерминальными особенностями имеет пять особых точек, то четыре из них – обыкновенные двойные точки. Таким образом, мы снова имеем два случая:

(1) пятая особая точка – циклический фактор;
(2) пятая особая точка – не является циклическим фактором.

В разделе 2 мы рассматриваем случай, когда пятая особая точка – циклический фактор. Мы докажем, что в этом случае существует расслоение на рациональные кривые $\Phi\bar{X} \to \mathbb{P}^1$ такое, что $f \cdot D \leq 2$, где f – общий слой расслоения.

В разделе 3 мы рассматриваем случай, когда пятая особая точка – не является циклическим фактором. В этом случае существует расслоение на рациональные кривые $\Phi : \bar{X} \to \mathbb{P}^1$ такое, что Φ имеет единственное сечение D_0 в D и $f \cdot D_0 \leq 3$, где f – общий слой расслоения.

В главе 5 мы классифицируем поверхности дель Пеццо, допускающие действие простой конечной группы.

В разделе 1 мы сформулируем основной результат и введем необходимые обозначения.

В разделе 2 мы докажем некоторые факты о поверхностях дель Пеццо с действием группы. В частности мы докажем, что если поверхность дель Пеццо X имеет особенности не хуже, чем дювалевские, и на X действует простая конечная группа, то возможны только следующие случаи:

(1) G – группа Валентинера и $X \simeq \mathbb{P}^2$.
(2) G – группа Клейна и $X \simeq \mathbb{P}^2$ или $X \simeq S_2^{\mathrm{k}}$.
(3) $G \simeq \mathfrak{A}_5$ и либо X – неособая поверхность дель Пеццо, либо $X \simeq \mathbb{P}(1,1,2)$. Более того, если $\rho(X)^G = 1$, то X изоморфна $\mathbb{P}^2$, S_5 или $\mathbb{P}(1,1,2)$.

Также, в разделе 2 мы введем необходимые конструкции. Например, пусть X – поверхность дель Пеццо с логтерминальными особенностями, на X действует группа G и $\rho(X)^G = 1$. Пусть $f : Y \to X$ – морфизм такой, что исключительный дивизор этого морфизма состоит из одной орбиты исключительных прямых. Тогда на поверхности Y существует другой G-эквивариантный экстремальный луч. Следовательно, существует морфизм $g : Y \to X_1$ такой, что $X \neq X_1$ и число Пикара минимального разрешения особенностей поверхности X_1 меньше, чем число Пикара минимального разрешения особенностей поверхности X. Эта конструкция называется "игра в два луча".

В разделе 3 мы докажем основную теорему главы для групп Клейна и Валентинера.

В разделе 4 мы докажем основную теорему главы для знакопеременной группы $\mathfrak{A}_5$.

Благодарности

Автор признателен своим научным руководителям доктору физико-математических наук, профессору Ю. Г. Прохорову и член-корреспонденту РАН, профессору В. А. Исковских за постановку задач и постоянное внимание к работе. Автор благодарит доктора физико-математических наук И. А. Чельцова и кандидата физико-математических наук К. А. Шрамова за полезные обсуждения.

Список литературы

[1] Белоусов Г. Н., *Поверхности дель Пеццо с логтерминальными особенностями*, Мат. Заметки **83** (2008), 2, 170 – 180.

[2] Belousov G., *The maximal number of singular points on log del Pezzo surfaces*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **16** (2009), 1 – 8.

[3] Белоусов Г. Н., *Поверхности дель Пеццо с действием простой конечной группы*, Деп. в ВИНИТИ 18.12.2009 №810-В2009, см. также arXiv:0912.4583v1.

[4] Белоусов Г. Н., *Поверхности дель Пеццо с логтерминальными особенностями*, Международная алгебраическая конференция, посвященная 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша, тезисы докладов, Москва, 2008, стр. 38 – 39.