МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 517.51

Руновский Константин Всеволодович

ПРИБЛИЖЕНИЕ СЕМЕЙСТВАМИ ЛИНЕЙНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.01 - вещественный, комплексный и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Москва 2010

Работа выполнена на кафедре теории функций и функционального анализа механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный консультант:
доктор физико-математических наук,
профессор Потапов Михаил Константинович

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Иванов Валерий Иванович

доктор физико-математических наук,
профессор Калябин Геннадий Анатольевич

доктор физико-математических наук,
профессор Кротов Вениамин Григорьевич

Ведущая организация:
Московский физико-технический институт

Защита состоится 21 мая 2010 года в 16 час. 40 мин. на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, Российская Федерация, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, МГУ имени М. В. Ломоносова, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (14 этаж).

Автореферат разослан   2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор   И. Н. Сергеев

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Классическая теория тригонометрической аппроксимации посвящена вопросам приближения непрерывных или, по крайней мере, интергрируемых функций. Основной шкалой пространств, таким образом, традиционно являлась шкала L_p, где $1 \leq p \leq +\infty$. Созданием и изучением приближающих конструкций в этой ситуации занимались выдающиеся математики 19 и 20-ого веков, такие как Л. П. Чебышев, А. Лебег, Д. Джексон, Ш. Валле-Пуссен, Л. Фейер, Ж. Фавар, А. Зигмунд, М. Рисс, С. Н. Бернштейн, С. М. Никольский и другие. Основные результаты классической теории описаны во многих монографиях и книгах (см., например, [1] [2] [3] [4]). Отметим при этом, что наиболее распространенными методами приближения периодических функций являлись средние ряда Фурье и интерполяционные средние, построенные с помощью тех или иных тригонометрических ядер, т. е., линейные полиномиальные операторы.

В последние десятилетия появился, однако, целый ряд теоретических и практических проблем, прежде всего в теории дифференциальных уравнений и теории обработки данных и сигналов, в которых потребовалось приближение неинтегрируемых функций, а также численное приближение и интегрирование сильно осциллирующих функций. Таким образом, возникла необходимость распространения результатов теории приближений на случай пространств L_p, где $0 < p < 1$, а также создания новых методов приближения и численного интегрирования, обеспечивающих нужную точность результата без существенного увеличиния порядка количества узлов интерполяции или кубатуры.

Функции из L_p при $0 < p < 1$ могут быть неинтегрируемыми, поэтому понятие ряда Фурье теряет смысл, а классические методы приближения становятся заведомого непригодными. Проблема оказалась, однако, более глубокой. Дело в том, что для $0 < p < 1$ вообще не существует нетривиальных линейных ограниченных функционалов и полиномиальных операторов (см., например, [5]). В силу этого обстоятельства, принципиальный вопрос - "чем приближать" в L_p при $0 < p < 1$ - долгое время оставался открытым. Различными математиками в разное время был разработан целый ряд специальных методов, позволяющих решать те или иные частные задачи. Так, например, для доказательства в случае $0 < p < 1$ классической прямой теоремы теории приближений, т. е. оценки величины наилучшего приближения тригоно-

[1] *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М.: Физматгиз, 1960.

[2] *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.

[3] *DeVore R., Lorenz G.* Constructive Approximation. Berlin-Heidelberg: Springer, 1993.

[4] *Butzer P., Nessel R.* Fourier Analysis and Approximation. Vol. 1. New-York & London: Acad. Press, 1971.

[5] *Rudin W.* Functional Analysis. McGraw-Hill Inc., Second edition, 1991.

метрическими полиномами посредством модулей гладкости данной функции одной переменной, в работах Э. А. Стороженко, В. Г. Кротова, П. Освальда [6] и В. И. Иванова [7] был разработан метод промежуточной аппроксимации кусочно-полиномиальными функциями, с помощью которого удалось также решить и некоторые многомерные задачи [8] [9]. Однако, этот метод оказался малоэффективным для решения целого ряда проблем, в частности, он не позволил перенести на случай $0 < p < 1$ прямую и обратную теоремы М. К. Потапова о связях наилучшего приближения "углом" и смешанных модулей гладкости [10]. То же самое замечание касается и прямой и обратной теорем для сферического дискретного модуля непрерывности, установленных для $1 \le p \le +\infty$ З. Дитцианом[11]. Другой пример. В работах П. Освальда [12] и Р. Таберского [13] было изучено качество аппроксимации некоторыми средними ряда Фурье в метрике L_p при $0 < p < 1$ для функций, принадлежащих тем или иным классам, компактно вложенным в L_1. Позитивные результаты получались при этом, лишь при некоторых ограничиниях на p, например, в случае средних Валле-Пуссена только для $p > 1/2$, однако природа константы $1/2$ осталась невыясненной. Следует отметить также, что как упомянутые, так и иные похожие методы, разработанные для случая $0 < p < 1$, являются неконструктивными, и в частности, не позволяют разработать на их базе эффективные вычислительные процедуры приближения произвольной функции из пространства L_p при $0 < p < 1$.

В классическом же случае $1 \le p \le +\infty$, где теоретические вопросы достаточно глубоко проработаны, тем не менее возникает целый ряд проблем вычислительного характера. Дело в том, что в целях обеспечения нужной точности результата в задачах численного интегрирования количество узлов той или иной кубатурной формулы должно существенно превышать количество осцилляций данной функции на периоде, что в свою очередь, может привести к недопустимому увеличению погрешности вычисления. Неэф-

[6] *Стороженко Э. А., Кротов В. Г., Освальд П.* Прямые и обратные теоремы типа Джексона в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Матем. сборник. 1975. Т. 98. №3.

[7] *Иванов В. И.* Прямые и обратные теоремы теории приближений в метрике L_p для $0 < p < 1$ // Мат. заметки. 1975. Т. 18. № 5. С. 641-658.

[8] *Storozhenko E. A., Oswald P.* Moduli of smoothness and best approximation in the spaces L_p, $0 < p < 1$ // Analysis Math. 1977. Vol. 3. № 2. P. 141-150.

[9] *Стороженко Э. А., Освальд П.* Теоремы Джексона в пространствах $L_p(\mathbb{R}^n)$, $0 < p < 1$ // Сиб. матем. журнал. 1978. Т. 19. № 4. С. 888-901.

[10] *Потапов М. К.* Приближение "углом" и теоремы вложения // Math. Balkanica. 1972. № 2. С. 183-188.

[11] *Ditzian Z.* Measure of smoothness related to the Laplacian // Trans. AMS. 1991. Vol. 326. P. 407-422.

[12] *Освальд П.* О скорости приближения средними Валле-Пуссена тригонометрических рядов в метрике L_p, $0 < p < 1$ // Изв. Акад. наук Армянской ССР. 1983. Т. 18. С. 230-245.

[13] *Taberski R.* Approximation properties of some means of Fourier series // Funct. et Approx. 1998. Vol. 26. P. 275-286.

фективность классических кубатур, таких как, формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона, для подсчета интегралов от сильно осциллирующих функций показана У. Эренмарком [14]. Замечая, что подсчет коэффициентов Фурье относится к числу задач именно такого типа, можно сделать вывод о том, что даже в случае пространства L_2, где полином наилучшего приближения совпадает с соответствующей частичной суммой ряда Фурье, т. е. где задача приближения теоретически полностью решена, также могут возникнуть серьезные вычислительные проблемы.

Таким образом, в теории приближений появился целый ряд теоретических и прикладных задач, которые не удалось решить уже разработанными методами. Оказалось, что как выше перечисленные, так и многие другие проблемы могут быть успешно решены в полной шкале L_p, где $0 < p \leq +\infty$, путем введения новых универсальных методов приближения, названных *семействами линейных полиномиальных операторов* (СЛПО) [15] [16].

Задача изучения качества методов приближения, т. е. определения скорости стремления к 0 последовательности их аппроксимационных ошибок, в терминах тех или иных структурных характеристик индивидуальной функции как, например, модули гладкости или K-функционалы, является одной из классических проблем теории приближений, которой в случае $1 \leq p \leq +\infty$ занимались многие авторы. Отметим, например, результат Р. Тригуба [17] об эквивалентности ошибки приближения средними Бохнера-Рисса $B_n^{(\alpha)}$ индивидуальной функции d переменных из L_p, $1 \leq p \leq +\infty$, ее сферическому модулю непрерывности в случае $\alpha > (d-1)/2$. Пример средних Фейера показывает, однако, что классических модулей гладкости оказывается недостаточно для описания качества аппроксимации даже в простейших случаях. Определенное расширение понятия гладкости было достигнуто путем перехода к K-функционалам, изначально возникшим в работах Ж. Петре по теории интерполяции пространств (о свойствах K-функционалов с точки зрения теории приближений см., например, книгу [3]). Так в частности, в работе З. Дитциана, В. Христова и К. Иванова [18] было отмечено, что ошибка приближения средними Фейера в метрике C эквивалентна K-функционалу, соответствующему производной Рисса. Задача же об эквивалентности ошибки приближения средними Бохнера-Рисса в случае $\alpha > (d-1)/2$ в метрике L_p

[14] *Ehrenmark U. T.* A three-point formula for a quadrature of oscillatory integrals with variable frequency // J. Comput. Appl. Math. 1988. Vol. 21. P. 87-99.

[15] *Руновский К. В.* О семействах линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сборник. 1993. Т. 184. № 2. С. 33-42.

[16] *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сборник. 1994. Т. 185. № 8. С. 81-102.

[17] *Тригуб Р. М.* Абсолютная сходимость интегралов Фурье, суммируемость рядов Фурье и аппроксимация полиномами на торе // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1980. Т.44. С. 1378-1409.

[18] *Ditzian Z., Hristov V., Ivanov K.* Moduli of smoothness and K-functionals in L_p, $0 < p < 1$ // Constr. Approx. 1995. Vol. 11. P. 67-83.

при $1 \leq p \leq +\infty$ K-функционалу, соответствующему оператору Лапласа, была решена в работе [19]. Возможности применения K-функционалов оказались, однако, весьма ограниченными. Определенная "паталогичность" их свойств в L_p при $0 < p < 1$ была отмечена Ж. Петре [20]. Истинный же характер этой "паталогичности" был прояснен В. Христовым и К. Ивановым, показавшим, что K-функционалы, соответствующие обычным производным и оператору Лапласа, тождественно равны 0, если $0 < p < 1$ [21]. В этой же работе были введены их реализации - новые объекты, оказавшиеся пригодными для описания гладкости уже для всех $0 < p \leq +\infty$.

Таким образом, в целях решения проблемы качества аппроксимации индивидуальных функций из L_p в ее наиболее общей постановке, охватывающей в частности СЛПО и методы, произведенные классическими ядрами, естественным образом возникла необходимость введения и изучения обобщенных K-функционалов и их реализаций, произведенных операторами мультипликаторного типа.

Цель работы. Основная цель работы - систематическое изучение семейств линейных полиномиальных операторов (СЛПО) в шкале пространств L_p, $0 < p \leq +\infty$, периодических функций одной и нескольких переменных, в частности, исследование их сходимости и качества аппроксимации с помощью реализаций обобщенных K-функционалов, порожденных однородными функциями, а также создание теоретической основы для разработки эффективных вычислительных процедур приближения.

Методика исследования. В диссертации используются методы теории функций одной и многих действительных переменных, теории вероятности, функционального анализа в (квази)банаховых пространствах и анализа Фурье.

Научная новизна. Все результаты работы являются новыми. Основные достижения могут быть представлены следующим образом:

- установлены критерии сходимости СЛПО в терминах преобразования Фурье генератора; в случае $1 \leq p \leq +\infty$ показана эквивалентность СЛПО классическим методам приближения; для СЛПО, произведенных классическими ядрами найдены их точные ранги сходимости;
- доказана теорема о стохастической аппроксимации, служащая основой для эффективного, быстродействующего, экономичного и универсального алгоритма приближения функций из L_p для всех $0 < p \leq +\infty$;
- установлены критерии выполнимости неравенств мультипликаторного

[19] *Ditzian Z.* On Fejer and Bochner-Riesz means // J. Fourier Anal. Appl. 2005. Vol. 11. № 4. P. 489-496.

[20] *Peetre J.* A remark on Sobolev spaces // J. Approx. Theory. 1975. Vol. 13. P. 218-228.

[21] *Hristov V., Ivanov K.* Realizations of K-functionals on subsets and constrained approximation // Math. Balkanica. 1990. Vol. 4 (New Series). P. 236-257.

типа для тригонометрических полиномов; во многих важных случаях получены окончательные результаты в смысле описания метрик, в которых они справедливы;

- изучены свойства обобщенных гладкостей, в частности K-функционалов и их реализаций, произведенных однородными генераторами, а также доказаны прямая и обратная теоремы теории приближений в их общем виде;
- найдены достаточно общие условия на генераторы метода и гладкости, обеспечивающие эквивалентность ошибки приближения посредством СЛПО реализации соответствующего K-функционала; на этой основе получены как известные, так и новые результаты о качестве приближения посредством методов, произведенных классическими ядрами.

Теоретическая и практическая значимость. Диссертация относится к области конструктивной теории функций и носит теоретико-прикладной характер. Ее результаты могут быть полезны при решении различных теоретических проблем приближения периодических функций одной и многих переменных, а созданный на их базе эффективный, быстродействующий и экономичный и универсальный алгоритм стохастической аппроксимации применим к решению широкого круга задач численного приближения неинтегрируемых и сильно осциллирующих функций, быстрому подсчету объектов анализа Фурье, в том числе и коэффициентов Фурье, а также к обработке данных и сигналов. Разделы диссертации могут составить содержание специальных курсов для студентов и аспирантов, специализирующихся в областях анализа и численных методов.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались в 1990-1993 г.г. на семинаре по теории функций и приближений под руководством П. Л. Ульянова и М. К. Потапова, семинаре по теории приближений под руководством С. В. Конягина в Московском Государственном Университете им. М. В. Ломоносова, семинаре по теории функций под руководством С. М. Никольского и Л. Д. Кудрявцева в Математическом Институте им. В. А. Стеклова АН СССР и семинаре по теории приближений под руководством Э. А. Стороженко в Одесском Государственном Университете им. Мечникова, а также в периоды 1994-1995 г.г. и 1999-2009 г.г. на семинаре по теории пространств функций под руководством Х. Трибеля и Х.-Ю. Шмайссера в Университете Фридриха Шиллера в Йене (Германия), в 1996-1998 г.г. на семинаре по теории приближений под руководством Ш. Рименшнайдера и З. Дитциана в Университете Альберты (Канада), в 1998 г. на профильных семинарах под руководством К. Пуччи и Г. Таленти в Университете Флоренции и Институте глобального анализа и его приложений во Флоренции (Италия), в 1995-2008 г.г. на многочисленных научных конференциях по анализу в Германии и Австрии, а также в 2009 году на семинаре по теории функций под руководством Б. С. Кашина, М. С. Дьяченко, С. В. Конягина и Б. И. Голубова, семинаре по тригонометрическим рядам под руководством М. К. Потапова, В. А. Скворцова, Т. П. Лукашенко и М. И. Дьяченко в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, семинаре по теории функций под руководством С. М. Никольского и Л. Д. Кудрявцева в Математическом Институте им. В. А. Стеклова РАН и международной конференции "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященной 70-летию ректора МГУ академика В. А. Садовничего.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 31 работе (20 - в изданиях, рекомендованных ВАК, 16 - без соавторов). Их список приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, разбитых на подразделы, приложения и списка литературы из 90 наименований. Общий объем работы - 236 страниц. Нумерация утверждений (теоремы и леммы) - двойная: номер главы и собственный номер. Нумерация формул - тройная: номер главы, номер подраздела и собственный номер. Во введении и приложении - независимая нумерация формул. Номера теорем во введении и автореферате совпадают с их номерами в основном тексте.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дан исторический обзор известных результатов по теме диссертации и сформулированы ее главные результаты. Здесь также приводятся основные определения и обозначения, используемые в основном тексте. Посредством $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$ в работе обозначены d-мерные пространства векторов с вещественными и целыми компонентами, множество натуральных чисел и множество целых неотрицательных чисел, соответственно, $xh = x_1h_1+\ldots+x_dh_d$, $|\,x\,| = \sqrt{x_1^2+\ldots x_d^2}$ обозначают скалярное произведение и длину вектора.

Символом $\mathcal{K}$ обозначается класс комплекснозначных функций φ, которые непрерывны на $\mathbb{R}^d$, имеют компактный носитель, так что $r(\varphi) = \sup\{\,|\,\xi\,| : \varphi(\xi) \neq 0\,\} < +\infty$, и удовлетворяют следующим условиям: $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(-\xi) = \overline{\varphi(\xi)}$ для $\xi \in \mathbb{R}^d$. Каждая функция из класса $\mathcal{K}$ производит тригонометрические ядра

$$W_0(\varphi)(h) \equiv 1\,,\ W_\sigma(\varphi)(h) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} \varphi\left(\frac{k}{\sigma}\right) e^{ikh}\,,\ \sigma > 0\,, \qquad (1)$$

принадлежащие пространству

$$\mathcal{T}_\sigma \;=\; \left\{ T(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^d} c_k\, e^{ikx} \;\; : c_{-k} = \overline{c_k},\; |\, k \,| \le \sigma \right\} \;,$$

вещественнозначных тригонометрических полиномов порядка не выше σ, и методы тригонометрической аппроксимации - классические средние Фурье и интерполяционные средние, а также основной объект изучения данной работы - семейства линейных полиномиальных операторов (СЛПО), определяемые соответственно следующими формулами:

$$\mathcal{F}_\sigma^{(\varphi)}(f;x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} f(h)\, W_\sigma(\varphi)(x-h)\, dh \;; \tag{2}$$

$$\mathcal{I}_\sigma^{(\varphi)}(f;x) = (2N+1)^{-d} \cdot \sum_{\nu=0}^{2N} f\left(t_N^\nu\right) \cdot W_\sigma(\varphi)\left(x - t_N^\nu\right) \;; \tag{3}$$

$$\mathcal{L}_{\sigma;\,\lambda}^{(\varphi)}(f;x) = (2N+1)^{-d} \cdot \sum_{\nu=0}^{2N} f\left(t_N^\nu + \lambda\right) \cdot W_\sigma(\varphi)\left(x - t_N^\nu - \lambda\right) \;, \tag{4}$$

где $\lambda \in \mathbb{R}^d$ - параметр, x, h, ν - d-мерные векторы, $N = [r\sigma]$ для некоторого $r \ge r(\varphi)$, а также

$$t_N^\nu = \frac{2\pi\nu}{2N+1}, \quad \nu \in \mathbb{Z}^d\,, \quad \mathbb{T}^d = [0,2\pi)^d\,, \quad \sum_{\nu=0}^{2N} \equiv \sum_{\nu_1=0}^{2N} \dots \sum_{\nu_d=0}^{2N} \;.$$

Методы (2)-(4) изучаются в шкале пространств L_p вещественнозначных измеримых периодических по каждой переменной функций d переменных, для которых

$$\|\, f \,\|_p \;=\; \left(\int\limits_{\mathbb{T}^d} |f(x)|^p \; dx \right)^{1/p} \;<\; +\infty\,,$$

если $0 < p < +\infty$. В случае $p = +\infty$ пространство L_p заменяется на пространство C непрерывных функций, снабженное нормой Чебышева

$$\|\, f \,\|_\infty \;=\; \max_{x\in\,\mathbb{T}^d} |f(x)|\,.$$

В отличие от средних Фурье и интерполяционных средних, корректно определенных только при $1 \le p \le +\infty$ и $p = +\infty$, соответственно, семейства (4), впервые введенные автором [15 16] и изученные в его других работах, оказываются пригодными для приближения функций из L_p для всех $0 < p \le +\infty$, если их нормы и сходимость понимаются в среднем по параметру λ, т. е.

$$\|\, \{\, \mathcal{L}_{\sigma;\,\lambda}^{(\varphi)} \,\} \,\|_{(p)} \;=\; \sup_{\|\, f \,\|_p \le 1} \|\, \mathcal{L}_{\sigma;\,\lambda}^{(\varphi)}(f;x) \,\|_{\overline{p}}\,,\;\; \sigma \ge 0\,, \tag{5}$$

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \| f - \mathcal{L}^{(\varphi)}_{\sigma;\lambda}(f) \|_{\overline{p}} \ = \ 0\,, \ f\in L_p\,, \tag{6}$$

где $L_{\overline{p}}$ - это L_p - пространство функций $f(x,\lambda)$ удвоенного числа переменных с (квази)нормой

$$\| \cdot \|_{\overline{p}} \ = \ (2\pi)^{-d/p} \, \| \quad \| \cdot \|_{p;\,x} \, \|_{p;\,\lambda}\,. \tag{7}$$

Ядра и методы аппроксимации, произведенные функцией $\varphi\in\mathcal{K}$, относятся к ядрам (методам) типа (G). Наряду с ними в работе рассматриваются также ядра и методы типа (GR), в которых величины $\varphi(k/\sigma)$ заменяются на элементы некоторой матрицы множителей сходимости $\Lambda(\varphi)=\{\,a_{n,\,k} : a_{n,\,-k} = \overline{a_{n,\,k}},\ |\,k\,|\le rn,\ n\in\mathbb{N}_0\}$, имеющей вид

$$\Lambda=\Lambda(\varphi)+R\,,\ R=\{\,r_{n,\,k}\}\,;\ \lim_{n\to+\infty} r_{n,\,k}=0,\ k\in\mathbb{Z}^d, \tag{8}$$

где $\Lambda(\varphi)=\{\varphi(k/n)\}$, а матрица остатков R удовлетворяет некоторым условиям "малости", по крайней мере обеспечивающим единственность представления (8).

Оказывается, что как в случае ядер типа (G), так и случае ядер типа (GR) необходимые и достаточные условия сходимости СЛПО могут быть получены в терминах преобразования Фурье генератора φ. В силу этого важную роль в работе играет множество

$$\mathcal{P}_\varphi \ = \ \{\, p\in(0,+\infty] : \ \widehat{\varphi}\in L_p(\mathbb{R}^d)\,\}\,, \tag{9}$$

где $\widehat{\varphi}$ - преобразование Фурье функции φ.

Качество приближения методов (2)-(4) описывается в работе в терминах обобщенных гладкостей, задаваемых однородными функциями. Скажем, что комплекснозначная функция ψ принадлежит классу H_α для некоторого $\alpha>0$, если она непрерывна на $\mathbb{R}^d$, бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$, $\psi(-\xi)=\overline{\psi(\xi)}$ для $\xi\in\mathbb{R}^d$ и

$$\psi(\tau\xi)=\tau^\alpha\psi(\xi)\,,\ \tau>0,\, \xi\in\mathbb{R}^d\,.$$

Класс $\mathcal{H}_\alpha$ состоит по определению из функций $\psi\in H_\alpha$, для которых $\psi(\xi)\ne0$ при $\xi\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$. Каждая функция $\psi\in\mathcal{H}_\alpha$ производит:

- оператор мультипликаторного типа

$$\mathcal{D}(\psi) : \ e^{i\nu x} \ \longrightarrow \ \psi(\nu)\, e^{i\nu x}\,,\ \nu\in\mathbb{Z}^d\,; \tag{10}$$

- пространство ψ-гладких функций

$$X_p(\psi) \ = \ \{\, g\in L_p : \mathcal{D}(\psi)g\in L_p\,\}\ ;$$

- обобщенный K-функционал

$$K_\psi(f,\delta)_p \ = \ \inf_{g\in X_p(\psi)} \{\, \|\, f-g\,\|_p \, + \delta^\alpha \, \|\, \mathcal{D}(\psi)g\,\|_p\,\}\,,\ f\in L_p,\, \delta\ge0\,; \tag{11}$$

• его реализацию

$$\mathcal{K}_\psi(f,\delta)_p \;=\; \inf_{T\in\mathcal{T}_{1/\delta}} \{\, \| f-T\|_p \,+\, \delta^\alpha \,\|\mathcal{D}(\psi)T\|_p \,\}\,,\; f\in L_p,\, \delta>0\,. \quad (12)$$

Как уже было отмечено, для обычных производных K-функционалы (11) были введены Ж. Петре (см., например, сноску [3]), а их реализации (12) - В. Христовым и К. Ивановым [21].

В главе 1 устанавливаются критерии сходимости семейств линейных полиномиальных операторов, произведенных ядрами типов (G) и (GR), в шкале пространств L_p, доказывается эквивалентность их аппроксимационной ошибки, т. е. допредельного выражения в левой части (6), аппроксимационной ошибке соответствующих средних Фурье и интерполяционных средних при $1\le p\le+\infty$ и $p=+\infty$, соответственно, приводится аналог теоремы Валле-Пуссена о том, что в среднем по параметру λ семейства (4) дают почти наилучший порядок приближения, если $\varphi(\xi)=1$ в окрестности точки $\xi=0$, и на этой основе устанавливается теорема о стохастической аппроксимации, служащая теоретической базой для эффективного быстродействующего универсального алгоритма приближения, нашедшего применения в вопросах численного интегрирования и аппроксимации неинтегрируемых и сильно осциллирующих функций, а также удаления шумов, сконцентрированных на множестве малой меры, при обработке данных и сигналов [22].

Сначала объекты (2)-(4) изучаются с единой точки зрения как операторы вида

$$\mathcal{L}_\sigma:\, L_p \longrightarrow \mathcal{T}_{\gamma\sigma,\overline{p}} \subset L_{\overline{p}}\,,\; \sigma>0\,, \quad (13)$$

где γ - некоторое положительное число, а $\mathcal{T}_{\gamma\sigma,\overline{p}}$ состоит из функций $g(x,\lambda)$ из $L_{\overline{p}}$, являющихся тригонометрическими полиномами порядка не выше $\gamma\sigma$ по переменной x для почти всех λ.

Далее, известная схема подсчета норм ядер (1) в метрике L_1 [4] [23] [24] [25] распространяется на случай $0<p\le1$.

Теорема 1.6 *Для $\varphi\in\mathcal{K}$ и $0<p\le1$ множество $\{\,\sigma^{d(1/p-1)}\,\|W_\sigma(\varphi)\|_p\,,\ \sigma\ge0\,\}$ ограничено тогда и только тогда, когда $\widehat{\varphi}\in L_p(\mathbb{R}^d)$. В этом случае*

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \sigma^{d(1/p-1)}\,\|W_\sigma(\varphi)\|_p \;=\; \sup_{\sigma\ge0}\, \sigma^{d(1/p-1)}\,\|W_\sigma(\varphi)\|_p \;=\; \|\,\widehat{\varphi}\,\|_{L_p(\mathbb{R}^d)}\,.$$

---

[22] *Runovski K., Rystsov I., Schmeisser H.-J.* Computational aspects of a method of stochastic approximation // Zeitschrift fuer Anal. und Anwend. (ZAA). 2006. Vol.25. P. 367-383.

[23] *Иванов В. И., Юдин В.* О тригонометрической системе в L_p, $0<p<1$ // Мат. заметки. 1980. Т. 28. С. 859-868.

[24] *Stein E. M.* Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton: Univ. Press, 1970. (pp. 28, 95)

[25] *Stein E. M., Weiss G.* Introduction to Fourier Analysis on Eucliadean Spaces. Princeton: Univ. Press, 1971. (Theorem 3.8, p. 260; Theorem 3.18, p.264; Corollary 3.28, p. 267)

Потом изучаются свойства ядер и семейств линейных полиномиальных операторов, произведенных произвольными матрицами множителей сходимости, в которых $\varphi(k/\sigma)$ из (1) заменяется на $a_{n,k}$. Основной результат - теорема о нормах семейств, понимаемых в смысле определения (5).

Теорема 1.10 *Пусть* $\Lambda = \{\, a_{n,k} : a_{n,-k} = \overline{a_{n,k}},\, |\,k\,| \le rn,\, n \in \mathbb{N}_0\}$, $r > 0$, $0 < p \le +\infty$, $\widetilde{p} = \min(1,p)$, $\widehat{p} = p$ *для* $0 < p < +\infty$ *и* $\widehat{p} = 1$ *для* $p = +\infty$. *Тогда*

$$c_1(n+1)^{d(1/\widehat{p}-1)}\|\, W_n(\Lambda)\|_{\widehat{p}} \le \|\,\{\,\mathcal{L}^{(\Lambda)}_{n;\,\lambda}\}\|_{(p)} \le c_2(n+1)^{d(1/\widetilde{p}-1)}\|\, W_n(\Lambda)\|_{\widetilde{p}}\,,\ n \in \mathbb{N}_0,$$

где положительные константы c_1 c_2 *не зависят от* f *и* n.

На базе теорем 1.6 и 1.10, применяемых в комбинации с общими результатами об операторах вида (13), устанавливаются общие критерии сходимости СЛПО, порожденных ядрами типов (G) и (GR).

Теорема 1.12 *Пусть* $\varphi \in \mathcal{K}$ *и* $1 \in \mathcal{P}_\varphi$. *Тогда семейство* $\{\,\mathcal{L}^{(\varphi)}_{\sigma;\,\lambda}\}$ *сходится в* L_p *тогда и только тогда, когда* $p \in \mathcal{P}_\varphi$. *Для* $1 \le p \le +\infty$ [26]

$$\|\, f - \mathcal{L}^{(\varphi)}_{\sigma;\,\lambda}(f)\,\|_{\overline{p}} \asymp \|\, f - \mathcal{F}^{(\varphi)}_{\sigma}(f)\,\|_p\,,\ f \in L_p,\, \sigma \ge 0\,, \tag{14}$$

и $\mathcal{F}^{(\varphi)}_{\sigma}$ *может быть заменено в (14) на* $\mathcal{I}^{(\varphi)}_{\sigma}$, *если* $p = +\infty$. *Более того, если* $\varphi(\xi) = 1$ *для* $|\,\xi\,| \le \rho < r(\varphi)$, *то*

$$\|\, f - \mathcal{L}^{(\varphi)}_{\sigma;\,\lambda}(f)\|_{\overline{p}} \ \le\ cE_{\rho\sigma}(f)_p\,,\ f \in L_p\,,\ \sigma \ge 0\ , \tag{15}$$

где положительная константа c *не зависит от* f *и* σ, *а* $E_{\rho\sigma}$ *- величина наилучшего приближения* f *полиномами из* $\mathcal{T}_{\rho\sigma}$ *в* L_p.

Теорема 1.13 *Пусть* $\Lambda = \Lambda(\varphi) + R' + R''$, *где* $\varphi \in \mathcal{K}$, $R' = \{\, r_{n,k},\, |\,k\,| \le rn\,\}$ *удовлетворяет условию*

$$(n+1)^{d(1/\alpha-1)}\left(\sum_{|\,k\,|\le rn} |\,r_{n,k}|^2\right)^{1/2}\ ,\ n \in \mathbb{N}_0\,,$$

для некоторого $0 < \alpha < 1$, *а* $R'' = \{\, r''_{n,k}\}$ *такова, что* $r''_{n,k} = \lambda_n\psi(k/n)$, *где* $\psi \in \mathcal{K}$, $\widehat{\psi}(x) = O(|\,x\,|^{-\delta})$, $(x \to +\infty)$, $\lambda_n = O(n^{\delta - d/\alpha})$, *где* $d < \delta < d/\alpha$. *Пусть также* $1 \in \mathcal{P}_\varphi$ *и* $\alpha \notin \mathcal{P}_\varphi$. *Тогда семейство* $\{\,\mathcal{L}^{(\Lambda)}_{n,\,\lambda}\}$ *сходится в* L_p *тогда и только тогда, когда* $p \in \mathcal{P}_\varphi$. *При описанных выше условиях утверждение*

[26] "$A \asymp B$" означает, что "$c_1A \le B \le c_2A$" с некоторыми положительными константами, не зависящими от f и σ.

теоремы 1.12 об эквивалентности методов аппроксимации при $1 \le p \le +\infty$ *сохраняет свою силу.*

В завершение главы 1 устанавливается теорема о стохастической аппроксимации и описывается соответствующий алгоритм приближения.

Теорема 1.14 *Пусть* $\gamma > 1$, $0 < p < +\infty$, *вещественнозначная центрально симметричная функция* $\varphi \in \mathcal{K}$ *такова, что* $\widehat{\varphi} \in L_{\widetilde{p}}(\mathbb{R}^d)$, *где* $\widetilde{p} = \min(1, p)$, $r(\varphi) = 1$ *и* $\varphi(\xi) = 1$ *для* $|\,\xi\,| \le \rho < 1$. *Пусть также* $m \in \mathbb{N}$ *и* η_j, $j = 1, \ldots, m$, *- независимые в совокупности равномерно распределенные на единичном кубе* $[0,1]^d$ *случайные величины. Тогда для* $f \in L_p$ *и* $n \in \mathbb{N}_0$

$$P\left\{ \min_{j=1,\ldots,m} \|\, f - \mathcal{L}^{(\varphi)}_{n;\,\theta_j}(f)\,\|_p \ \le\ \gamma\, c\, E_{\rho n}(f)_p \right\} \ \ge\ 1 \ -\ \gamma^{-pm}\ ,$$

где $\theta_j \ = \ \tau\eta_j$, $j = 1, \ldots, m$ *и* $\tau = 2\pi/(2N+1)$, *а* c *- константа из (15).*

В главе 2 на основании теорем 1.12 и 1.13 изучается сходимость семейств, порожденных классическими ядрами. Практически во всех известных случаях получены точные ранги сходимости, т. е. найдены совокупности тех p, для которых семейство сходится в L_p. Некоторые результаты исследований в этом направлении представлены в виде следующей ниже таблицы (знак $*$ во второй строке означает свертку). Более полный список СЛПО, для которых получено точное решение проблемы сходимости, и включающий в себя, в частности, случаи ядер Рисса, обобщенных ядер Джексона, Зигмунда, Блэкмана-Хэмминга, приведен в основном тексте работы. Следует отметить, что далеко не всегда преобразование Фурье генератора φ может быть вычислено в явном виде, а задача изучения его асимптотического поведения в целях определения множества $\mathcal{P}_\varphi$ в целом ряде ситуаций оказывается весьма непростой и требует изобретения специальных методов исследования. Таковы, например, ядра Рисса, для которых $\varphi(\xi) = (1 - |\,\xi\,|^\beta)^\alpha_+$. Задачей изучения свойств средних Рисса в метрике L_p при $1 \le p \le +\infty$ занимались многие ученые. В этой связи отметим, например, работы Б. И. Голубова [27] [28]. В второй главе приводятся также некоторые подходы к конструированию новых методов аппроксимации, обладающих наперед заданными свойствами. Отметим также, что в силу утверждений об эквивалентности аппроксимационных ошибок (см. (14)) результаты, полученные для СЛПО, автоматически содержат в себе также и классические теоремы о сходимости средних Фурье и интерполяционных средних, порожденных соответствующими ядрами.

[27] *Golubov B. I.* On Abel-Poisson type and Riesz means // Analysis Math. 1981. Vol. 7. P. 161-184.

[28] *Golubov B. I.* On Gibbs' phenomenon for Riesz spherical means of miltiple Fourier integrals and Fourier series // Analysis Math. 1978. Vol. 4. P. 269-287.

Ядро	d	*Тип*	*Генератор* φ	*Ранг сходимости*
Фейер	1	(G)	$(1-\lvert\xi\rvert)_+$	$(1/2,+\infty]$
Джексон	1	(GR)	$3/2\,(1-\lvert\xi\rvert)_+ * (1-\lvert\xi\rvert)_+$	$(1/4,+\infty]$
Коровкин	1	(GR)	$(1-\lvert\xi\rvert)\cos\pi\xi+(1/\pi)\sin\pi\lvert\xi\rvert$ $(\lvert\xi\rvert\le 1)$	$(1/4,+\infty]$
Валле-Пуссен	1	(G)	$\begin{cases} 1, & \lvert\xi\rvert\le 1 \\ 2-\lvert\xi\rvert, & 1<\lvert\xi\rvert\le 2 \\ 0, & \lvert\xi\rvert>2 \end{cases}$	$(1/2,+\infty]$
Рогозинский	1	(G)	$\cos\dfrac{\pi\xi}{2},\ (\lvert\xi\rvert\le 1)$	$(1/2,+\infty]$
Бохнер-Рисс	≥ 1	(G)	$(1-\lvert\xi\rvert^2)_+^{\alpha},\ \alpha>(d-1)/2$	$\left(\dfrac{2d}{d+2\alpha+1},+\infty\right]$
Чезаро	1	(GR)	$(1-\lvert\xi\rvert)_+^{\alpha}$, **1**) $0\le\alpha\le 1$ **2**) $\alpha>1$	**1**) $(1/(\alpha+1),+\infty]$ **2**) $(1/2,+\infty]$

Глава 3 посвящена изучению неравенств для тригонометрических полиномов. Как известно, такие неравенства играют важную роль в теории приближений. Так, например, классическое неравенство Бернштейна о норме производной тригонометрического полинома служит основой доказательства обратной теоремы теории приближений. В работе рассматривается проблема в ее общем виде. Ее решение представлено в виде необходимых и достаточных условий на генераторы соответствующих дифференциальных операторов. Результаты этого раздела применяются в основном в главе 5 для исследования проблемы о качестве аппроксимации посредством СЛПО. В ряде важных случаев, например, для неравенств, произведенных однородными функциями, удается найти точные ранги значений p, при которых они оказываются справедливыми в соответствующем пространстве L_p. Один из основных результатов представлен следующим утверждением.

Теорема 3.18 *Пусть* $\mu\in H_a$, $\nu\in\mathcal{H}_b$, *где* $a>b>0$, *и функция* $\mu(\xi)/\nu(\xi)$ *не является полиномом на* $\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$. *Тогда неравенство*

$$\|\mathcal{D}(\mu)t\|_p \ \le\ c\,\sigma^{a-b}\|\mathcal{D}(\nu)t\|_p,\ t\in\mathcal{T}_\sigma,\ \sigma\ge 0, \tag{16}$$

выполняется с некоторой положительной константой c, не зависящей от t и σ, тогда и только тогда, когда $p > d/(d + (a - b))$.

Некоторые частные случаи (16) изучались ранее. Так, например, при $d = 1$, $\mu(\xi) = (i\xi)^\alpha = |\,\xi\,|^\alpha \exp((i\pi\alpha \operatorname{sgn} \xi)/2)$, $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ и $\nu(\xi) = 1$, (16) превращается в неравенство типа Бернштейна для дробной производной Вейля, которое исследовалось многими авторами. В случае $1 < p < +\infty$ оно немедленно вытекает из теоремы Марцинкевича о мультипликаторах [29]. Его справедливость в случае $p = 1, +\infty$ показана в книге П. Бутцера и Р. Несселя [4] (с. 427). Случаи $\alpha > 1$, $1/2 < p \le 1$ и $0 < \alpha < 1$, $1/(\alpha+1) < p < 1$ исследованы З. Таберским [30]. Общий случай был рассмотрен Э. С. Белинским и И. Лифляндом [31]. В многомерном случае утверждение теоремы 3.18 для $\mu(\xi) = \xi_j^4$, $j = 1, \ldots, d$, и $\nu(\xi) = -|\,\xi\,|^2$ ($\mathcal{D}(\mu)$ - четвертая частная производная, $\mathcal{D}(\nu)$ - оператор Лапласа), было установлено К. В. Руновским и З. Дитцианом [32]. Оказалось, что это неравенство играет ключевую роль при исследовании свойств сферического дискретного модуля гладкости, введенного З. Дитцианом [11].

В главе 4 изучаются вопросы, связанные с обобщенной гладкостью с точки зрения ее применения в теории приближений. Основные свойства обобщенных K-функционалов и их реализаций устанавливаются в следующих ниже утверждениях.

Теорема 4.11 *Для $1 \le p \le +\infty$ и $\psi \in \mathcal{H}_\alpha$, $\alpha > 0$,*

$$E_\sigma(f)_p \ \le \ cK_\psi(f, 1/(\sigma+1))_p\,, \ f \in L_p\,, \ \sigma \ge 0\,,$$

где c не зависит от f и σ.

Теорема 4.16 *Для $1 \le p \le +\infty$ и $\psi \in \mathcal{H}_\alpha$, $\alpha > 0$,*

$$K_\psi(f,\delta)_p \ \le \ c\,\min(\delta^\alpha, 1) \sum_{\nu < 1/\delta} (\nu+1)^{\alpha-1}\, E_\nu(f)_p\,, \ f \in L_p\,, \ \delta > 0\,,$$

где c не зависит от f и δ.

Теорема 4.19 *Для $\psi \in \mathcal{H}_\alpha$, где $\alpha \ge 1$ при $d = 1$, или $\alpha \ge 2$ при $d \ge 2$*

$$K_\psi(f,\delta)_p \ = \ 0\ , \quad f \in L_p\,, \ \delta \ge 0\,,$$

[29] *Тихомиров В. Н.* Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во Моск. Ун-та, 1976. сс. 178-179

[30] *Taberski R.* Approximation in the Frechet spaces L_p $(0 < p \le 1)$ // Funct. et Approx. 1979. Vol. 7. P. 105-121.

[31] *Belinski E., Lyflyand I.* Approximation properties in L_p, $0 < p < 1$ // Funct. et Approx. 1993. Vol. 22. P. 189-200.

[32] *Ditzian Z., Runovski K.* Realization and smoothness related to the Laplacian // Acta Math. Hungar. 2001. Vol. 93. № 3. P. 189-223.

если $0 < p < 1$.

Теорема 4.21 *Для* $1 \le p \le +\infty$ *и* $\psi \in \mathcal{H}_\alpha$, $\alpha > 0$,

$$\mathcal{K}_\psi(f,\delta)_p \asymp K_\psi(f,\delta)_p \,, \quad f \in L_p \,, \ \delta > 0 \,.$$

Теорема 4.22 *Для* $0 < p \le +\infty$ *и* $\psi \in \mathcal{H}_\alpha$, $\alpha > 0$,

$$\mathcal{K}_\psi(f,t\delta)_p \ \le \ c \max\left(1, t^{\alpha + d(1/\widetilde{p}-1)}\right) \mathcal{K}_\psi(f,\delta)_p \,, \ f \in L_p \,, \ \delta > 0 \,, \ t > 0 \,,$$

где $\widetilde{p} = (1, p)$, *а положительная константа* c *не зависит от* f, δ *и* t.

Теорема 4.25 *Для* $0 < p \le +\infty$ *и* $\psi \in \mathcal{H}_\alpha$, $\alpha > 0$,

$$\mathcal{K}_\psi(f,\delta)_p \ \le \ c \min(\delta^\alpha, 1) \left(\sum_{\nu < 1/\delta} (\nu+1)^{\alpha\widetilde{p}-1} E_\nu(f)_p^{\widetilde{p}} \right)^{1/\widetilde{p}} \,, \ f \in L_p \,, \ \delta > 0 \,,$$

где $\widetilde{p} = \min(1, p)$, *а положительная константа* c *не зависит от* f *и* δ.

Теорема 4.26 *Для* $0 < p \le +\infty$ *и* $\psi_1 \in \mathcal{H}_\alpha$, $\psi_2 \in \mathcal{H}_\beta$ *при* $0 < \alpha < \beta$

$$\mathcal{K}_{\psi_1}(f,\delta)_p \ \le \ c\,\delta^\alpha \left(\int_\delta^{+\infty} \frac{\mathcal{K}_{\psi_2}(f,t)_p^{\widetilde{p}}}{t^{\alpha\widetilde{p}+1}} \, dt \right)^{1/\widetilde{p}} \,, \ f \in L_p \,, \ \delta > 0 \,,$$

где c *не зависит от* f *и* δ.

Приведенные результаты содержат в качестве их частных случаев многие известные утверждения. Так, например, для $d = 1$, $\alpha \in \mathbb{N}$ и $\psi(\xi) = (i\xi)^k$ теоремы 4.11 и 4.16 с учетом теорем об эквивалентности K-функционалов и их реализаций, порожденных обычными производными, модулям гладкости (Ж. Петре для $1 \le p \le +\infty$, З. Дитциан, В. Христов, К. Иванов для $0 < p < 1$ (см. сноску [18]) представляют собой классические прямую (Джексон) и обратную (Бернштейн) теоремы теории приближений (см., например, книгу Р. Девора и Г. Лоренца [3]). В случае $d = 1$, $\alpha = 1$ and $\psi(\xi) = |\,\xi\,|$, соответствующем производной Рисса, теорема 4.11 немедленно вытекает из классической теоремы Алексича-Заманского. В многомерном случае для $\alpha = 2$ и $\psi(\xi) = -|\,\xi\,|^2$, отвечающем оператору Лапласа, теоремы 4.11 и 4.16 могут быть найдены в работах В. Чена и З. Дитциана [33].

[33] *Chen W., Ditzian Z.* Best approximation and K-functionals // Acta Math. Hungar. 1997. Vol. 75. P. 165-208.

В отличие от K-функционалов, зависимость от параметра δ в определении реализаций является значительно более сложной, поэтому теорема 4.22 о вынесении константы имеет технически сложное доказательство и является новой даже для случая классических производных. Ее значение состоит, в частности, в том, что она позволяет оперировать с реализациями по привычным для модулей гладкости и K-функционалов схемам. Отметим, что теорема 4.19 доказана не для всех возможных случаев. Дело в том, что доказательство К. Иванова и В. Христова для классических производных существенно опирается на свойство их локализованности, которое, однако, теряется, например, при переходе к рассмотрению дробных порядков. Наше доказательство основано на идее "привязки" оператора $\mathcal{D}(\psi)$ к локализованным операторам - производной первого порядка в одномерном случае и оператору Лапласа в многомерном. В общем случае доказательство утверждения теоремы 4.19 представляется сложной задачей. Отметим также, что теорема 4.26 является довольно широким обобщением классического неравенства Маршо, которое получается при $\psi_1(\xi) = (i\xi)^\alpha$, $\psi_2(\xi) = (i\xi)^\beta$, α, $\beta \in \mathbb{N}$.

В главе 5 исследуются вопросы качества приближения посредством семейств линейных полиномиальных операторов, при этом отмеченная выше аналогия между их свойствами и свойствами реализаций (эквивалентность классическим величинам в случае $1 \le p \le +\infty$, применимость для всех $0 < p \le +\infty$) носит неслучайный характер. Дело в том, что аппроксимационная ошибка СЛПО оказывается эквивалентной подходящей реализации при некоторых естественных условиях на "близость" функций $1 - \varphi(\xi)$ и $\psi(\xi)$.

Приведем точные формулировки. Пусть v and w - непрерывные на $\mathbb{R}^d$ функции, $0 < q \le +\infty$, функция η бесконечно дифференцируема на $\mathbb{R}^d$ и имеет компактный носитель. Скажем, что $v(\cdot) \overset{(q,\eta)}{\prec} w(\cdot)$, если преобразование Фурье функции $(\eta v)/w$ принадлежит $L_q(\mathbb{R}^d)$. Символ $v(\cdot) \overset{(q,\eta)}{\asymp} w(\cdot)$ используется для обозначения эквивалентности. Это означает, что $v(\cdot) \overset{(q,\eta)}{\prec} w(\cdot)$ и $w(\cdot) \overset{(q,\eta)}{\prec} v(\cdot)$ одновременно. Скажем также, что пара бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем (η, θ) представляет собой *плоское разбиение единицы* (на единичном шаре $D_1 = \{\xi : |\,\xi\,| \le 1\}$), если существует $0 < \rho < 1/2$, такое что $\eta(\xi) = 1$ для $|\,\xi\,| \le \rho$, $\theta(\xi) = 1$ для $2\rho \le |\,\xi\,| \le 1$ и $\eta(\xi) + \theta(\xi) = 1$ для всех $\xi \in D_1$. В следующей ниже теореме $\widetilde{p} = \min(1, p)$ и $r(\varphi) = \sup\{\,|\,\xi\,| : \varphi(\xi) \ne 0\,\} \le 1$, $r = 1$, так что $N = [\sigma]$ (см. формулу (4)).

Теорема 5.3 *Пусть $0 < p \le +\infty$, $\varphi \in \mathcal{K}$, $\varphi(\xi) \ne 1$ для $\xi \ne 0$, $\widehat{\varphi} \in L_{\widetilde{p}}(\mathbb{R}^d)$ и $\psi \in \mathcal{H}_\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$. Если существует плоское разбиение единицы (η, θ) единичного шара и натуральное число m, такие что $1 - \varphi(\cdot) \overset{(\widetilde{p},\eta)}{\asymp} \psi(\cdot)$*

и $(\varphi(\cdot))^m \overset{(\widetilde{p},\theta)}{\prec} 1-\varphi(\cdot)$, *то*

$$\| f - \mathcal{L}^{(\varphi)}_{\sigma;\lambda}(f) \|_{\overline{p}} \asymp \mathcal{K}_{\psi}(f, 1/(\sigma+1))_p\,, \;\; f \in L_p\,, \;\; \sigma \geq 0\,.$$

Применение этого результата к классическим ядрам приводит, например, к следующему утверждению: *аппроксимационные ошибки СЛПО, порожденных ядрами Фейера, Рогозинского и Вохнера-Рисса* ($\alpha > (d-1)/2$) *эквивалентны в метрике* L_p *для* p *из соответствующих рангов их сходимости* (см. таблицу) *реализациям* K*-функционалов, произведенных второй производной и оператором Лапласа, соответственно.*

Принимая во внимание соотношение (14) из теоремы 1.12, теорему 4.21 и утверждения об эквивалентностях K-функционалов, соответствующих классическими производными, тем или иным модулям гладкости, можно получить в качестве простых следствий теоремы 5.3 ряд известных результатов о качестве приближения средними Фурье, порожденных некоторыми классическими ядрами, в метрике пространств L_p при $1 \leq p \leq +\infty$ (см., например, работы Р. Тригуба [17]).

Теорема 5.3 объясняет также феномен, состоящий в том, что аппроксимационные ошибки всех известных средних Фурье оказывается никогда не эквивалентными модулям гладкости нечетных порядков. Дело в том, что в классической теории аппроксимации ядра задаются вещественнозначными четными генераторами, в то время как генератор гладкости $\psi(\xi) = (i\xi)^{2r+1}$, $r \in \mathbb{N}_0$, имеет нечетную мнимую часть, так что одна из функций $(1-\varphi(\xi))/\psi(\xi)$ или $\psi(\xi)/(1-\varphi(\xi))$ будет претерпевать разрыв в точке $\xi = 0$, а ее преобразование Фурье (после умножения на некоторую финитную функцию) не может принадлежать $L_1(\mathbb{R}^d)$. Пользуясь теоремой 5.3 несложно построить СЛПО, аппроксимационная ошибка которого эквивалентна модулю гладкости заданного нечетного порядка. Для $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим

$$\omega_k(f,\delta)_p \; = \sup_{0 \leq h \leq \delta} \| \Delta_h^k f(x) \|_p\,, \;\; \left(\Delta_h^k = \Delta_h(\Delta_h^{k-1})\,,\, \Delta_h f(x) = f(x+h) - f(x) \right)\;,$$

- модуль гладкости k-ого порядка функции f в L_p. Для $r \in \mathbb{N}_0$ введем функцию

$$\varphi_k(\xi) \; = \; (\, 1 \, + \, i\xi^k \,)\, \zeta(\xi)\,, \;\; k = 2r+1\,,$$

где $\zeta(\xi)$ - вещественнозначная бесконечно дифференцируемая четная функция с компактным носителем в $[-1,1]$, которая удовлетворяет условию $\zeta(\xi) = 1$ для $|\,\xi\,| \leq \rho$ при некотором $0 < \rho < 1$. СЛПО, произведенное этим генератором, обозначается символом $\mathcal{L}^{(k)}_{\sigma;\lambda}$.

Теорема 5.10 *Для* $0 < p \leq +\infty$ *и* $r \in \mathbb{N}_0$

$$\| f - \mathcal{L}^{(2r+1)}_{\sigma;\lambda}(f) \|_{\overline{p}} \asymp \omega_{2r+1}(f, 1/(\sigma+1))_p\,, \;\; f \in L_p\,,\, \sigma \geq 0\,.$$

В приложении приводится результат о несправедливости прямой теоремы теории приближений в классах $\varphi(L)$, если функция φ существенно отличается от степенной в окрестности 0 или $+\infty$. Отметим при этом, что обратная же теорема остается верной при достаточно общих условиях на φ [6]. Таким образом, шкалой L_p, $0 < p \leq +\infty$, практически исчерпываются все те пространства, в которых задачи теории приближений могут вызвать тот или иной теоретический или практический интерес.

Пусть $\varphi(\xi)$ - четная непрерывная строго монотонно возрастающая на $[0, +\infty)$ функция, такая что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(2\xi) \leq C_\varphi \varphi(\xi)$, $\xi \geq 0$, для некоторой положительной константы C_φ. Класс Орлича $\varphi(L)$ состоит, по определению, из измеримых 2π-периодичесикх функций $f(x)$ одной переменной, для которых функционал

$$\| f \|_\varphi \; = \; \int_0^{2\pi} \varphi(f(x))\, dx$$

конечен. Ясно, что пространство L_p отвечает функции $\varphi(\xi) = |\, \xi \,|^p$. Модуль непрерывности $f \in \varphi(L)$ и наилучшее приближение тригонометрическими полиномами порядка не выше n определяются соответственно соотношениями

$$\omega(f, \delta)_\varphi \; = \; \sup_{0 \leq h \leq \delta} \| \Delta_h f(x) \|_\varphi \,, \;\; \delta \geq 0 \,,$$

$$E_n(f)_\varphi \; = \; \inf_{t \in \mathcal{T}_n} \| f - t \|_\varphi \,, \;\; n \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Теорема *Если $x^p = O(\varphi(x))$, $x \to +0$, или $\varphi(x) = O(x^p)$, $x \to +\infty$ [34], для каждого $p > 0$, то для каждой сходящейся к 0 последовательности положительных чисел $\{\sigma_n\}_{n=1}^{+\infty}$ и для каждого $C > 0$ существуют константы $f \in \varphi(L)$ и $n \in \mathbb{N}$, такие что*

$$E_n(f)_\varphi \; > \; C\omega(f, \sigma_n)_\varphi \;.$$

Автор выражает благодарность и глубокую признательность своему научному консультанту доктору физико-математических наук, профессору Михаилу Константиновичу Потапову за постоянную поддержку и внимание к работе, а также за плодотворные обсуждения представленных в диссертации результатов и полезные рекомендации.

[34] Как обычно, $f(x) = O(g(x))$, $x \to x_0$, означает, что $|\, f(x) \,| \leq C |\, g(x) \,|$ в некоторой окрестности точки x_0.

СПИСОК ОСНОВНЫХ РАБОТ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

(из официального перечня ВАК)

[1] *Руновский К. В.* О семействах линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сборник. 1993. Т. 184. № 2. С. 33-42.

[2] *Руновский К. В.* О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. сборник. 1994. Т. 185. № 8. С. 81-102.

[3] *Руновский К. В.* Прямая и обратная теоремы теории приближений в пространствах L_p с $0 < p < 1$ // Доклады РАН. 1993. Т. 331. № 6. С. 684-686.

[4] *Runovski K., Rystsov I., Schmeisser H.-J.* Computational aspects of a method of stochastic approximation // Zeitschrift fuer Anal. und Anwend. (ZAA). 2006. Vol. 25. № 3. P. 367-383. (К. В. Руновскому принадлежат теоремы 1 и 2, а также материал секций 3 и 4, введение и секция 5 напмсаны Х.-Ю. Шмайссером, секция 6 написана И. К. Рысцовым, а секция 7 написана совместно И. К. Рысцовым и К. В. Руновским).

[5] *Runovski K., Schmeisser H.-J.* On approximation methods generated by Bochner-Riesz kernels // J. Fourier Anal. and Appl. 2008. Vol. 14. P. 16-38. (К. В. Руновскому принадлежат теоремы 1-3, 5, 7 и 8, теоремы 4 и 6 доказаны Х.-Ю. Шмайссером).

[6] *Burinska Z., Runovski K., Schmeisser H.-J.* On the method of approximation by families of linear polynomial operators // Zeitschrift fuer Anal. und Anwend. (ZAA). 2000. Vol. 19. № 3. P. 677-693 . (К. В. Руновскому принадлежат леммы 2.1, 2.2 и теоремы 4.1-4.3, замечания 2.2, 3.1 и 4.1 сделаны З. В. Буринской, а теоремы 3.1, 3.2 и лемма 3.1 доказаны Х.-Ю. Шмайссером).

[7] *Runovski K., Schmeisser H.-J.* Inequalities of Calderon-Zygmund type for trigonometric polynomials // Georgian J. of Math. 2001. Vol. 8. № 1. P. 165-179. (К. В. Руновскому принадлежат теоремы 2.1 и 3.1, а также идея контрпример в теореме 5.1, Х.-Ю. Шмайссером написано введение и секция 5, включая доказательство теоремы 5.1).

[8] *Runovski K.* On Jackson's type inequalities in Orlicz classes // Revista Mat. Comp. 2001. Vol. 14. № 2. P. 394-404.

[9] *Ditzian Z., Runovski K.* Realization and smoothness related to the Laplacian

// Acta Math. Hungar. 2001. Vol. 93. № 3. P. 189-223. (К. В. Руновскому принадлежат результаты секций 2, 4-7 и теорема 3.2 из секции 3, а З. Дитцианом написаны введение и секции 3, 8, 9).

[10] *Ditzian Z., Runovski K.* Averages and K-functionals related to the Laplacian // J. Approx. Theory. 1999. Vol. 97. P. 113-139. (К. В. Руновскому принадлежат теоремы 2.1 и 2.2, остальные результаты принадлежат З. Дитциану).

[11] *Руновский К. В.* О модулях гладкости тригонометрического полинома в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. заметки. 1993. Т. 54. № 5. С. 78-83.

[12] *Руновский К. В.* О приближении "углом" в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Доклады АН СССР. 1992. Т. 322. № 1. С. 45-47.

[13] *Руновский К. В.* Прямая теорема о приближении "углом" в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Мат. заметки. 1992. Т. 52. № 5. С. 93-96.

[14] *Руновский К. В.* Об одной оценке интегрального модуля гладкости // Изв.вузов. Сер. матем. 1992. № 1. С. 78-80.

[15] *Руновский К. В.* Соотношения между периодическими и непереодическими модулями гладкости // Мат. заметки. 1992. Т. 52. № 2. С. 111-113.

[16] *Руновский К. В.* О приближении алгебраическими многочленами в пространствах L_p, $0 < p < 1$ // Доклады РАН. 1992. Т. 323. № 2. С. 238-240.

[17] *Руновский К. В.* Об одном методе суммирования рядов Фурье-Якоби // УМЖ. 1993. Т. 45. № 5. С. 676-680.

[18] *Руновский К. В.* Обобщение теоремы Марцинкевича-Зигмунда // Мат. заметки. 1995. Т. 57. № 2. С. 259-264.

[19] *Runovski K., Sickel W.* Marcinkiewicz-Zygmund type inequalities, trigonometric interpolation on non-uniform grids and unconditional Schauder basis in Besov spaces on the torus // Zeitschrift fuer Anal. und Anwend. (ZAA). 1997. Vol. 16. № 3. P. 669-687. (К. В. Руновскому принадлежат теоремы 1 и 2, а теоремы 3-6 доказаны В. Зикелем).

[20] *Runovski K. Schmeisser H.-J.* On Marcinkiewicz-Zygmund type inequalities for irregular knots in L_p-spaces, $0 < p \leq +\infty$ // Math. Nachrichten. 1998. Vol. 189. P. 209-220. (К. В. Руновскому принадлежат леммы 3.1 - 3.3 и теоремы 4.1, 4.5, а замечения 4.1 - 4.3 и 5.4 сделаны Х.-Ю. Шмайссером).

(прочие)

[21] *Runovski K.* Approximation by families of linear polynomial operators // В: Труды межд. конф. "Современные проблемы математики, механики и их приложения", посв. 70-летию ректора МГУ акад. В. А. Садовничего (30 марта - 2 апреля 2009г.). С. 107-108.

[22] *Runovski K.* On various methods of trigomnometric approximation // In: 3. Workshop "Orthogonal polynomials", Inzell, 14.-18.04.2000. Schriftreihe des IBB. 2000. Abstract. P. 23-24.

[23] *Lasser R., Runovski K.* General convergence theory for methods of trigonometric approximation // Schriftreihe des IBB. 2003. Preprint 03-12. 51 pages. (секция 1 написана совместно, результаты секций 2-5, 7, 8 принадлежат К. В. Руновскому, в секции 6 К. В. Руновским доказаны леммы 6.1-6.5 и теорема 6.10, а леммы 6.7-6.9 принадлежат Р. Лассеру).

[24] *Runovski K., Schmeisser H.-J.* On the convergence of Fourier means and interpolation means // J. Comp. Anal. and Appl. 2004. Vol. 6. № 3. P. 211-220. (К. В. Руновскому принадлежат леммы 1-5 и теоремы 1-3, 5, 6, а лемма 6 и теорема 4 доказаны Х.-Ю. Шмайссером).

[25] *Runovski K., Schmeisser H.-J.* On some extensions of Bernstein's inequalities for trigonometric polynomials // Funct. et Approx. 2004. Vol. 29. P. 125-142. (К. В. Руновскому принадлежат теоремы 3.1, 3.3, 3.4, 4.1, 4.2, 5.1, 5.2, 5.4. 5.5, а теоремы 5.2 и 5.3 доказаны Х.-Ю. Шмайссером).

[26] *Burinska Z., Runovski K., Schmeisser H.-J.* On the approximation by generalized sampling series in L_p-metrics // Sampling Theory in Signal and Image Processing (STSIP). 2006. Vol. 5. № 1. P. 59-87. (К. В. Руновскому принадлежат леммы 2.1, 3.3, 4.1 и теоремы 2.4, 3.5, 4.2, 4.3, 4.5, 5.2, лемма 3.4 и теорема 5.1 доказаны Х.-Ю. Шмайссером, а теорема 2.2 и утверждения 2.3, 4.4 принадлежат З. В. Буринской).

[27] *Runovski K.* On a direct theorem of approximation theory in Orlicz classes // Forschungsergebnisse FSU Jena. 1994. Preprint. 7 pages.

[28] *Runovski K.* On Jackson's type inequalities in Orlicz classes // Publ. dell'Instituto Analisi Globale e Appl. Firenze. 1998. № 59. Preprint. 8 pages.

[29] *Runovski K., Schmeisser H.-J.* Marcinkiewicz-Zygmund type inequalities for irregular knots and mixed metrics // Вестник Росс. Ун-та дружбы народов. Сер. матем. 1997/98. Т. 4-5. № 1. С. 90-117. (К. В. Руновскому принадлежат леммы 1, 2, 3, 5 и теоремы 1-4, замечания 1-6 и леммы 4, 6 принадлежат Х.-Ю. Шмайссеру).

[30] *Burinska Z., Runovski K.* Homogeneous inequalities for trigonometric polynomials and bandlimited functions // In: 3. Workshop "Orthogonal polynomials", Inzell, 14.-18.04.2000. Schriftreihe des IBB. 2000. Abstract. P. 17. (К. В. Руновскому принадлежит часть I (тригонометрический случай), а результаты части II (непериодический случай) получены З. В. Буринской).

[31] *Burinska Z., Runovski K., Rystsov I., Schmeisser H.-J.* On stochastic-analytical approaches to sociological surveys data processing // Jenaer Schriften zur Math. und Inf. 2006. Math/Inf/17/06. Preprint. 24 pages. (К. В. Руновскому принадлежат результаты секций 1, 4, 5, секция 2 написана З. В. Буринской и И. К. Рысцовым, секция 3 написана З. В. Буринской и Х.-Ю. Шмайссером, а секция 6 - И. К. Рысцовым и Х.-Ю. Шмайссером).

Из совместных работ в диссертацию включены только результаты автора.