Московский Государственный Университет

имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.543.7+512.546.1

Трофимов Антон Владимирович

Нетопологизируемые группы и уравнения над ними

01.01.06 - Математическая логика, алгебра, теория чисел

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва,2010 г.

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Нучный руководитель: кандидат физико-математических наук, доцент Антон Александрович Клячко.

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук, профессор Молдаванский Давид Ионович,

кандидат физико-математических наук, доцент Дерябина Галина Сергеевна.

Ведущая организация: Математический Институт имени В. А. Стеклова РАН.

Защита диссертации состоится 19 марта 2010 года в 16часов 45 мин на заседании диссертационного совета Д501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу : Р.Ф, 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, д. 1 Главне здание МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж)

Автореферат разослан 19 февраля 2010 года.
Ученый секретарь
совета Д501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Диссертация относится к теории групп — одному из основных разделов алгебры. Основные результаты этой работы связанны с исследованием групп, допускающих только дискретные групповые топологии (нетопологизируемые группы) и уравнений над ними.

В 1946 г. А. А. Марковым в работе[1] был поставлен вопрос о существовании а) бесконечных б) счетных нетопологизируемых групп. Имеются ввиду *отделимые* топологии (когда для любых различных точек a и b найдется окрестность точки a не содержащая b). Спрашивается, всякую ли бесконечную (счетную) группу G можно превратить в топологическую группу путем введения на ней некоторой отделимой недискретной топологии? (Понятно, что всякая группа является топологической с дискретной топологией.) В несчетном случае отрицательный ответ был получен в работе Шелаха[2]. В счетном случае отрицательный ответ был получен А. Ю. Ольшанским в статье[3] и позже модифицирован Морисом и Образцовым[4]. Важно отметить, что, пример Ольшанского является факторгруппой по центральной подгруппе группы, построенной Адяном[5] и является периодическим, а пример Мориса Образцова является квазициклическим.

В диссертации представлен пример нетопологизируемой группы[6], которая имеет кручение, но не является периодической, более того, показано, что любая счетная группа может быть вложена в один из таких примеров.

В августе 1984 года в г. Тирасполе на основе материалов семинара по топологической алгебре был выпущен сборник открытых вопросов по топо-

[1]Марков А. А. О безусловно замкнутых множествах // Мат. сб.– 1946.– Т.18, №1.– С. 3–28.

[2]Shelah S. On a problem of Kurosh, Jonsson group and applications // Word problems, II. — Amsterdam: North-Holland, 1980. — P. 373-394.

[3]Замечание о счетной нетопологизируемой группе // Вестн. МГУ: мат., мех.– 1980.– №3.– С. 103.

[4]Nondiscrete topological groups with many discrete subgroups // Topology Appl. – 1998.– V. 84.– pp. 105–120.

[5]Адян С. И. О некоторых группах без кручения // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1971.– Т.35, №3.– С. 459–468.

[6]Трофимов А. В. Теорема вложения в нетопологизируемую группу // Вестн. МГУ: Сер. 1, мат., мех., — 2005. №3. С. 60 — 62.

логической алгебре[7]. В нем был сформулирован список открытых вопросов на два из которых удалось получить ответы.

Вопрос 1.1(А. Д. Тайманов) «Допускает ли недискретную групповую топологию бесконечная группа автоморфизмов произвольной группы?»

Отрицательный ответ на этот вопрос вытекает из теоремы 6.2, в которой приводится пример совершенной группы, допускающей только дискретную групповую топологию.

Вопрос 1.4 (П. И. Кирку) «Всякая ли счетная группа допускает недискретную групповую топологию? (Известные примеры нетопологизируемых счетных групп являются периодическими.)»

Существование группы без кручения, допускающей лишь дискретную групповую топологию, следует из теоремы 5.1 и следствия 5.3 главы 5.

Отметим, что согласно теореме Маркова, дополнение до единицы во всякой счетной нетопологизируемой группе должно разлагаться в объединение множеств решений конечного числа систем уравнений. В известных примерах бесконечных счетных нетопологизируемых групп эти разложения выглядят так:

$$G \setminus \{g_1, \ldots, g_n\} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \{g \in G \mid g^n = g_i\} \tag{1}$$

(пример Ольшанского и модификации Мориса и Образцова),

$$G \setminus \{g_1, \ldots, g_{2n}\} = \{g \in G \mid [g, a]^n = 1\} \quad \text{(примеры из главы 3 диссертации,} \tag{2}$$

$$G \setminus \{1\} = \{g \in G \| [c_1 v([a, g]) c_1^{-1}, v([b, g])] = 1\} \quad \text{(примеры из главы 5 ,} \tag{3}$$

$$\text{где } v(g) \equiv \prod_{j=1}^{h} \left(c_j (g^{-1} a g b)^{(-1)^j n} \right)$$

Здесь g_i и a — некоторые фиксированные элементы соответствующей группы G, а число n в обоих случаях является большим (по меньшей мере 665) и нечетным. Разложение (1) представляется максимально простым.

[7]Нерешенные задачи топологической алгебры. (ред. В.И.Арнаутов, А.В.Архангельский, П.И.Кирку, А.В.Михалев, Ю.Н. Мухин, И.В.Протасов, М.М.Чобан), Кишинев: Штиинца, 1985.

Отметим однако, что уравнение $w(x) = 1$, из примера (3) более замысловатое чем уравнения $x^n = a$ и $[x, a]^n = 1$, фигурирующие в примерах (1) и (2) счетных нетопологизируемых групп. Отметим еще, что пример Ольшанского и его модификации является периодическими (при этом примеры Морриса и Образцова являются квазициклическими); примеры предложенные в дисертации[8] имеют кручение, но периодическими не являются, более того, показано, что любая счетная группа может быть вложена в один из таких примеров, а пример[9] вообще не имеет кручения (здесь a, b, c_j — некоторые элемены группы G).

Естественно задать вопрос, какие значения могут принимать мощность множества решений уравнения в группе и мощность дополнения до этого множества? Из теоремы 5.1 нетрудно вывести такой факт:

Теорема 1 *Для любых двух кардиналов* $\mathbf{s}$ *и* $\mathbf{n}$*, по крайней мере один из которых бесконечен, найдется такая группа* G *(мощности* $\mathbf{s}+\mathbf{n}$*) и такое уравнение* $u(x) = 1$ *над ней, что ровно* $\mathbf{s}$ *элементов группы* G *являются решениями этого уравнения и ровно* $\mathbf{n}$ *элементов группы* G *не являются решениями этого уравнения.*

Замечание 2 *Условие бесконечности одного из кардиналов здесь существенно. Например, нетрудно сообразить, что в группе порядка три число решений никакого уравнения не может быть равно двум.*

Будем говорить, что бесконечная группа G удовлетворяет *почти тождеству*
$w(x_1, \ldots, x_k) = 1$, если для произвольного набора бесконечных подмножеств $X_1, \ldots, X_k$ группы G найдется такой набор элементов $x_1^0 \in X_1, \ldots, x_k^0 \in X_k$ группы G, что $w = w(x_1^0, \ldots, x_k^0) = 1$. Рассмотрим групповое многообразие $V(w)$ с тождеством $w = 1$ и класс групп $\bar{V}(w)$ с почти тождеством.

В работе[10] был сформулирован вопрос: *«Существует ли бесконечная группа* G *и слово* w *такие, что* $G \in V(w^*) \cap \mathcal{F}$ *и* $G \notin V(w) \cap \mathcal{F}$ *?»* (здесь $\mathcal{F}$ — множество бесконечных групп).

Отметим, что аналогичная проблема была рассмотрена в работе[11] Бернарда Нейманн для тождества $w(x_1, x_2) = [x_1, x_2] = 1$. Она доказала, что

[8] Трофимов А. В. Теорема вложения в нетопологизируемую группу // Вестн. МГУ: Сер. 1, мат., мех., — 2005. №3. С. 60 — 62.

[9] Anton A. Klyachko Anton V. Trofimov The number of non-solutions to an equation in a group // Journal of Group Theory 2005 V.8 N. 6 pp 747-754.

[10] P. Longobardi, M. Maj and A. Rhemtulla Infinite groups in a given variety and Ramsey's theorem// Comm. Algebra 20(1) (1992) 127-139

[11] B.H. Neumann A problem of paul Erdös on group // J. Austral. math. Soc. (Series A) 21 (1976), 467 — 472.

почти тождество $[x_1, x_2] = 1$ выполнено в бесконечной группе G тогда и только тогда, когда группа G абелева. Позднее был получен ряд отрицательных ответов для следующих тождеств:

$w = x^m$, $w = [x_1, \dots, x_k]$ Лонгобарди[12],

$w = [x, y]^2$ Лонгобарди в[13],

$w = [x, y, y]$ Спайзиа в[14],

$w = [x, y, y, y]$ Спайзиа в[15],

$w = (xy)^{-3}x^3y^3$ Абдолахи в[16],

$w = x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_k^{a_k}$, где $a_1, \dots, a_k$ — ненулевые целые в Абдолахи и Тьери[17],

$w = (xy)^2(yx)^{-2}$ или $w = [x^m, y]$ где $m \in \{3, 6\} \cup \{2^k \| k \in \mathbb{N}\}$ в Абдолахи и Тьери[18],

$w = [x^n, y][x, y^n]^{-1}$, где $n \in \{\pm 2, 3\}$ Тьери в[19],

$w = [x^m, x^m]$ или $w = (x_1^m \dots x_n^m)^2$ где $m \in \{2^k \| k \in \mathbb{N}\}$ Букарура в[20], и многие другие.

В четвертой главе приведен первый пример тождества $w = w(x_1, \dots, x_l, t)$, для которого $\mathcal{F} \cap V(w^*) \setminus \mathcal{F} \cap V(w) \neq \emptyset$. Запишем это тождество. Пусть $v = v(x_1, \dots, x_l, t) = [v_s, [v_{s-1} \dots [v_2, [v_1, t^{k_0}]^{k_1}]^{k_2} \dots]^{k_{s-1}}]$, правонормированная нильпотентная скоба и
$v_j = v_j(x_1, \dots x_l)$ $j = 1, \dots l$ — некоторые не единичные слова в свободной группе $\mathcal{F}$ с базисом $\{x_1, \dots x_l\}$ минимальной длины и k_j, $j = 0, \dots s$ –

[12] P. Longobardi, M. Maj and A. Rhemtulla Infinite groups in a given variety and Ramsey's theorem// Comm. Algebra 20(1) (1992) 127-139

[13] P. Longobardi, M. Maj A finiteness condition concerning commutators in groups// Houston J. Math 19(4) (1993) 505-512

[14] L.S. Spiezia A property of the variety of 2-Engel groups// Rend. Sem. Math. Univ. Padova 91 (1994) 225 — 228.

[15] L.S. Spiezia A characterization of the third Engel groups// Arch. Math. (Basel) 64 (1995) 369 — 373.

[16] A. Abdollahi A characterization of infinite 3-abelian groups// Arch. Math. (Basel) 73 (1999) 104 — 108.

[17] A. Abdollahi and B. Taeri A condition on finitely generated soluble groups// Comm. Algebra 27(1999) 5633 — 5638.

[18] A. Abdollahi, B. Taeri Some conditions on infinite subsets of infinite groups// Bull. Malaysion Math. Soc. (Ser. 2) 22 (1999) 87 — 93

[19] B. Taeri A combinatorial condition on a ceratin variety of groups// Arch. Math. (Basel) 77 (2001), 456 — 460.

[20] A. Boukaroura A condition on infinite groups for satisfying cerain laws// to appear in Algebra Colloq.

1 некоторые целые числа, отличные от нуля. Тогда тождество — $w = w(x_1, \ldots, x_l, t) = v(x_1, \ldots, x_l, t)^n = 1$ для достаточно большого нечетного n.

Из теоремы 4.10, опубликованной в[21], следует даже более сильное утверждение. Для любых фиксированных элементов $x_1^0, \ldots, x_l^0$ некоторой группы G и произвольного конечного подмножества $Y \subset G$ достаточно большой но конечной мощности m найдется элемент $y \in Y$ такой, что $w(x_1^0, \ldots, x_l^0, y) = 1$.

Поскольку в определении тождества w слова $v_j(x_1, \ldots, x_l)$ и целые ненулевые степени k_j (здесь $j = 0, s{-}1$, $s \in \mathbb{N}$) достаточно произвольные, класс тождеств w достаточно широк.

К примеру в следствии 4.11 показанно, что классы $V(w) \cap \mathcal{F}$ и $V(w^*) \cap \mathcal{F}$ разрешимых (нильпотентных) групп достаточно большой нечетной экспоненты n не совпадают.

Также необходимо отметить, что группы, построенные в четвертой главе являются нетопологизируемыми.

Цель работы

Доказать теорему вложения в нетопологизируемую группу, показать существование нетопологизируемых групп без кручения и совершенных нетопологизируемых групп, привести пример тождества w и группы G таких, что $G \in V(w^*)$, но $G \notin V(w)$.

Методы исследования

В работе используются результаты и методы теории групп.

Научная новизна

Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1) Показано, что произвольная счетная группа может быть изоморфно вложена в нетопологизируемую группу.

2) Представлены примеры тождеств w и групп G таких, что $G \in V(w^*) \cap \mathcal{F}$, но $G \notin V(w) \cap \mathcal{F}$.

[21] Трофимов А. В. Группы, удовлетворяющие тождествам на бесконечных множествах.// Деп. в ВИНИТИ 15.09.09 №561-В2009.

3) Приведен пример счетной нетопологизируемой группы без кручения. Показано также, что для любых двух кардиналов $\mathbf{s}$ и $\mathbf{n}$, по крайней мере один из которых бесконечен, найдется такая группа G (мощности $\mathbf{s} + \mathbf{n}$) и такое уравнение $u(x) = 1$ над ней, что ровно $\mathbf{s}$ элементов группы G являются решениями этого уравнения и ровно $\mathbf{n}$ элементов группы G не являются решениями этого уравнения.

4) Построена группа, группа автоморфизмов которой допускает только дискретную топологию.

Практическая и теоретическая значимость

Работа носит теоретический характер. Результаты диссертации могут быть использованы для решения различных задач теории групп и теории топологических групп.

Апробация результатов

Основные результаты диссертации неоднократно докладывались на семинаре по теории групп на механико-математическом факультете МГУ (2002, 2005, 2006,2007,2009 г.), на научно-исследовательском семинаре кафедры общей топологии и геометрии МГУ(2005, 2007 г.), на международной алгеброической конференции, посвященной 250-летию Московского университета и 75-летию кафедры высшей алгебры (Москва 2004 год).

Публикации

Основные результаты опубликованы в четырех работах, список которых приведен в конце автореферата [1-4].

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, раздела обозначений и описания используемой методики исследования, четырех глав и списка литературы. Полный объем диссертации — 76 страниц, библиография включает 39 наименований.

Краткое содержание работы

Во введении кратко отражена история вопросов освешенных в диссертации, кратко сформулированы основные результаты.

Вторая часть работы содержит основные определения и описание методики исследования.

В третей главе проводится доказательсво теоремы вложения произвольной конечно-порожденной группы в нетопологизируемую группу. Основным результатом является

Теорема 3.1 *Произвольная конечно-порожденная группа H может быть изоморфно вложена в нетопологизируемую конечно-порожденную группу G той же мощности.*

В четвертой главе исследуется вопрос совпадения многообразия бесконечных групп $V(w)$ с тождеством $w(x_1,\dots,x_k)=1$ с классом бесконечных групп $V(w^*)$ со свойством *почти тождества* $w(x_1,\dots,x_k)=1$. Из теоремы 4.1 и следствия вытекает ответ на вопрос 15 Кауровской тетради, принадлежащий П. Лонгобарди, М. Май, А. Ремтулла.

Теорема 4.1 *Для всех достаточно больших m и нечетных n существует группа G такая, что для любого фиксированного элемента $x_0\in G$ и любого подмножества $Y\subset G$ мощности m найдется элемент $y\in Y$, для которого верно равенство $[x_0,y]^n=1$, но тождество $[x_1,x_2]^n=1$ в группе G не выполнено.*

Следствие 4.2 *Классы $V([x,y]^n)\cap\mathcal{F}$ и $\bar V([x,y]^n)\cap\mathcal{F}$ групп не совпадают (здесь $\mathcal{F}$ множество бесконечных групп).*

Также в теореме 4.10 приведен ряд более сложных тождеств w для которых $V(w^*)\cap\mathcal{F}\setminus V(w^*)\cap\mathcal{F}\neq\emptyset$. Среди них тождества разрешимых (нильпотентных) большой нечетной экспоненты n многообразий.

Основным результатом **пятой главы** стала теорема

Теорема 5.1 *Существует такая конечно порожденная группа без кручения H и такое уравнение $w(x)=1$ (где $w(x)\in H*\langle x\rangle_\infty$) над ней, что решениями этого уравнения являются все элементы группы H, кроме одного:*

$$\{h\in H\mid w(h)\neq 1\}=1. \tag{4}$$

из которой следует существование нетопологизируеммой группы без кручения

Следствие 5.3 *Существует нетривиальная счетная нетопологизируемая группа без кручения.*

и терема о количесве решений уравнений над бесконечной группой

Теорема 5.4 *Для любых двух кардиналов* $\mathbf{s}$ *и* $\mathbf{n}$*, по крайней мере один из которых бесконечен, найдется такая группа* G *(мощности* $\mathbf{s}+\mathbf{n}$*) и такое уравнение* $u(x)=1$ *над ней, что ровно* $\mathbf{s}$ *элементов группы* G *являются решениями этого уравнения и ровно* $\mathbf{n}$ *элементов группы* G *не являются решениями этого уравнения.*

В шестой главе исследуется вопрос А. Д. Тайманов о допустимости недискретной топологии на группе автоморофизмов произвольной группы. Основными результатами являются следующие утверждения

Теорема 6.2

Существует такая конечно порожденная бесконечная совершенная группа H *и такое уравнение* $w(x)=1$ *(где* $w(x)\in H*\langle x\rangle_\infty$*) над ней, что решениями этого уравнения являются все элементы группы* H*, кроме одного:*

$$\{h\in H \mid w(h)\neq 1\}=\{1\}. \tag{5}$$

Следствие 6.3 *Существует счетная бесконечная совершенная нетопологизируемая группа.*

Благодарности. Автор выражает благодарнсть своему научному руководителю кандидату физико-математических наук, доценту Антону Александровичу Клячко за постановку задач, ценные советы и многочисленные плодотворные обсуждения.

Работы автора по теме диссертации

[1] Трофимов А. В. Теорема вложения в нетопологизируемую группу // Вестн. МГУ: Сер. 1, мат., мех., — 2005. №3. С. 60 — 62.
[2] Трофимов А. В. Совершенная нетопологизируемая группа// Вестн. МГУ. Сер. 1. Мат., Мех. 2007. №1. С 7 — 13.
[3] Трофимов А. В. Группы, удовлетворяющие тождествам на бесконечных множествах.// Деп. в ВИНИТИ 15.09.09, №561-В2009.
[4] Anton A. Klyachko Anton V. Trofimov The number of non-solutions to an equation in a group // Journal of Group Theory 2005 V.8 N. 6 pp 747-754.