МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО–МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

на правах рукописи

Королева Юлия Олеговна

УДК 517.956.4

ОБ АСИМПТОТИКЕ И ТОЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОЦЕНКАХ РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ В ОБЛАСТЯХ, ПЕРФОРИРОВАННЫХ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ

01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2010

Работа выполнена на кафедре дифференциальных уравнений Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Чечкин Григорий Александрович
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Филиновский Алексей Владиславович
	кандидат физико-математических наук Пятницкий Андрей Львович
Ведущая организация:	Владимирский Государственный Гуманитарный Университет

Защита состоится 09 апреля 2010 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В.Ломоносова по адресу 119991, РФ, ГСП-1, Москва, Ленинские Горы, МГУ имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 16–24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 9 марта 2010 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ
доктор физико-математических
наук, профессор И.Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Задачи усреднения с мелкомасштабной структурой около границы рассматривались разными авторами. Такие модели включают в себя задачи в областях с быстро осциллирующей границей, задачи в областях с концентрированными массами, расположенными около границы, задачи с быстрой сменой типа краевых условий на фиксированной и мелкозернистой границе, в частности, в областях, перфорированных вдоль границы, и др. (см. монографии В. А. Марченко и Е. Я. Хруслова[1], А. Л. Пятницкого, Г. А. Чечкина и А. С. Шамаева[2] и список литературы в них). Изучение свойств таких задач является важным для многих приложений.

В диссертационной работе получены результаты о решениях краевых задач в областях с микронеоднородностями около границы. Эти результаты применяются для исследования асимптотики по малому параметру константы в неравенстве Фридрихса для областей с микронеоднородностями. Классическое неравенство Фридрихса было доказано К. Фридрихсом ещё в 1927 г.[3] для случая, когда функция имеет нулевой след на границе области. После этого было получено достаточно много обобщений этого неравенства на случай, когда функция обращается в ноль на подмножестве границы, см. монографию В. Г. Мазьи[4] Однако, в доказанных теоремах константа в неравенстве Фридрихса выражена в терминах ёмкости, подсчет которой является нетривиальной задачей в случае областей с перфорацией сложной микроструктуры. В настоящей диссертационной работе получены достаточно тонкие результаты о зависимости константы в неравенстве Фридрихса от характерного размера микронеоднородности области для широкого круга перфорированных областей.

---

[1] *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974.

[2] *Пятницкий А. Л., Чечкин Г. А., Шамаев А. С.* Усреднение. Методы и приложения. Белая серия в математике и физике. Новосибирск: Изд-во “Тамара Рожковская”. 2007.

[3] *Friedrichs K.* Spectraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spectralzlegung von Differentialoperatoren. I, II. // Math. Anal. 1934. V. 109. P. 463–487, 685–713.

[4] *Мазья В. Г.* Пространства С.Л. Соболева. Изд. Ленингр. Унив., Ленинград, 1985.

Неравенства типа Фридрихса широко используются при доказательствах теорем вложений, а также при получении равномерных оценок семейств решений граничных задач с параметром.

Цель работы. Целью работы является исследование асимптотических свойств решений краевых задач в областях с микронеоднородностью около границы, а также исследование зависимости константы в неравенстве Фридрихса от малого параметра, характеризующего размер и период микронеоднородности, для функций из соответствующих соболевских классов.

Целью работы является также построение точных асимптотических формул для констант в неравенствах типа Фридрихса в областях с микронеоднородностью.

Методика исследования. В работе широко применяются как методы теории функциональго анализа, так и методы теории дифференциальных уравнений в частных производных. В частности, используются методы спектрального анализа дифференциальных операторов, интегральных оценок, методы теории усреднения, метод согласования асимптотических разложений.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми и получены автором самостоятельно. Основные из них следующие:

- Получена точная асимптотика константы в неравенстве Фридрихса в фиксированных областях с микронеоднородностями около границы, зависящими от малого параметра
- Доказана справедливость неравенства типа Фридрихса для функций из соболевского класса H^1, имеющих нулевой след на малых множествах, образующих непериодическую перфорацию области около границы, и показана близость константы в неравенстве к константе из классического неравенства Фридрихса
- Получена точная асимптотика константы для неравенства Фридрихса по малому параметру, характеризующему размер микронеоднородности, в случае двумерной области, периодически перфорированной вдоль границы.

Теоретическая и практическая значимость. Предлагаемая работа носит теоретический характер. Результаты работы могут быть полезны специалистам, работающим в области дифференциальных уравнений с частными производными и функциональго анализа. В частности, полученные в диссертации результаты вносят существенный вклад в теорию интегральных неравенств и в теорию вложения соболевских пространств.

Апробация работы. Результаты диссертации неоднократно докладывались и обсуждались на заседаниях научного семинара "Теория усреднения" под руководством д.ф.-м.н. Г.А.Чечкина (механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова) в 2003–2010 г.

Результаты диссертации докладывались также на следующих научных конференциях:

- Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная памяти И.Г. Петровского, Москва, МГУ, 2007;
- Всероссийская конференция молодых ученых, Москва, МГУ, 2008;
- Международная конференция "Analysis, Inequalities and Homogenization Theory" Midnight sun conference in honor of Lars-Erik Persson, June 8-11 2009, Luleå, Sweden.

Работа поддержана грантом РФФИ № 09-01-00353-а (руководитель Г.А.Чечкин), и грантами Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-1698.2008.1, НШ-7392.2010.1, НШ-7387.2010.1, НШ-7429.2010.1.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 6 работах, список которых приводится в конце автореферата [1—6].

Структура и объем работы. Диссертация занимает 100 страниц текста и состоит из введения, двух глав, разбитых на пять параграфов, и списка литературы, включающего 97 наименований. Нумерация формул, теорем и лемм тройная — номер главы, номер параграфа и собственный номер, например, лемма 3.2.1 — лемма 1 второго параграфа третьей главы.

Основное содержание работы.

Первая глава. Первая глава посвящена краевым задачам в фиксированных областях, зависящих от малого параметра, с микронеоднородностями около границы и задачам в областях, перфорированных вдоль границы. Исследуется зависимость константы в неравенстве Фридрихса от малого параметра, характеризующего размер микронеоднородности.

Всюду далее используются следующие обозначения: $\overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$ – множество функций из $H^1(\Omega)$, имеющих нулевой след на $\partial\Omega$; $H^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$ – множество функций из $H^1(\Omega)$ с нулевым следом на Γ_ε, где множество $\Gamma_\varepsilon \subset \partial\Omega$ зависит от малого параметра, характеризующего микронеоднородную структуру области.

В **первом параграфе** рассматривается задача с микронеоднородностью около границы. Предполагается, что краевые условия быстро меняются на фиксированной границе. А именно, рассматривается область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с достаточно гладкой границей длины 1, такая, что

$$\partial\Omega = \overline{\Gamma_1^\varepsilon} \cup \Gamma_2^\varepsilon, \;\; \Gamma_1^\varepsilon = \bigcup_i (\Gamma_{1i}^\varepsilon), \;\; \Gamma_2^\varepsilon = \bigcup_i (\Gamma_{2i}^\varepsilon), \;\; \Gamma_{1i}^\varepsilon \cap \Gamma_{2j}^\varepsilon = \varnothing,$$
$$mes\ \Gamma_{1i}^\varepsilon = \varepsilon\delta(\varepsilon), \quad mes\ \ (\Gamma_{1i}^\varepsilon \cup \Gamma_{2i}^\varepsilon) = \delta(\varepsilon),$$
$$\delta(\varepsilon) = o\left(\frac{1}{|\ln \varepsilon|}\right) \quad \text{при} \;\; \varepsilon \to 0,$$

где куски Γ_{1i}^ε и Γ_{2i}^ε чередуются (см. рис. 1).

Здесь в качестве $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_1^\varepsilon$. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1 (1.1.1). *Пусть $n = 2$. Тогда для $u \in H^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$ справедливо следующее неравенство Фридрихса:*

$$\int\limits_\Omega u^2\,dx \le K_\varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx, \qquad K_\varepsilon = K_0 + \varphi(\varepsilon),$$

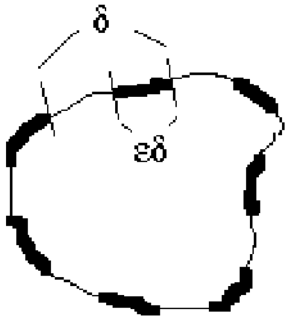

Рис. 1: Двумерная область

где K_0 *– постоянная в классическом неравенстве типа Фридрихса, справедливом для всех* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, *а*

$$\varphi(\varepsilon) \sim (|\ln \varepsilon|)^{-\frac{1}{2}} + (\delta(\varepsilon)\,|\ln \varepsilon|)^{\frac{1}{2}}$$

при $\varepsilon \to 0$.

Кроме того, в данном параграфе рассмотрена аналогичная геометрическая конструкция в случае $n \geq 3$. Мы предполагаем, что $\partial\Omega = \overline{S} \cup \Gamma$, $S \cap \Gamma = \varnothing$, Γ принадлежит гиперплоскости $x_n = 0$ и функция u обращается в ноль на малых периодически распределенных по Γ пятнах размера $\varepsilon\delta(\varepsilon)$. Здесь мы предполагаем, что $\delta(\varepsilon) = o(\varepsilon^{n-2})$ при $\varepsilon \to 0$.

Для соответствующего класса $H^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$ установлена справедливость следующего неравенства типа Фридрихса.

Теорема 2 (1.1.2). *Пусть* $n \geq 3$. *Тогда для* $u \in H^1(\Omega, \Gamma_1^\varepsilon \cup S)$ *справедливо следующее неравенство типа Фридрихса:*

$$\int\limits_\Omega u^2\,dx \leq K_\varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla u|^2\,dx, \qquad K_\varepsilon = K_0 + \varphi(\varepsilon),$$

где K_0 *— константа в классическом неравенстве Фридрихса, справедливом для* $u \in \overset{\circ}{H}{}^1(\Omega)$, *а*

$$\varphi(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\frac{n}{2}-1} + \left(\delta(\varepsilon)\varepsilon^{2-n}\right)^{\frac{1}{2}}$$

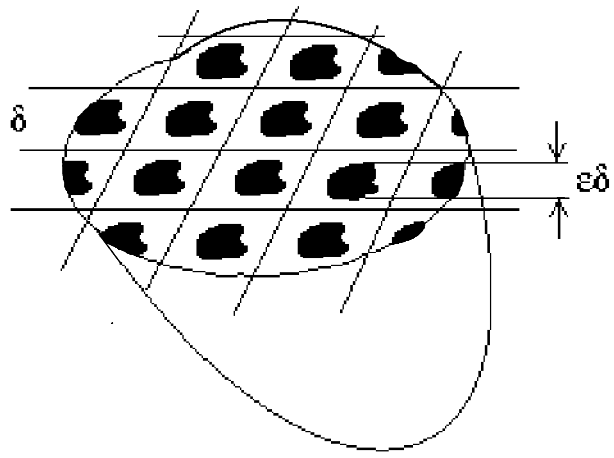

Рис. 2: Многомерная область

при $\varepsilon \to 0$.

В качестве примера в первом параграфе приведена формула для константы в неравенстве Фридрихса для кругового диска.

Во **втором параграфе** доказаны теоремы усреднения для задачи в двумерной области с периодической перфорацией вдоль границы.

Опишем подробнее геометрию области. Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^2$, лежащая в верхней полуплоскости, граница которой Γ является кусочно-гладкой и состоит из нескольких частей: $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, где Γ_4 — отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ на оси абсцисс, Γ_2 и Γ_3 принадлежат прямым $x_1 = -\frac{1}{2}$ и $x_1 = \frac{1}{2}$ соответственно, $\Gamma \backslash \Gamma_4$ — гладкая. Всюду далее $\varepsilon = \frac{1}{2\mathcal{N}+1}$ — малый параметр, $\mathcal{N}$ — натуральное число, $\mathcal{N} \gg 1$.

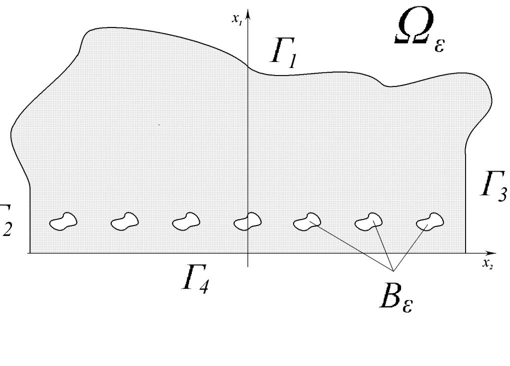

Рис. 3: Структура области Ω_ε.

Будем также использовать следующие обозначения. Пусть B —

произвольная двумерная область с гладкой границей, лежащая в круге

$$K = \{\xi : \xi_1^2 + (\xi_2 - \frac{1}{2})^2 < a^2\}, \qquad 0 < a < \frac{1}{2}.$$

Пусть, кроме того,

$$B_\varepsilon^j = \{x \in \Omega : \varepsilon^{-1}(x_1 - j, x_2) \in B\},\ j \in \mathbb{Z},\ B_\varepsilon = \bigcup_j B_\varepsilon^j,\ \Gamma_\varepsilon = \partial B_\varepsilon.$$

Определим область Ω_ε как $\Omega \setminus \overline{B_\varepsilon}$ (см. рис. 3). Основными результатами данного параграфа являются следующие утверждения.

Теорема 3 (1.2.1). *Пусть $f \in L_2(\Omega)$, Q — произвольный компакт на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, не содержащий собственных значений спектральной задачи*

$$\begin{cases} -\Delta u_0 = \lambda_0 u_0 & \text{в } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{на } \Gamma_4, \\ \frac{\partial u_0}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Gamma \setminus \overline{\Gamma}_4. \end{cases} \tag{1}$$

Тогда:

1) существует число $\varepsilon_0 > 0$ такое, что при любом $\varepsilon < \varepsilon_0$ и любом $\lambda \in Q$ решение краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta U_\varepsilon = \lambda U_\varepsilon + f & \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ U_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial U_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Gamma. \end{cases} \tag{2}$$

существует и единственно, а также справедлива равномерная по ε и λ оценка

$$\|U_\varepsilon\|_1 \le C \|f\|_0, \tag{3}$$

где $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_0$ соответственно нормы в пространствах $H^1(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$.

2) для решения краевой задачи (2) *имеет место сходимость*

$$\|U_\varepsilon - U_0\|_1 \to 0 \text{ при } \varepsilon \to 0, \tag{4}$$

где U_0 — решение предельной (усреднённой) краевой задачи

$$\begin{cases} -\Delta U_0 = \lambda U_0 + f & \text{в } \Omega, \\ U_0 = 0 & \text{на } \Gamma_4, \\ \frac{\partial U_0}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Gamma \setminus \overline{\Gamma}_4. \end{cases} \tag{5}$$

Теорема 4 (1.2.2). *Пусть λ_0 — собственное значение кратности N предельной спектральной задачи* (1). *Тогда:*

1) к собственному значению λ_0 сходится N собственных значений (с учётом совокупной кратности) возмущённой спектральной задачи

$$\begin{cases} -\Delta_\varepsilon u_\varepsilon = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon & \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{на } \Gamma_\varepsilon, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{на } \Gamma; \end{cases} \tag{6}$$

2) если $\lambda_{\varepsilon,1}, \dots, \lambda_{\varepsilon,N}$ — собственные значения задачи (6), *которые сходятся к λ_0, а $u_{\varepsilon,1}, \dots, u_{\varepsilon,N}$ — соответствующие собственные функции, ортонормированные в $L_2(\Omega)$, то для любой последовательности $\varepsilon_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ существует подпоследовательность $\varepsilon_{k'} \to 0$, такая что при $\varepsilon = \varepsilon_{k'} \to 0$ верна сходимость*

$$\|u_{\varepsilon,j} - u_{0,j}\|_1 \to 0,$$

где $u_{0,1}, \dots, u_{0,N}$ — собственные функции спектральной задачи (1), *соответствующие λ_0, ортонормированные в $L_2(\Omega)$.*

Чтобы применить стандартные методы доказательства теорем усреднения для различных типов сингулярных возмущений, см., например,[5][6][7] к конкретной рассматриваемой нами задаче, в работе доказана следующая лемма.

[5] *Бикметов А. Р.* Асимптотика собственных элементов граничных задач для оператора Шрёдингера с большим потенциалом, локализованном на малом множестве. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 4. С. 667–682.

[6] *Гадыльшин Р. Р.* Метод согласования асимптотических разложений в сингулярно возмущенной краевой задаче для оператора Лапласа. // Итоги науки и техники. Совр. матем. и ее прилож. Тематические обзоры. 2003. Т. 5. С 3-32.

[7] *Чечкин Г. А.* Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций эллиптического оператора в области с большим количеством близко расположенных на границе "лёгких" концентрированных масс. Двумерный случай. // Известия РАН. Серия математическая. 2005. Т. 69. № 4. С. 161–204.

Лемма 1 (1.2.1). *Пусть $v_\varepsilon \in H^1(\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon)$ и $v_\varepsilon \rightharpoonup v^*$ при $\varepsilon \to 0$ слабо в $H^1(\Omega)$. Тогда $v^* \in H^1(\Omega, \Gamma_4)$.*

Кроме того, стандартными методами выведена оценка решения в окрестности собственного значения, которая в дальнейшем будет использована для обоснования асимптотического разложения первого собственного значения.

Лемма 2 (1.2.5). *Пусть λ_0 – собственное значение краевой задачи Дирихле* (1) *кратности N:*

$$\lambda_0 = \lambda_0^{p+1} = \ldots = \lambda_0^{p+N} < \lambda_0^{p+1+N}.$$

Тогда при λ, близких к λ_0, для решений краевой задачи (2) имеет место оценка

$$\|U_\varepsilon\|_1 \leq C \sum_{j=1}^{N} \frac{\|f\|_0}{\left|\lambda_\varepsilon^{p+j} - \lambda\right|},$$

где $\lambda_\varepsilon^{p+j}, \ldots, \lambda_\varepsilon^{p+N}$ — собственные значения задачи (6)*, сходящиеся к λ_0.*

Если, к тому же, решение U_ε ортогонально в $L_2(\Omega)$ собственной функции u_ε^{p+i} задачи (6)*, соответствующей $\lambda_\varepsilon^{i+p}$, то имеет место оценка*

$$\|U_\varepsilon\|_1 \leq C \sum_{j=1, j\neq i}^{N} \frac{\|f\|_0}{\left|\lambda_\varepsilon^{p+j} - \lambda\right|}.$$

Третий параграф обобщает результаты, полученные во втором параграфе, на случай непериодически перфорированных вдоль границы как плоских, так и многомерных областей. В частности, доказаны теоремы усреднения, выведено неравенство типа Фридрихса для функций из соболевского класса $H^1(\Omega)$, имеющих нулевой след на малых непериодически распределенных множествах, образующих перфорацию вдоль границы. Кроме того, с использованием теорем усреднения показана близость константы в полученном неравенстве к константе из классического неравенства Фридрихса.

Вторая глава. Во второй главе строится и строго обосновывается двучленная асимптотика первого собственного значения спектральной задачи (6), из которой получается оценка на скорость сходимости констант в неравенстве Фридрихса.

В **первом параграфе второй главы** построена двучленная асимптотика по параметру ε собственного значения λ^ε спектральной задачи (6).

Итак, пусть $\Omega_\varepsilon, \Gamma_\varepsilon$ – множества, определенные во втором параграфе первой главы. Кроме того, от множества B потребуем симметричности относительно оси ординат. Основным содержанием первого параграфа второй главы является доказательство следующей теоремы, которое опирается на Теоремы 3, 4 и Леммы 1, 2.

Теорема 5 (2.1.1). *Пусть* λ_0 *— простое собственное значение задачи* (1). *Тогда асимптотика собственного значения* λ^ε, *сходящегося к* λ_0 *при* $\varepsilon \to 0$, *имеет вид*

$$\lambda^\varepsilon = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + o(\varepsilon^{\frac{3}{2}-\mu}) \tag{7}$$

для любого $\mu,\ 0 < \mu < \frac{1}{2}$, *где*

$$\lambda_1 = -C(B) \int\limits_{\Gamma_4} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \nu}\right)^2 ds < 0, \tag{8}$$

а $C(B)$ *– положительная постоянная, зависящая от множества* B.

Замечание 1. *Из построенных асимптотик* (*формулы* (7) *и* (8)) *следует неравенство*

$$\lambda^\varepsilon < \lambda_0, \tag{9}$$

которое из вариационных соображений не очевидно.

Во **втором параграфе второй главы** мы применяем доказанные нами теоремы усреднения, вариационный принцип и построеннную асимптотику (7) для оценки разности констант в неравенстве Фридрихса. Основным результатом данного параграфа является следующая теорема.

Теорема 6 (2.2.1). *Для функции* $u_\varepsilon \in H^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon)$ *справедливо неравенство типа Фридрихса*

$$\int\limits_\Omega u_\varepsilon^2\, dx\, dy \le \mathcal{M}_\varepsilon \int\limits_\Omega |\nabla u_\varepsilon|^2\, dx\, dy,$$

где
$$\mathcal{M}_\varepsilon = \frac{1}{\lambda_0} + \varepsilon\frac{\lambda_1}{\lambda_0^2} + o\left(\varepsilon^{\frac{3}{2}-\mu}\right), 0 < \mu < \frac{1}{2}.$$

Благодарность.
Автор выражает самую искреннюю благодарность своему учителю доктору физико-математических наук Григорию Александровичу Чечкину за постановку задач и их многочисленные плодотворные обсуждения.

Основные публикации автора по теме диссертации

1. *Королева Ю. О.* О неравенстве Фридрихса в трехмерной области, непериодически перфорированной вдоль части границы. // Успехи мат. наук. 2010. Т. 65. № 2. С. 181–182.

2. *Гадыльшин Р. Р., Королева Ю. О., Чечкин Г. А.* О собственном значении лапласиана в области, перфорированной вдоль границы. // Доклады РАН. 2010. Т. 432. № 1. С. 1–5.

   (Гадыльшин Р.Р. - обоснование асимптотического разложения собственного значения; Королева Ю.О. - построение асимптотического разложения и доказательства вспомогательных лемм; Чечкин Г.А. - построение вспомогательных задач и леммы, связанные с ними)

3. *Chechkin G. A., Koroleva Yu. O. and Persson L.-E.* On the precise asymptotics of the constant in the Friedrich's inequality for functions, vanishing on the part of the boundary with microinhomogeneous structure. // J. Inequal. Appl. 2007. Article ID 34138, 13 pages, 2007.

   (Chechkin G.A. - теорема о скорости сходимости собственных значений вспомогательных спектральных задач; Koroleva Yu.O. - теоремы об асимптотиках констант в неравенствах Фридрихса; Persson L.-E. - введение)

4. *Chechkin G. A., Koroleva Yu. O., Meidell A. and Persson L.-E.* On the Friedrichs inequality in a domain perforated nonperiodically along

the boundary. Homogenization procedure. Asymptotics in parabolic problems. // Russ. J. Math. Phys. 2009. V. 16 № 1. P. 1–16.

(Chechkin G.A. - теорема о сходимости собственных элементов вспомогательных спектральных задач; Koroleva Yu.O. - лемма о слабой сходимости и теорема о сходимости констант в неравенствах Фридрихса; Meidell A. - аналогичные результаты для параболического случая; Persson L.-E. - введение)

5. *Королева Ю. О.* О константе в неравенстве Фридрихса. // В: *Сборнике тезисов международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы" посвященной юбилею И. Г. Петровского (XXII Совместное заседание семинара им. Петровского и Московского Мат. Общества* (Россия, Москва, 2007, 21–26 Мая). М.: Изд. МГУ им. М.В. Ломоносова. 2007. С. 153–154.

6. *Koroleva Yu. O.* On the Friedrichs inequality in a cube perforated periodically along the part of the boundary. Homogenization procedure. // Research Report, №2, Department of Mathematics, Luleå University of Technology, (34 pages), 2009.