МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

На правах рукописи
УДК 515.14

Гугнин Дмитрий Владимирович

АЛГЕБРО-ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ РАЗВЕТВЛЕННЫХ НАКРЫТИЙ И n-ЗНАЧНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГРУПП

Специальность 01.01.04 — геометрия и топология

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2010

Работа выполнена на кафедре высшей геометрии и топологии Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Научный руководитель:	член-корреспондент РАН, профессор Бухштабер Виктор Матвеевич
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Смирнов Владимир Алексеевич
	кандидат физико-математических наук, доцент Аржанцев Иван Владимирович
Ведущая организация:	Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 23 апреля 2010 года в 16 час. 45 мин. на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ имени М. В. Ломоносова, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 23 марта 2010 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы.

Диссертация посвящена развитию алгебраической теории градуированных n-гомоморфизмов Фробениуса и ее приложениям к теории разветвленных накрытий и теории n-значных топологических групп. Разветвленные накрытия представляют собой важный класс отображений пространств и, в первую очередь, многообразий. Такие отображения естественно возникают в топологии, комплексном анализе, алгебраической геометрии и теории особенностей.

В работах Фробениуса[1,2] 1896 года были введены высшие характеры конечных групп при помощи специальной рекурсии. В работах В.М. Бухштабера и Э.Г.Риса[3,4] было введено понятие n-гомоморфизмов алгебр и показано, что они полностью определяются рекурсией, аналогичной рекурсии Фробениуса; поэтому эти отображения были названы n-гомоморфизмами Фробениуса. Теория была развита в[3,4,5,6,7].

Введение n-гомоморфизмов алгебр было мотивировано теорией n-значных топологических групп. В классических работах Хопфа было показано, что топологическое пространство X, обладающее умножением с единицей, имеет в своем кольце когомологий специальную алгебраическую структуру, задаваемую кольцевым гомоморфизмом $\Delta : H^*(X) \to H^*(X) \otimes H^*(X)$. Это положило начало знаменитой теперь теории алгебр Хопфа. Например, отсутствие структуры алгебры Хопфа в когомологиях пространства X является препятствием к введению на нем структуры топологической группы.

Понятие n-значных формальных групп было введено в работе В.М.Бухштабера и С.П.Новикова[8] в 1971 году. Затем В.М.Бухштабером

---

[1] G. Frobenius, *Über Gruppencharaktere*, Sitzungber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin **1896**, 985-1021.

[2] G. Frobenius, *Über die Primfaktoren der Gruppendeterminante*, Sitzungber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin **1896**, 1343-1382.

[3] В.М. Бухштабер, Э.Г. Рис, *Многозначные группы и n-алгебры Хопфа*, Успехи мат. наук **51:4** (1996), 149-150.

[4] V.M. Buchstaber, E.G. Rees, *Multivalued groups, their representations and Hopf algebras*, Transform. Groups **2:4** (1997), 325-349.

[5] V.M. Buchstaber, E.G. Rees, *The Gelfand map and symmetric products*, Selecta Math. (N.S.) **8:4** (2002), 523-535.

[6] В.М. Бухштабер, Э.Г. Рис, *Кольца непрерывных функций, симметрические произведения и алгебры Фробениуса*, Успехи мат. наук **59:1** (2004), 125-144.

[7] V.M. Buchstaber, E.G. Rees, *Frobenius n-homomorphisms, transfers and branched coverings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **144:1** (2008), 1-12.

[8] В.М. Бухштабер, С.П. Новиков, *Формальные группы, степенные системы и операторы Адамса*, Матем. сб. **84:1** (1971), 81-118.

была развита теория n-значных формальных групп и ее топологических приложений. В его работе[9] 1990 года была открыта важная структура 2-значной алгебраической группы на сфере S^2. Это положило начало топологической теории n-значных групп, которая была развита в работах В.М.Бухштабера и Э.Г.Риса[3,4,10], а также в работах А.М.Вершика, А.П.Веселова, А.А.Гайфуллина, С.А.Евдокимова, Т.Е.Панова, И.Н.Пономаренко, А.Н.Холодова и П.В.Ягодовского (см. подробный обзор на эту тему[11]). Теория n-значных групп, их представлений и действий, нашла приложения в теории динамических систем[12,13].

В работе[4] было показано, что, если связное топологическое пространство X обладает структурой n-значной топологической группы и имеет нулевые нечетномерные рациональные когомологии, $H^{odd}(X;\mathbb{Q}) = 0$, то в его алгебре четномерных когомологий $H^{even}(X;\mathbb{Q})$ существует специальная структура, названная структурой n-алгебры Хопфа. Эта структура задается n-гомоморфизмом $\Delta : H^{even}(X;\mathbb{Q}) \to H^{even}(X;\mathbb{Q}) \otimes H^{even}(X;\mathbb{Q})$.

В данной работе понятие n-алгебры Хопфа обобщено на случай произвольных связных коммутативных градуированных алгебр A^*, и доказано, что отсутствие структуры n-алгебры Хопфа в алгебре рациональных когомологий $H^*(X;\mathbb{Q})$ связного топологического пространства X является препятствием к введению на X структуры n-значной топологической группы. Также рассмотрено несколько структур, близких к структуре n-алгебры Хопфа. Доказано, что отсутствие структуры n-предалгебры Хопфа (самой слабой из рассмотренных) в алгебре рациональных когомологий $H^*(X;\mathbb{Q})$ связного топологического пространства X является препятствием к введению на X структуры n-значного умножения с единицей.

Второе приложение градуированных n-гомоморфизмов, рассматриваемое в диссертации, касается широкого класса разветвленных накрытий топологических пространств, так называемых разветвленных накрытий по Дольду-Смиту. Разветвленные накрытия данного типа были введены

[9]В.М. Бухштабер, *Функциональные уравнения, ассоциированные с теоремами сложения для эллиптических функций, и двузначные алгебраические группы*, Успехи мат. наук **45:3** (1990), 185-186.

[10]V.M. Buchstaber, E.G. Rees, *Multivalued groups, n-Hopf algebras and n-ring homomorphisms*, Lie groups and Lie algebras, Math. Appl., Vol. 433, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1998, 85-107.

[11]V.M. Buchstaber, *n-Valued Groups: Theory and Applications*, Moscow Math. J. **6:1** (2006), 57-84.

[12]V.M. Buchstaber, A.P. Veselov, *Integrable correspondences and algebraic representations of multivalued groups*, Internat. Math. Res. Notices **8** (1996), 381-400

[13]V. Dragovic, *Geometrization and Generalization of the Kowalevski top*, arXiv:0912.3027v1 15 Dec 2009, accepted for publ. in Communications Math. Phys.

Л.Смитом[14] в 1983 году в связи с задачей о существовании гомологического трансфера для отображений $f : X \to Y$. К таким разветвленным накрытиям относятся такие важные классы отображений как неособые конечнолистные накрытия, отображения проекций на факторпространства по действию конечной группы и классические разветвленные накрытия в теории гладких многообразий. А.Дольд в работе[15] полностью классифицировал разветвленные накрытия данного типа в терминах действий конечных групп на топологических пространствах.

И.Берстейн и А.Л.Эдмондс в 1978 году неявно доказали[16], что всякое открытое конечнократное отображение $f : M^m \to N^m$ связных замкнутых ориентируемых топологических m-мерных многообразий является n-листным разветвленным накрытием по Дольду-Смиту, где n равно максимальной кратности отображения f. Задача, которую решали И.Берстейн и А.Л.Эдмондс, состояла в нахождении нижней оценки на число n листов разветвленного накрытия $f : M^m \to N^m$ при заданных связных замкнутых ориентируемых m-мерных многообразиях M^m и N^m. Они получили оценку $n \geq \frac{l(M^m)}{l(N^m)}$, где $l(X)$ — рациональная когомологическая длина пространства X. Их доказательство, помимо собственной алгебраической техники, существенно использовало рациональную двойственность Пуанкаре.

Сама задача о конечнократных открыто-замкнутых отображениях многообразий берет свое начало в работе Дж.Александера[17] 1920 года, где было доказано, что для любого ориентируемого замкнутого кусочно-линейного многообразия M^m существует открытое кусочно-линейное (следовательно, и конечнократное) отображение $f : M^m \to S^m$. В 1974 году тремя авторами, Г.М.Хилденом, У.Хиршем и Дж.М.Монтезиносом, независимо была доказана теорема, ставшая знаменитой, о том, что любое ориентируемое связное замкнутое 3-мерное многообразие M^3 допускает 3-листное разветвленное накрытие над S^3. Аналогичный результат в размерности 4 был получен в 1995 году Р.Пиергаллини[18], который доказал, что любое 4-мерное ориентируемое связное замкнутое PL многообразие M^4 допускает кусочно-линейное 4-листное разветвленное накрытие над S^4.

[14] L. Smith, *Transfer and ramified coverings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **93** (1983), 485-493.

[15] A. Dold, *Ramified coverings, orbit projections and symmetric powers*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **99** (1986), 65-72.

[16] I. Berstein, A.L. Edmonds, *The Degree and the Branch Set of a Branched Covering*, Invent. Matem. **45** (1978), 213-220.

[17] J.W. Alexander, *Note on Riemann spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **26** (1920), 370-373.

[18] R. Piergallini, *Four-manifolds as 4-fold branched covers of S^4*, Topology **34** (1995), 497-508.

В диссертации, с помощью развитой техники градуированных n-гомоморфизмов, получена следующая общая оценка на число n листов разветвленного по Дольду-Смиту накрытия $f : X \to Y$ для "хороших", с точки зрения общей топологии, пространств X и Y (например, подходит случай полиэдров, компактных и некомпактных): $n \geq \frac{l(X)+1}{l(Y)+1}$, $n \geq \min\{p, \frac{l_p(X)+1}{l_p(Y)+1}\}$, для любого простого p, где $l(Z)$ (соответственно, $l_p(Z)$) — это рациональная (соответственно, mod p) когомологическая длина пространства Z.

Цель работы.

Цель диссертации — развить теорию градуированных n-гомоморфизмов Фробениуса и применить ее для исследования разветвленных накрытий и n-значных топологических групп.

Научная новизна.

Результаты диссертации являются новыми. В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Введено понятие градуированного n-гомоморфизма Фробениуса и развита соответствующая теория. Доказаны теоремы о сумме и об универсальном n-гомоморфизме произвольной алгебры.

2. Доказано, что всякий n-гомоморфизм коммутативных C^*-алгебр с единицей непрерывен и его норма равна n. Показано, что введенное В.М.Бухштабером и Э.Г.Рисом обобщенное преобразование И.М.Гельфанда является гомеоморфизмом относительно некоторых естественных топологий.

3. С помощью теории градуированных n-гомоморфизмов получена оценка снизу на рациональную и mod p, $p > n$, когомологическую длину базы n-листного разветвленного накрытия по Дольду-Смиту в терминах соответствующей когомологической длины пространства накрытия и числа листов n. Доказана точность этой оценки в случае $n = 2$.

4. Доказано, что в алгебре рациональных когомологий связной n-значной топологической группы существует специальная структура n-алгебры Хопфа. С помощью этого результата доказано, что на компактной римановой поверхности рода большего единицы нельзя ввести 2-значное умножение с единицей.

Методы исследования.

В работе используются методы алгебраической топологии, теории разветвленных накрытий, теории n-значных топологических групп и теории n-гомоморфизма Фробениуса.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа имеет теоретический характер. Результаты диссертации и развитая в ней техника могут быть полезны специалистам по топологии, алгебре и функциональному анализу.

Апробация диссертации.

Результаты диссертации докладывались:

- Неоднократно (2005, 2006, 2009 гг.) на научно-исследовательском семинаре «Алгебраическая топология и ее приложения» кафедры высшей геометрии и топологии МГУ.
- На научно-исследовательском семинаре «Геометрия, топология и математическая физика» кафедры высшей геометрии и топологии МГУ, в марте и октябре 2006 г.
- На международной конференции Александровские Чтения, МГУ, г. Москва, в 2006 г.
- На Пятом Европейском Конгрессе Математиков, постерный доклад, Амстердам (Нидерланды), в 2008 г.
- На международной конференции Торическая Топология в Манчестере 09, Манчестер (Великобритания), в 2009 г.
- На научно-исследовательском семинаре по алгебре кафедры высшей алгебры МГУ, в 2008 г.
- На Петербургском семинаре по теории представлений и динамическим системам, ПОМИ РАН, г. Санкт-Петербург, в 2009 г.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в четырех работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1-4].

Структура диссертации.

Диссертация состоит из введения и четырех глав. Текст диссертации изложен на 100 страницах. Список литературы содержит 34 наименования.

Содержание работы

Во введении описаны история рассматриваемых проблем и постановки решаемых задач. Приведены основные результаты и изложено содержание диссертационной работы.

В первой главе вводится понятие градуированного n-гомоморфизма Фробениуса и развивается общая теория таких отображений. Понятие (неградуированного) n-гомоморфизма Фробениуса было введено в работах В.М.Бухштабера и Э.Г.Риса[3,4] в 1996-97 гг. Дадим основное определение.

В диссертации под основным кольцом всюду понимается $\mathbb{Z}$-градуированное коммутативное ассоциативное кольцо $R^* = \oplus_{i=-\infty}^{\infty} R^i$ с единицей, $1_R \neq 0$. Под алгеброй над основным кольцом всюду понимается $\mathbb{Z}$-градуированная ассоциативная R^*-алгебра A^* с единицей. Пусть A^* и B^* — две R^*-алгебры, B^* — коммутативна, $f : A^* \to B^*$ есть R^*-линейное отображение степени ноль ($f(A^i) \subset B^i\ \forall i \in \mathbb{Z},\ f(\lambda a) = \lambda f(a)\ \forall \lambda \in R^*, \forall a \in A^*$). Для любого натурального m определим по рекурсии m-линейные симметрические отображения $\Phi_m(f) : A^m \to B$:

$$\Phi_1(f)(a) = f(a)\ \forall a \in A^*;$$

$$\Phi_2(f)(a,b) = f(a)f(b) - f(ab)\ \forall a, b \in A^*;$$

$$\Phi_{m+1}(f)(a_1, a_2, \ldots, a_{m+1}) = f(a_1)\Phi_m(f)(a_2, \ldots, a_{m+1}) -$$
$$- \sum_{k=2}^{m+1} (-1)^{|a_1||a_2|+\ldots+|a_1||a_{k-1}|} \Phi_m(f)(a_2, \ldots, a_{k-1}, a_1 a_k, a_{k+1}, \ldots, a_{m+1}),$$
$$\forall m \geq 1, \forall a_1, \ldots, a_{m+1} \in A^*.$$

Приведенная рекурсия называется градуированной рекурсией Фробениуса, и она отличается от обычной (неградуированной) рекурсии Фробениуса наличием знака $(-1)^{|a_1||a_2|+\ldots+|a_1||a_{k-1}|}$ в присутствующей в ней сумме $\sum_{k=2}^{m+1}(\ldots)$. При этом симметричность отображений $\Phi_m(f) : A^m \to B, m \geq 1$, доказывается отдельно.

Определение 1.2.1. *Пусть A^*, B^* — R^*-алгебры, B^* — коммутативна, $f : A^* \to B^*$ — R^*-линейное отображение степени ноль. Тогда отображение f называется n-гомоморфизмом Фробениуса, если выполнены следующие условия:*

(1) $f(ab) = (-1)^{|a||b|} f(ba)\ \forall a, b \in A^*$;
(2) $f(1) = n$;
(3) $\Phi_{n+1}(f)(a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}) = 0\ \forall a_1, \ldots, a_{n+1} \in A^*$.

Из приведенного определения сразу следует, что понятие 1-гомоморфизма и гомоморфизма алгебр совпадают. Приведем основные теоремы первой главы.

Теорема 1.2.3. *Пусть A^*, B^* — R^*-алгебры, B^* — коммутативна, отображение $f : A^* \to B^*$ является n-гомоморфизмом и отображение $g : A^* \to B^*$ является m-гомоморфизмом. Тогда их сумма $f + g : A^* \to B^*$ есть $(n+m)$-гомоморфизм.*

Из этой теоремы вытекает следующее важное для нас утверждение: отображение $f = f_1 + \ldots + f_n : A^* \to B^*$, где $f_i : A^* \to B^*, 1 \leq i \leq n$, — гомоморфизмы алгебр, является n-гомоморфизмом.

Пусть $\frac{1}{2} \in R^0$. В диссертации доказывается, что в этом случае для любой R^*-алгебры A^* и любого $n \geq 1$ существует выделенная коммутативная R^*-алгебра $B_{univ}(n, A)$ и выделенный n-гомоморфизм $\chi_A : A^* \to B_{univ}(n, A)$, универсальные в следующем смысле. Для любой коммутативной R^*-алгебры B^* и любого n-гомоморфизма $f : A^* \to B^*$ существует единственный гомоморфизм алгебр $\widehat{f} : B_{univ}(n, A) \to B^*$ такой, что $f = \widehat{f} \circ \chi_A$. Приведем явную конструкцию универсального n-гомоморфизма $\chi_A : A^* \to B_{univ}(n, A)$ в случае, когда $\frac{1}{n!} \in R^0$.

Для произвольной R^*-алгебры A^* рассмотрим ее n-ю тензорную степень $A^{\otimes n}$ как R^*-модуля. Этот R^*-модуль наделяется стандартной структурой R^*-алгебры. Умножение на разложимых тензорах определяется следующим образом:

$$a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \cdot b_1 \otimes \ldots \otimes b_n = (-1)^{\sum_{p>q} |a_p||b_q|} a_1 b_1 \otimes a_2 b_2 \otimes \ldots \otimes a_n b_n.$$

На алгебре $A^{\otimes n}$ канонически действует (справа) группа S_n :

$$\sigma(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = (-1)^{\sum_{p,q=1}^{n} \varepsilon^{pq} \varepsilon_{\sigma^{-1}(p)\sigma^{-1}(q)} |a_p||a_q|} a_{\sigma(1)} \otimes \ldots \otimes a_{\sigma(n)}, \forall \sigma \in S_n,$$

где $\varepsilon^{pq} = 1$, если $p < q$, и $\varepsilon^{pq} = 0$, если $p \geq q, \forall p, q \in \mathbb{N}$, также $\varepsilon_{pq} = 1$, если $p > q$, и $\varepsilon_{pq} = 0$, если $p \leq q, \forall p, q \in \mathbb{N}$.

Пусть $\frac{1}{n!} \in R^0$. Рассмотрим в R^*-алгебре $A^{\otimes n}$ подалгебру симметрических тензоров $S^n A^* = (A^{\otimes n})^{S_n}$. Рассмотрим в алгебре $S^n A^*$ ее коммутант $[S^n A^*, S^n A^*]$, т.е. двусторонний однородный идеал, натянутый на все градуированные коммутаторы вида

$[a,b] = ab - (-1)^{|a||b|}ba, \forall a,b \in S^nA^*$. Понятно, что факторалгебра по коммутанту $S^nA^*/[S^nA^*, S^nA^*]$ коммутативна. Рассмотрим следующее отображение:

$$\chi_A : A^* \to S^nA^*/[S^nA^*, S^nA^*],\ \chi_A(a) = \langle a \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 + \ldots + 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes a \rangle,$$

где через $\langle b \rangle \in S^nA^*/[S^nA^*, S^nA^*]$ обозначен класс элемента $b \in S^nA^*$ в факторалгебре по коммутанту $S^nA^*/[S^nA^*, S^nA^*]$.

Теорема 1.2.8. *Пусть $\frac{1}{n!} \in R^0$, и A^* — произвольная R^*-алгебра. Тогда построенное выше отображение $\chi_A : A^* \to S^nA^*/[S^nA^*, S^nA^*]$ является универсальным n-гомоморфизмом алгебры A^*.*

Во второй главе изучаются n-гомоморфизмы коммутативных C^*-алгебр с единицей. В силу преобразования И.М.Гельфанда, класс коммутативных C^*-алгебр с единицей совпадает с классом алгебр непрерывных комплекснозначных функций на компактных хаусдорфовых пространствах. Пусть X и Y — компактные хаусдорфовы пространства, $C(X)$ и $C(Y)$ — алгебры комплекснозначных непрерывных функций на них. Стандартная чебышевская норма превращает эти алгебры в C^*-алгебры. Обозначим через $\Phi_n^c(C(X), C(Y))$ множество всех непрерывных n-гомоморфизмов из $C(X)$ в $C(Y)$ (как линейных операторов между банаховыми пространствами), а через $C(Y, \mathrm{Sym}^n X)$ — пространство всех непрерывных отображений из Y в n-ю симметрическую степень пространства X, $\mathrm{Sym}^n X = X^n/S_n$. В.М.Бухштабером и Э.Г.Рисом[7] был получен следующий результат:

Теорема. *Существует каноническая (функториальная) биекция $\Psi_n : \Phi_n^c(C(X), C(Y)) \to C(Y, \mathrm{Sym}^n X)$.*

Биекцию Ψ_n мы называем обобщенным преобразованием И.М.Гельфанда, поскольку наличие и явный вид биекции Ψ_1 является прямым следствием классического преобразования И.М.Гельфанда. В пространстве $\Phi_n^c(C(X), C(Y))$ можно рассмотреть топологию поточечной сходимости, а в пространстве $C(Y, \mathrm{Sym}^n X)$ — стандартную компактно-открытую топологию. Приведем центральный результат второй главы.

Теорема 2.3.2. *Всякий n-гомоморфизм $\varphi : C(X) \to C(Y)$ непрерывен, и его норма равна n. Обобщенное преобразование И.М.Гельфанда $\Psi_n : \Phi_n^c(C(X), C(Y)) \to C(Y, \mathrm{Sym}^n X)$ является гомеоморфизмом относительно указанных топологий.*

Третья глава диссертации посвящена приложениям теории градуированных n-гомоморфизмов к теории разветвленных накрытий по Дольду-Смиту. Дадим определение разветвленных накрытий этого типа.

Пусть X — хаусдорфово пространство. Обозначим через $\exp_n(X)$ множество всех непустых не более чем n-точечных подмножеств пространства X. Понятно, что существует каноническая проекция (забывание кратностей) $\langle\cdot\rangle : \mathrm{Sym}^n X \to \exp_n(X)$.

Определение 3.2.2. *Пусть X и Y — хаусдорфовы пространства. Непрерывное отображение $f : X \to Y$ называется n-листным разветвленным накрытием по Дольду-Смиту, если существует такое непрерывное отображение $g : Y \to \mathrm{Sym}^n X$, что выполнено тождество $\langle g(y)\rangle = f^{-1}(y), \forall y \in Y$.*

Приведем классификационную теорему А.Дольда[15].

Теорема *A. Пусть X — хаусдорфово пространство, G — конечная группа, действующие на X, $H \subset G$ — подруппа индекса n. Тогда каноническая проекция $\pi_{G,H} : X/H \to X/G$ является n-листным разветвленным накрытием по Дольду-Смиту.*

B. Пусть X и Y — хаусдорфовы пространства и $f : X \to Y$, $g : Y \to \mathrm{Sym}^n X$ — n-листное разветвленное накрытие по Дольду-Смиту. Тогда существует канонически получаемое хаусдорфово пространство W с действием группы S_n такое, что $X = W/S_{n-1}$, $Y = W/S_n$ и отображение $f : X \to Y$ совпадает с отображением $\pi_{S_n,S_{n-1}} : W/S_{n-1} \to W/S_n$.

Из определения разветвленных накрытий по Дольду-Смиту и из теоремы А.Дольда непосредственно следует, что неособые n-листные накрытия $f : X \to Y$ и отображения проекции $\pi : X \to X/G$ на факторпространства по действию конечной группы G порядка n на хаусдорфовом пространстве X принадлежат к классу n-листных разветвленных накрытий по Дольду-Смиту.

В 1978 году И.Берстейн и А.Л.Едмондс[16] показали, что для всякого открытого непрерывного конечнократного отображения $f : M^m \to N^m$ связных замкнутых ориентируемых топологических m-мерных многообразий без края существуют хаусдорфово пространство W с действием конечной группы G и подгруппа $H \subset G$ индекса n такие, что $M^m = W/H$ и $N^m = W/G$, а отображение $f : M^m \to N^m$ совпадает с канонической проекцией $\pi_{G,H} : W/H \to W/G$. В силу приведенной теоремы А.Дольда, отсюда следует принадлежность таких отображений к классу разветвленных накрытий по Дольду-Смиту. И.Берстейн и А.Л.Едмондс в своем доказательстве существенно опирались на известную теорему А.В.Чернавского[19] 1964 года о структуре открыто-замкнутых конечнократных отображений $f : M^m \to N^m$ связных топологических m-мерных многообразий без края (была использована та часть теоремы А.В.Чернавского, которая говорит о коразмерности множества ветвления отображения $f : M^m \to N^m$). Опираясь на другую часть теоремы А.В.Чернавского, мы доказываем принадлежность произвольных открыто-замкнутых конечнократных отображений $f : M^m \to N^m$ связных топологических m-мерных многообразий без края (без ограничений типа замкнутости или ориентируемости) к классу n-листных разветвленных накрытий по Дольду-Смиту.

Основным инструментом, применяемым нами для исследования когомологий разветвленных накрытий по Дольду-Смиту является следующее понятие n-трансфера.

Определение 3.1.1. *Пусть B^* и A^* — два коммутативных градуированных кольца с единицей, $1_A \neq 0, 1_B \neq 0, \frac{1}{n!} \in A^0, B^0$, $i : B^* \to A^*$ — гомоморфизм колец, превращающий A^* в B^*-алгебру. B^*-линейное степени ноль отображение $\tau : A^* \to B^*$ называется n-трансфером (по отношению к гомоморфизму $i : B^* \to A^*$), если выполнены следующие условия:*

(1) $\tau : A^* \to B^*$ *есть n-гомоморфизм B^*-алгебр;*

(2) $i \circ \tau = \mathrm{Id}_{A^*} + g$, *где $g : A^* \to A^*$ — однозначно определенный $(n-1)$-гомоморфизм.*

Основным примером n-трансфера является классический трансфер в теории групп. Пусть A^* — коммутативное градуированное кольцо с единицей, $1 \neq 0$, G — произвольная группа, $H \subset G$ — подгруппа индекса n, $\frac{1}{n!} \in A^0$. Пусть G действует на A^* автоморфизмами (сохраняющими градуировку). Тогда имеем башню колец $i : A^G \hookrightarrow A^H \subset A$. В этом случае определен классический трансфер $\tau : A^H \to A^G$, $\tau(a) = g_1(a) + g_2(a) + \ldots + g_n(a)$, где $G = \{g_1H\} \bigsqcup \{g_2H\} \bigsqcup \ldots \bigsqcup \{g_nH\}$. Несложное утверждение состоит в том, что $\tau : A^H \to A^G$ является n-трансфером в смысле нашего определения.

[19]А.В. Чернавский, *О конечнократных открытых отображениях многообразий*, Матем. сб. **65** (1964), 357-369.

Обозначим через $l(X)$ рациональную когомологическую длину топологического пространства X, т.е. наибольшее число m классов сингулярных когомологий $a_1, \ldots, a_m \in H^{*\geq 1}(X;\mathbb{Q})$ степени больше нуля таких, что $a_1 a_2 \ldots a_m \neq 0$ (если для любого m существуют соответствующие классы когомологий, то $l(X) = \infty$). Аналогично через $l_p(X)$ обозначим $\mathrm{mod}\ p$ когомологическую длину пространства X. Следующая теорема является основным результатом третьей главы.

Теорема 3.2.3. *Пусть X и Y — локально стягиваемые паракомпакты такие, что пространство $Y \times X^n$ также паракомпакт. Тогда для любого n-листного разветвленного накрытия по Дольду-Смиту $f : X \to Y$ существуют n-трансферы в сингулярных когомологиях $\tau : H^*(X;\mathbb{Q}) \to H^*(Y;\mathbb{Q})$ и $\tau : H^*(X;\mathbb{Z}_p) \to H^*(Y;\mathbb{Z}_p), p > n$, из наличия которых следует оценка на когомологическую длину $l(Y) + 1 \geq \frac{l(X)+1}{n}, l_p(Y) + 1 \geq \frac{l_p(X)+1}{n}$, $p > n$. В случае $n = 2$ эта оценка является точной.*

В четвертой главе вводится понятие n-алгебры Хопфа для произвольных связных градуированных коммутативных алгебр, а также несколько модификаций этого понятия, и доказывается, что отсутствие структуры n-алгебры Хопфа в алгебре рациональных когомологий $H^*(X;\mathbb{Q})$ связного топологического пространства X является препятствием к введению на X структуры n-значной топологической группы. В случае, когда нечетномерные рациональные когомологии пространства X равны нулю, $H^{odd}(X;\mathbb{Q}) = 0$, это утверждение было доказано В.М.Бухштабером и Э.Г.Рисом в работе[4]. Как следствие, например, было показано, что на пространствах $\mathbb{C}P^m, m > 1$, не существует структуры 2-значной группы. Другой пример доставляет следующая теорема Т.Е.Панова[20]:

Теорема. *Класс односвязных замкнутых четырехмерных многообразий M^4, допускающих структуру 2-алгебры Хопфа в рациональных когомологиях, с точностью до гомотопической эквивалентности исчерпывается следующим списком: S^4, $k\mathbb{C}P^2\sharp(6-k)(-\mathbb{C}P^2), 0 \leq k \leq 6$, и $3(S^2 \times S^2)$, где $(-\mathbb{C}P^2)$ обозначает пространство $\mathbb{C}P^2$ с обращенной ориентацией.*

Заметим, что в исходной теореме Т.Е.Панова случай сферы S^4 был пропущен, поскольку в оригинальном доказательстве сразу

[20]Т.Е. Панов, *О структуре 2-алгебры Хопфа в когомологиях четырехмерных многообразий*, Успехи мат. наук **51:1** (1996), 161-162.

рассматривался случай, когда $H^2(M^4;\mathbb{Z}) \neq 0$.

В четвертой главе также доказывается, что отсутствие структуры n-предалгебры Хопфа (самой слабой из рассматриваемых структур) в алгебре рациональных когомологий $H^*(X;\mathbb{Q})$ связного топологического пространства X является препятствием к введению на X структуры n-значного умножения с единицей. Основным результатом этой главы является следующая

Теорема 4.2.1. *Пусть дана компактная риманова поверхность Γ_g рода $g \geq 2$. Тогда ее алгебра рациональных когомологий $H^*(\Gamma_g;\mathbb{Q})$ не допускает структуру 2-предалгебры Хопфа. В частности, на римановой поверхности Γ_g, $g \geq 2$, не существует 2-значного умножения с единицей.*

Благодарности.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю члену-корреспонденту РАН, профессору В. М. Бухштаберу за постановку задач, постоянное внимание и интерес к работе. Автор благодарен д.ф.-м.н., профессорам А. В. Зарелуа, А. В. Чернавскому, Е. В. Щепину, д.ф.-м.н. Т. Е. Панову и к.ф.-м.н., старшему научному сотруднику С. А. Мелихову за полезные обсуждения. Автор также благодарен всему коллективу кафедры высшей геометрии и топологии механико-математического факультета МГУ за поддержку и внимание.

Работы автора по теме диссертации

[1] Д.В. Гугнин, *Полиномиально зависимые гомоморфизмы и n-гомоморфизмы Фробениуса*, Труды МИАН **266** (2009), 64-96.

[2] Д.В. Гугнин, *Полиномиально зависимые гомоморфизмы. Теорема единственности n-гомоморфизмов Фробениуса*, Успехи мат. наук **62:5** (2007), 149-150.

[3] Д.В. Гугнин, *О непрерывных и неприводимых n-гомоморфизмах Фробениуса*, Успехи мат. наук **60:5** (2005), 163-164.

[4] Д.В. Гугнин, *Теория градуированных n-гомоморфизмов Фробениуса и ее топологические приложения*, деп. в ВИНИТИ РАН 15.02.2010 № 69–В2010, 73 с.