

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени М. В. Ломоносова

На правах рукописи

Климина Любовь Александровна

Вертикально-осевая ветротурбина:

динамика и управление

01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Москва

2010

Работа выполнена на *кафедре теоретической механики и мехатроники механико-математического факультета Московского Государственного Университета имени М.В. Ломоносова.*

Научные руководители:

д. ф.-м. н., проф. Самсонов В. А.

к. ф.-м. н., доц. Локшин Б. Я.

Официальные оппоненты:

д.ф.-м.н. Сергеев В.С.

к.ф.-м.н. Черкасов О.Ю.

Ведущая организация:

Московский Энергетический Институт (Технический Университет)

Защита состоится «30» апреля 2010 г. в 16 часов 30 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при МГУ имени М.В. Ломоносова, расположенном по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан «30» марта 2010 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета Д 501.001.22,

к. ф.-м. н.,

доцент

Прошкин В.А.

Общая характеристика работы

Актуальность работы. В последнее время все большее применение находят источники возобновляемой энергии, в частности ветроэнергетические установки (ВЭУ). Современные научные исследования в области динамики ВЭУ в основном идут по пути усложнения моделей аэродинамических и электромагнитных воздействий на систему. Позволяя зачастую достигать очень точного совпадения с экспериментами, такие модели отличаются высоким уровнем сложности. Для их исследования применяются в основном численные методы. В то же время малопараметрические модели предоставляют возможность аналитического исследования качественных особенностей поведения системы в зависимости от параметров задачи. Данная работа представляет пример такого исследования в отношении ВЭУ с вертикальной осью вращения.

К достоинствам вертикально-осевых ВЭУ относятся, в частности: упрощение конструкции за счет возможности расположения генератора на земле, а также отсутствие необходимости разворачивать ветроприемное устройство - ротор при изменении направления ветра.

Исследования по теме диссертации проводились в рамках приоритетного направления научных работ НИИ механики МГУ «Динамика твердого тела, движущегося в сплошной среде» (РН 01.960.004651).

Цели диссертационной работы:

1. Усовершенствовать замкнутую электромеханическую модель вертикально-осевой ВЭУ, учитывая выявленные в экспериментах особенности поведения ВЭУ при низких угловых скоростях ротора.
2. Построить бифуркационные диаграммы ротационных режимов в зависимости от параметров задачи.

3. Описать зависимость мощности, отбираемой у потока на рабочем режиме, от параметров задачи.
4. Оценить максимальное увеличение выходной мощности, достижимое за счет управления углами установки лопастей.

Научная новизна. Все основные результаты, полученные в работе и выносимые на защиту, являются новыми.

На защиту выносятся следующие основные результаты:

1. Предложена модифицированная замкнутая электромеханическая модель вертикально-осевой ветротурбины, в некотором диапазоне параметров адекватно описывающая поведение действующих ветроустановок.
2. С помощью метода малого параметра Пуанкаре–Понтрягина получена зависимость угловой скорости и механической мощности на ротационном режиме от коэффициента внешней электрической нагрузки в случае больших значений осевого момента инерции ротора.
3. На основе теоремы Тихонова получен метод построения зависимости характерной угловой скорости на ротационном режиме от коэффициента внешней электрической нагрузки в случае малых значений осевого момента инерции ротора. Показано принципиальное отличие в поведении роторов с различным числом лопастей при малых значениях момента инерции.
4. Разработан численно-аналитический метод построения областей существования ротационных режимов в пространстве параметров.

5. Показано что, в некотором диапазоне значения внешнего сопротивления для гидротурбины может отсутствовать необходимость дополнительной раскрутки ротора, в то время как для ветротурбины такая необходимость существует.
6. Разработан численно-аналитический метод получения оценки максимальной механической мощности для ротора с управляемыми углами установки лопастей.

Разработанные методы и подходы опробованы на примере ветротурбины с трехлопастным ротором с профилем лопастей НАСА0020.

Достоверность результатов. Результаты диссертационной работы строго обоснованы на основе общих теорем динамики и качественной теории динамических систем.

Существование области параметров, в которой результаты, полученные для модели, качественно соответствуют поведению реальной ветротурбины, подтверждено экспериментально.

Используемые методы. В работе используются общие теоремы теории бифуркаций динамических систем второго порядка [1,2], а также асимптотические методы качественного исследования систем дифференциальных уравнений: метод малого параметра Пуанкаре–Понтрягина [1] и метод исследования сингулярных асимптотических задач, основанный на следствии из теоремы Тихонова [3].

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретико-прикладной характер. Результаты теоретических исследований позволили дать некоторые рекомендации по конструированию и эксплуатации вертикально-осевых ВЭУ.

Апробация работы.

- Конференция-конкурс молодых ученых Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова, октябрь 2007 г.
- 9th conference on dynamical systems - theory and applications. Lodz, Poland. December 17-20, 2007.
- Научная конференция Ломоносовские чтения. Секция механики. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова. Апрель 2008.
- X Международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". Москва, ИПУ. Июнь 2008.
- 6th Euromech Nonlinear Dynamics Conference. Saint Petersburg. 2008.
- Конференция-конкурс молодых ученых Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова, октябрь 2008 г.
- Международная научная конференция по механике «Пятые Поляховские чтения». Санкт-Петербург. Февраль 2009.
- Научная конференция Ломоносовские чтения. Секция механики. Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова. Апрель 2009.
- XXII Международная научная конференция «Математические методы в технике и технологиях». Псков. Май 2009.
- Симбирская молодежная научная школа по аналитической динамике, устойчивости и управлению движениями и процессами, посвященная памяти В.В. Румянцева. Ульяновск. Июнь 2009.
- Конференция-конкурс молодых ученых Института механики МГУ им. М.В. Ломоносова, октябрь 2009 г.

- 10th conference on dynamical systems - theory and applications. Lodz, Poland. December 2009.
- Семинар «Математические методы технической механики» кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством проф. С.Я. Степанова и доц. А.А. Бурова. 2009.
- Семинар «Динамика относительного движения» кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкого, проф. Ю.Ф. Голубева, доц. К.Е. Якимовой, доц. Е.В. Мелкумовой. 2009.
- Семинар имени В. В. Румянцева по аналитической механике и устойчивости движения кафедры теоретической механики и мехатроники МГУ под руководством чл.-корр. РАН В. В. Белецкого, проф. А.В. Карапетяна, проф. Я. В. Татарина. 2009.

Личный вклад автора. Все результаты, выносимые на защиту, принадлежат автору и получены под научным руководством проф. В.А. Самсонова и доц. Б.Я. Локшина. В тех случаях, когда для обоснования исследований потребовалось заимствование научных результатов, приведены соответствующие ссылки. Часть работ, опубликованных автором по теме диссертации, написана в соавторстве, при этом результаты, принадлежащие соавторам, используются в диссертационной работе, но не входят в число положений, выносимых на защиту.

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, обзора литературы четырех глав, заключения и списка литературы из 55 наименований. Общий объем диссертации – 123 страницы.

Содержание работы

Во введении обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель данной работы, указаны научные методы, на которые опирается проведенное исследование, кратко перечислены результаты исследований, обладающие научной новизной, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

В первой главе описана замкнутая электромеханическая модель вертикально-осевой ветротурбины, исследование которой проводится в последующих главах. Уравнения модели имеют вид:

$$\begin{cases} J\ddot{\vartheta} = -CI + M_a(\vartheta, \dot{\vartheta}) - M_d(\dot{\vartheta}), \\ I = \frac{C(\dot{\vartheta} - \Omega_0)}{R + r_i}, \text{ при } \dot{\vartheta} \geq \Omega_0, \\ I = 0, \text{ при } \dot{\vartheta} < \Omega_0. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь ϑ - угол поворота ротора; J - осевой момент инерции ротора; $M_a(\vartheta, \dot{\vartheta})$ - момент аэродинамических сил, вычисляется на основе гипотезы квазистационарности; $M_d(\dot{\vartheta})$ - диссипативный момент, характеризующий долю механической энергии ротора, которая преобразуется в электрическую, передается генератору, но расходуется на потери и не поступает потребителям; CI - диссипативный момент, характеризующий долю механической энергии ротора, преобразуемую в электрическую энергию и поступающую потребителям; I - величина силы тока во внешней цепи электрогенератора; C - коэффициент электромеханического взаимодействия; R - внешнее сопротивление в цепи, r_i - внутреннее сопротивление генератора; Ω_0 - пороговое значение угловой скорости ротора, до достижения которого ток во внешней цепи практически отсутствует.

Отличие данной модели от предыдущих, в частности от [4], заклю-

чается во введении константы $\Omega_0 \neq 0$ и функции $M_d(\dot{\vartheta})$, задаваемой следующими соотношениями: при $\dot{\vartheta} < \Omega_0$ $M_d(\dot{\vartheta}) = \tilde{C}\dot{\vartheta}$, при $\dot{\vartheta} \geq \Omega_0$ $M_d(\dot{\vartheta}) = \tilde{C}\Omega_0$. Здесь $\tilde{C} = C^2/(R + r_i)$ - приведенный коэффициент электромеханического взаимодействия.

Заметим, что суммарный момент электромагнитных сил, действующих на ротор, то есть $(-CI - M_d(\dot{\vartheta}))$, является линейной функцией от угловой скорости ротора с коэффициентом $-\tilde{C}$, и первое уравнение системы (1) можно переписать в виде:

$$J\ddot{\vartheta} = M_a(\vartheta, \dot{\vartheta}) - \tilde{C}\dot{\vartheta}, \quad (2)$$

В это уравнение уже не входит величина I силы тока. Таким образом, уравнение, описывающее вращение ротора, отделилось от уравнения для силы тока, и его можно рассматривать отдельно. Изучение этого уравнения, и, в первую очередь, его периодических решений, составляет основную часть второй главы диссертации.

Во второй главе исследуются рабочие режимы ветротурбины. Рабочему режиму соответствует периодическая траектория системы уравнений движения, охватывающая фазовый цилиндр $(\vartheta, \dot{\vartheta})$.

Представим уравнение (2) в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \vartheta' &= \omega, \\ A\omega' &= \sum_{i=1}^n f\left(\vartheta + \frac{2\pi(i-1)}{n}, \omega\right) - c\omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Штрихом обозначена производная по $\tau = \frac{V}{r}t$, n - число лопастей ротора;

$$A = \frac{J}{\rho l h r^3}; \quad c = \frac{C^2}{(R + r_i)V \rho l h r^2}; \quad (4)$$

$$f(\vartheta, \omega) = u^2(C_y(\alpha) \sin \alpha - C_x(\alpha) \cos \alpha); \quad (5)$$

где значения функций $C_x(\alpha)$ - коэффициента сопротивления - и $C_y(\alpha)$ - коэффициента подъемной силы - берутся из стационарных экспериментов. Величины u и α определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} u \sin \alpha &= \cos \vartheta, \\ u \cos \alpha &= \omega + \sin \vartheta. \end{aligned} \tag{6}$$

Будем предполагать, что функция $f(\vartheta, \omega)$ дважды дифференцируема и такова, что при любых значениях параметров A и c система (3) имеет не более чем первую степень негрубости [1].

Здесь A - безразмерный момент инерции, c - коэффициент внешней нагрузки, значение которого возрастает с возрастанием числа потребителей, подключенных к генератору.

В результате, задача содержит два безразмерных параметра (4), в выражения для этих параметров, помимо уже упомянутых ранее величин, вошли V - величина скорости набегающего потока, ρ - плотность среды, r - радиус ротора, h - высота лопасти ротора, $2l$ - длина хорды лопасти.

Итак, нас интересуют периодические траектории системы (3), охватывающие фазовый цилиндр (ϑ, ω) . Обозначим $c_A^p(\omega_0)$ такое значение коэффициента c , при котором для заданного A у системы (3) существует периодическая охватывающая фазовый цилиндр траекторий, на которой минимальное значение переменной ω равно ω_0 .

Оказывается, что для любого $c \in (-\infty, \infty)$ зависимость $c_A^p(\omega_0)$ при любом $A > 0$ является однозначной и непрерывной функцией от ω_0 .

Обратная зависимость $\omega_A^p(c)$ такая, что $c_A^p(\omega_A^p(c)) = c$, далеко не всегда однозначна. Более того, при больших значениях безразмерного осевого момента инерции A эта зависимость, как правило, не является однозначной. Рассмотрим случай больших значений A подробнее.

Справедливо утверждение, описывающее зависимость $c_A^p(\omega_0)$ в слу-

чае $A \rightarrow \infty$:

Утверждение: $\lim_{A \rightarrow \infty} c_A^p(\omega_0) = n\Psi(\omega_0)/\omega_0$,

где $\Psi(\omega_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta, \omega_0) d\vartheta$ - осредненный аэродинамический момент.

Доказательство утверждения опирается на метод Пуанкаре–Понтрягина [1].

Применяя это утверждение для случая ротора с тремя лопастями профиля NASA0020, получаем бифуркационную диаграмму периодических траекторий, представленную на Рис.1 под номером 1: сплошные линии соответствуют семействам орбитально устойчивых периодических траекторий, пунктирная — неустойчивых.

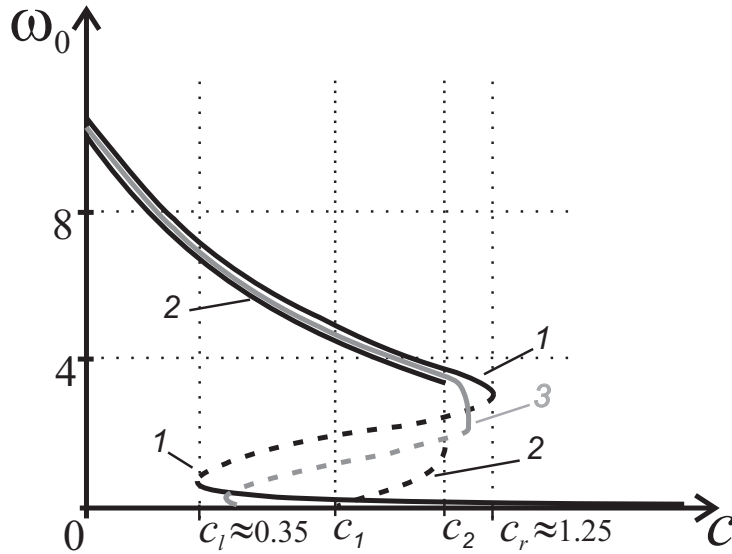


Рис. 1. Диаграммы периодических траекторий, охватывающих фазовый цилиндр.

Представленный на Рис.1 характер диаграммы (с гистерезисом величины ω_0 в зависимости от направления изменения параметра c) типичен для широкого класса аэродинамических профилей и не зависит от количества лопастей ротора. Диаграмма описывает зависимость характерной угловой скорости ротационных режимов от внешней нагрузки. Показано, что при $A \rightarrow \infty$ для механическую мощность P справедлива оценка:

$$P \approx \hat{P} = \rho l h V^3 c \omega_0^2.$$

Оказывается, что для многих профилей максимум механической мощности ВЭУ достигается как раз при тех значениях внешнего сопротивления, при которых для соответствующего значения c существуют три ротационных режима, и достигается он на верхнем притягивающем режиме. Это означает, для выхода на желаемый высокоскоростной режим требуется предварительный разгон, позволяющий попасть в область притяжения этого режима, ограниченную снизу неустойчивым режимом.

Полученный результат относится к большим значениям A , то есть к случаю, когда осевой момент инерции ротора велик, а плотность среды мала. Исследуем возможность расширения зоны притяжения интересующего нас высокоскоростного режима за счет уменьшения значения A .

При изменении параметра A диаграмма зависимости между ω_0 и c существенно перестраивается. При $A \rightarrow 0$ для описания диаграммы введем следующие определения и предположение:

$$\Gamma = \left\{ (\vartheta, \omega) : \mathfrak{F}_c(\vartheta, \omega) = \sum_{i=1}^n f\left(\vartheta + \frac{2\pi(i-1)}{n}, \omega\right) - c\omega = 0 \right\}. \quad (7)$$

Будем рассматривать систему (3) в области $\omega > 0$.

Назовем верхней границей множества $\mathfrak{F}_c(\vartheta, \omega) > 0$ множество $\mathfrak{L}^+ \subset \Gamma$ кусочно непрерывных по ϑ , определенных, возможно, не для всех ϑ кривых т. ч. в некоторой нижней полуокрестности \mathfrak{L}^+ выполнено $\mathfrak{F}_c(\vartheta, \omega) > 0$, в некоторой верхней полуокрестности \mathfrak{L}^+ выполнено $\mathfrak{F}_c(\vartheta, \omega) < 0$.

Аналогично определим верхнюю границу \mathfrak{L}^- множества $\mathfrak{F}_c(\vartheta, \omega) < 0$.

Дополнительное предположение: Далее будем считать, что 1) рассматриваются только такие функции $f(\vartheta, \omega)$, что при всех значениях постоянной c множество Γ состоит из точек и кривых, но не содержит никаких двумерных областей и не содержит никаких вертикальных и горизонтальных отрезков. 2) Множества \mathfrak{L}^+ и \mathfrak{L}^- состоят из конечного числа непрерывных участков кривых.

Для ротора с лопастями ненулевой толщины в системе (3) при достаточно больших значениях ω выполнено $\mathfrak{F}_c(\vartheta, \omega) < 0$, а при достаточно больших по модулю отрицательных значениях ω выполнено $\mathfrak{F}_c(\vartheta, \omega) > 0$. Поэтому траектории системы (3) не уходят на бесконечность.

Назовем кривой типа Γ^+ непрерывную замкнутую кривую, охватывающую фазовый цилиндр, расположенную в области $\omega > 0$ и состоящую из любого количества участков двух типов: 1) участок кривой, принадлежащей \mathfrak{L}^+ ; 2) вертикальный отрезок, во внутренних точках которого $\mathfrak{F}_c(\vartheta, \omega) < 0$, такой, что его верхняя точка является правой границей предыдущего участка, а нижняя - левой границей следующего; при этом возможно, что этот отрезок имеет нулевую длину.

Назовем кривой типа Γ^- непрерывную замкнутую кривую, охватывающую фазовый цилиндр, расположенную в области $\omega > 0$ и состоящую из любого количества участков двух типов: 1) участок кривой, принадлежащей \mathfrak{L}^- ; 2) вертикальный отрезок, во внутренних точках которого $\mathfrak{F}_c(\vartheta, \omega) > 0$, такой, что его нижняя точка является правой границей предыдущего участка, а верхняя - левой границей следующего; при этом возможно, что этот отрезок имеет нулевую длину.

Утверждение: При $A \rightarrow 0$ существует взаимоднозначное соответствие между периодическими охватывающими фазовый цилиндр орбитально устойчивыми траекториями системы (3) и линиями типа Γ^+ , а также между периодическими охватывающими фазовый цилиндр неустойчивыми траекториями системы (3) и линиями типа Γ^- . При $A \rightarrow 0$ каждая охватывающая фазовый цилиндр орбитально устойчивая периодическая траектория стремится к соответствующей линии типа Γ^+ и каждая охватывающая фазовый цилиндр неустойчивая периодическая траектория стремится к соответствующей линии типа Γ^- .

Данное утверждение вытекает из теоремы Тихонова.

Геометрия множества Γ существенно зависит от параметра c и от числа n лопастей ротора. Оказывается, что для ротора с одной лопастью не существует ни одной линии типа Γ . Это происходит из-за того, что при некоторых углах поворота лопасти аэродинамический момент тормозит вращение, какой бы ни была угловая скорость. Таким образом, при малых значениях осевого момента инерции для ротора с одной лопастью ротационных режимов нет. В то же время для ротора с тремя лопастями характерна следующая ситуация: в некотором диапазоне угловых скоростей при любом значении угла поворота ϑ хотя бы одна из лопастей расположена так, что приложенная к ней аэродинамическая сила разгоняет ротор. При этом суммарный аэродинамический момент от трех лопастей оказывается положительным.

Соответствующая диаграмма для ротора с тремя лопастями профиля НАСА0020 представлена на Рис.1 под цифрой 2. При $c = c_2$ существуют две линии типа Γ , касающиеся друг друга, а при $c > c_2$ нет ни одной линии типа Γ . Однако, если A сколь угодно мало, но все же отлично от нуля, то диаграмма зависимости между ω_0 и c не имеет разрыва при $c = c_2$, хотя при малых A «скачок» очень резкий. Пример численного построения качественной диаграммы для некоторого конечного значения A представлен на Рис.1 под цифрой 3.

Объединяя результаты, полученные для двух предельных ситуаций $A \rightarrow \infty$ и $A \rightarrow 0$, можем качественно построить на плоскости параметров A и c области существования трех типов периодических траекторий. На Рис.2 это выполнено для ротора с тремя лопастями профиля НАСА0020: наклоном $///$ показана область существования верхней притягивающей траектории, серым цветом выделена область существования неустойчивой траектории, а наклоном $\\$ - нижней притягивающей.

Итак, подбирая параметры задачи так, чтобы A было относительно

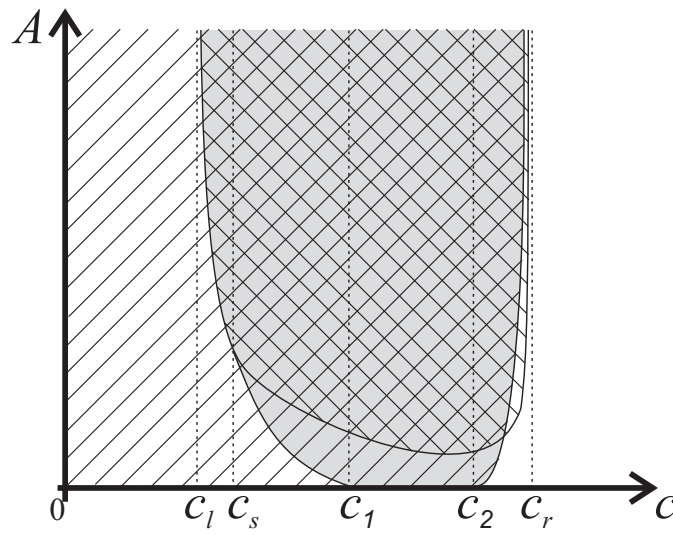


Рис. 2. Области существования периодических траекторий разных типов.

мало, мы можем при заданном c расширить область притяжения высокоскоростного режима за счет уменьшения угловой скорости неустойчивого режима, либо даже за счет разрушения неустойчивого режима.

В третьей главе на основе экспериментальных данных проводится верификация модели. Для промышленного образца малогабаритной ВЭУ идентифицируются параметры модели, а затем на основе экспериментальных измерений проводится построение диаграммы ротационных режимов. Полученная диаграмма представлена на Рис.3.

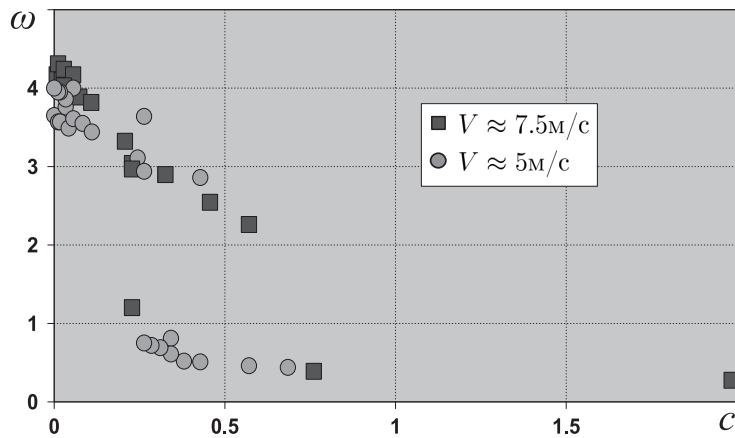


Рис. 3. Экспериментальная зависимость ω_0 от c на ротационных режимах.

Из сравнения полученной экспериментальной кривой (Рис.3) и тео-

ретической кривой, представленной на Рис.1 под цифрой 1, видно, что предложенная модель позволяет, по крайней мере в некотором диапазоне параметров задачи, выявить качественную структуру диаграммы ротационных режимов, хотя и допускает заметные количественные расхождения с экспериментом.

В четвертой главе рассматривается движение управляемой ветротурбины. На основе параметрического анализа характеристик рабочих режимов, разработанного во второй главе, оценивается максимальное увеличение механической мощности ветротурбины, возможное за счет управления установочными углами лопастей ротора. В частности, для ротора с тремя лопастями профиля НАСА0020 соответствующая оценка составила около 40%. Помимо этого исследуется возможность расширения зоны притяжения высокоскоростного режима за счет управления величиной момента инерции ротора.

В заключении кратко перечислены основные результаты.

Список публикаций

1. *Климина Л.А. Ротационные режимы движения аэродинамического маятника с вертикальной осью вращения // М.: Вестн. Моск. Ун-та, Сер.1 Математика. Механика. 2009 №5, стр. 71-75.*
2. Климина Л.А. Особенности поведения аэродинамического маятника с вертикальной осью вращения // Труды конференции-конкурса молодых ученых 10 - 12 октября 2007 г. Издательство Московского университета 2008. 104- 111.
3. Досаев М.З., Климина Л.А., Локшин Б.Я., Селюцкий Ю.Д. Моделирование динамики ветроустановки с вертикальной осью враще-

ния // Научно-технический отчет Института механики МГУ № 4944. Москва. 2008. 60 с.

4. Климина Л.А. Моделирование ветроприемного элемента ветротурбины Дарье // Труды конференции-конкурса молодых ученых 8 - 10 октября 2008 г. Издательство Московского университета 2009. 113-121.
5. Ching-Huei Lin, Климина Л.А., Локшин Б.Я., Самсонов В.А. Теоретико-механические аспекты динамики ветроустановки с вертикальной осью вращения // Пятые Поляховские чтения: Избранные труды Международной научной конференции по механике. Санкт-Петербург. СПб, 2009. стр. 76-81.
6. Klimina L.A., Lokshin B.Y., Samsonov V.A. Parametrical Analysis of the behavior of an Aerodynamic Pendulum with Vertical Axis of Rotation // Modeling, Simulation and Control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems. Springer Netherlands. 2009. 211-220
7. Dosaev M.Z., Klimina L.A., Lokshin B.Y., Selyutskiy Yu.D., Ching-Huei Lin. Evolution of the phase portrait in the model of a vertical axis wind turbine // 10th Conference on Dynamical Systems - Theory and Applications, Proceedings. 2009. Vol. 2, 543–548.
8. 8. Климина Л.А., Локшин Б.Я., Самсонов В.А. К вопросу об управлении параметрами ветроэнергетической установки // Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений. Труды международной юбилейной научной конференции, посвященной 15-летию образования Кыргызско-Российского Славянского Университета. Бишкек. Кыргызстан. 15-21 сентября 2008. Shaker Verlag Aachen. 2009. с. 44-45.

Цитированная литература

1. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости // Москва, Наука, 1990. 496 с.
2. Бутенин Н.В., Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. Введение в теорию нелинейных колебаний // Москва, Наука, 1987. 382 с.
3. Бутузов В.Ф., Васильева А.Б., Федорюк М.В. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический анализ 1967. Итоги науки. Серия "Математика". Москва. 1969. стр. 5-73.
4. Досаев М.З., Кобрин А.И., Локшин Б.Я., Самсонов В.А., Селюцкий Ю.Д. Конструктивная теория МВЭУ. Учебное пособие. Части I-II // М.: Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2007. 75 с. 88 с.