Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 517

Волк Денис Сергеевич

ТИПИЧНОСТЬ НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВ АТТРАКТОРОВ КОСЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ И АНАЛИТИЧЕСКИХ СЛОЕНИЙ

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление

Автореферат

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Москва, 2010

Работа выполнена на кафедре теории динамических систем Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук профессор Юлий Сергеевич Ильяшенко.
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук профессор Ромен Васильевич Плыкин, кандидат физико-математических наук Александр Игоревич Буфетов.
Ведущая организация:	Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского

Защита диссертации состоится 9 апреля 2010 г. в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, ауд. 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета МГУ имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 9 марта 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И. Н. Сергеев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Настоящая диссертация посвящена исследованию вопросов типичности некоторых новых явлений, обнаруженных в комплексных слоениях и вещественных динамических системах.

В теории динамических систем одним из важнейших направлений является качественное описание динамики системы, в том числе описание аттракторов системы. Первые исследования в этой области принадлежат А. Пуанкаре, классифицировавшему возможные варианты динамического поведения гомеоморфизма окружности и (совместно с И. Бендиксоном) векторного поля на плоскости и на сфере. Данная область затем интенсивно развивалась, в частности, в связи с тем, что динамические системы часто встречаются и в прикладных задачах.

В дальнейшем качественной теорией динамических систем занимались ведущие отечественные и зарубежные математики, такие, как А. А. Андронов, С. Х. Арансон, Д. В. Аносов, В. И. Арнольд, К. Бонатти, Р. Боуэн, В. З. Гринес, Э. Жис, Ю. С. Ильяшенко, А. Каток, А. Н. Колмогоров, Р. Мане, Дж. Милнор, Ш. Ньюхаус, В. И. Оселедец, Д. Палис, Я. Песин, Д. Рюэлль, Я. Г. Синай, С. Смейл, А. М. Степин, Д. Сулливан,Ф. Такенс, У. Тёрстон, Дж. Франкс, А. Н. Шарковский, Л. П. Шильников, М. Шуб и многие другие.

Одна из центральных проблем, стоящих перед качественной теорией дифференциальных уравнений и динамических систем, состоит в классификации всех возможных фазовых портретов или видов поведения системы. Уже А. Пуанкаре понимал, что в такой постановке задача необозрима, и, по-видимому, осмысленно решена быть не может. Возникла идея, что имеет смысл классифицировать лишь типичные уравнения и системы. Этот подход оказался весьма плодотворным, причём в зависимости от того, как давать определение типичности, получились различные содержательные теории.

К сожалению, оказывается, что задача классификации даже типичных динамических систем в высокой размерности наталкивается на практически непреодолимые трудности. Известны лишь некоторые области систем (впрочем, довольно большие), поддающихся явному описанию: диффеоморфизмы Морса-

Смейла, гиперболические и частично-гиперболические динамические системы, области применимости теории КАМ. Существенные трудности представляет исследование даже одного заданного векторного поля в размерностях, начиная с 3, и одного отображения уже для динамики на плоскости.

Таким образом, глобальный вопрос «какими свойствами обладает фазовый портрет типичного векторного поля или динамика типичного отображения» по-прежнему далёк от полного решения. В настоящей диссертации исследуются некоторые частные вопросы в этой области.

Глава 1 посвящена топологии комплексных аналитических слоений, порождённых полиномиальными дифференциальными уравнениями, в двумерном комплексном пространстве. В ней исследуется вопрос, насколько типично явление сепаратрисной связки для таких слоений.

Рассмотрим фазовое пространство вещественного дифференциального уравнения на плоскости, расслоенное на его интегральные кривые, — фазовый портрет. Типичное векторное поле на плоскости структурно устойчиво[1]: для любого близкого поля существует гомеоморфизм, переводящий его фазовый портрет в фазовый портрет исходного. Ещё А. Пуанкаре[2] заметил, что для изучения топологии фазового портрета векторного поля особенно важны некоторые выделенные интегральные кривые, сепаратрисы особых точек. Бифуркации, или перестройки фазовых портретов, часто происходят по следующему сценарию: две сепаратрисы различных особых точек или одной и той же точки сближаются и при некотором значении параметра образуют одну и ту же интегральную кривую — сепаратрисную связку. После чего сепаратрисы снова размыкаются, и образуется новый (также устойчивый) фазовый портрет. Таким образом, вещественные дифференциальные уравнения без сепаратрисных связок образуют открытое плотное множество в топологии C^r для всех $r \geq 1$.

В комплексном случае ситуация радикально меняется. Из работ М. Г. Худай-

[1] J. Palis, S. Smale Structural Stability Theorem. *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, AMS, vol. XIV

[2] H. Poincaré. Sur les courbes définies par les équations différentielles, I, II, III, IV. *J. Math. Pure et Appl.*, **2** (1881, 82, 85, 86)

Веренова[3], Ю. С. Ильяшенко[4], А. А. Щербакова[5], И. Накаи[6] известно, что для типичного слоения, порожденного комплексным полиномиальным дифференциальным уравнением степени, большей 1, все интегральные кривые, кроме, быть может, $n+1$ сепаратрисы бесконечно удалённых особых точек, плотны в $\mathbb{C}^2$. В этих же работах показано, что типичное такое уравнение структурно неустойчиво.

Из плотности интегральных кривых, в частности, следует, что сепаратрисы любых двух (обычных) особых точек проходят сколь угодно близко друг от друга. В вещественном случае это прямо означало бы плотность уравнений со связкой в пространстве всех уравнений: можно было бы построить сколь угодно малое возмущение типичного уравнения, создающее связку. Возникает естественный вопрос, имеет ли место плотность слоений со связкой в комплексном случае. Положительный ответ на него даётся в главе 1.

Трудность состоит в том, что комплексный мир не допускает локальных возмущений. Любая аналитическая функция либо отлична от нуля везде, кроме счётного числа точек, либо есть тождественный нуль. Поэтому для доказательства используются косвенные методы: анализ группы монодромии на бесконечности[4], группы ростков конформных отображений[5].

Важным понятием современной качественной теории динамических систем является понятие аттрактора, т.е. притягивающего множества системы. Однако у этого понятия существует много различных формализаций. В их числе необходимо упомянуть максимальный аттрактор A_{max} диссипативной динамической системы, предельное множество L, центр Биркгофа, аттрактор Милнора, статистический и минимальный аттракторы (A_M, A_{stat} и A_{min} соответственно).

Гипотеза Палиса[7] предполагает, что для типичной динамической системы

[3] М. Г. Худай-Веренов. Об одном свойстве решений одного дифференциального уравнения, *Математический Сборник*, 56 (1962), с. 301-308.

[4] Ю. С. Ильяшенко. Топология фазовых портретов аналитических дифференциальных уравнений на комплексной проективной плоскости, *Труды семинара Петровского*, 4 (1978), с. 83-136.

[5] А. А. Щербаков. Плотность орбит псевдогруппы конформных отображений и обобщение теоремы Худай-Веренова, *Вестник московского университета. I Математика Механика*, 4 (1982), с. 10-15.

[6] I. Nakai. Separatrices for nonsolvable dynamics on $(\mathbb{C}, 0)$, *Ann. Inst. Fourier 4*, 2 (1994), pp. 569-599.

[7] J. Palis. A global view of dynamics and a conjecture on the dynamics of finitude of attractors, *Géometrié complexe et systèmes dynamiques*, Orsay 1995, Astérisque **261** (2000), xiii–xiv, pp. 335–347.

все эти определения описывают одно и то же множество. С другой стороны, гипотеза Рюэля[8] утверждает, что существуют типичные примеры несовпадения аттракторов. Впрочем, поскольку в этих гипотезах используются разные определения типичности (метрическая типичность в гипотезе Палиса и топологическая в гипотезе Рюэлля), эти гипотезы не являются взаимоисключающими.

Определения аттракторов, приведённые выше, изучались, в частности, в работах А. С. Городецкого[9], Д. Рюэля[8], Дж. Палиса[7]. Известно[9], что

$$A_{max} \supset L \supset A_M \supset A_{stat} \supset A_{min},$$

причём все эти включения могут быть строгими.

Таким образом, в настоящее время по-прежнему актуален вопрос, какое из определений аттрактора наиболее полно отражает идею о притягивающем множестве — подмножестве пространства состояний системы, к которому накапливаются орбиты для почти всех начальных условий из некоторого бассейна притяжения.

Одно из возможных определений, *статистический аттрактор* A_{stat}, даётся следующим образом. Открытое множество U несущественно для статистического аттрактора, если для почти любой начальной точки x, доля времени, проводимого итерациями x в U, стремится к 0. Статистический аттрактор определяется как дополнение к объединению всех несущественных множеств.

Статистический аттрактор — это способ описать, что увидит воображаемый наблюдатель, смотрящий на динамическую систему достаточно долгое время. Предположим, что состояние системы отображается на экране светящейся точкой, и что мы фотографируем экран на очень малочувствительную плёнку с очень большой экспозицией. Полученное изображение (точнее, объединение таких изображений) и есть статистический аттрактор.

Однако, Ю. С. Ильяшенко и А. Негутом[10] показано, что в некоторых случаях определение статистического аттрактора не соответствует вышеизложен-

[8]D. Ruelle. Historical behaviour in smooth dynamical systems, *Global analysis of dynamical systems*, pp. 63–66, Inst. Phys., Bristol, 2001.

[9]А. С. Городецкий, *Минимальные аттракторы и частично гиперболические инвариантные множества динамических систем.* Текст кандидатской диссертации, Московский Государственный Университет, 2001.

[10]Yu. Ilyashenko, A. Negut. Invisible Parts of Attractors, *arXiv*:0901.0316v1 [math.DS].

ному физическому описанию. Возможна ситуация, когда большая часть статистического аттрактора посещается орбитами чрезвычайно редко. Траектории системы проводят большую часть своего времени в окрестности другой части аттрактора. Если доля времени, проводимого орбитами в окрестности малопосещаемой области, достаточно мала, она оказывается невидимой для наблюдателя.

Открытое множество U называется *ε-невидимым*, если почти все орбиты посещают U со средней частотой, не большей ε. На практике, достаточно взять $n = 10^4, \varepsilon = 2^{-10^4}$, тогда наблюдатель после первых 10^4 итераций никогда не увидит, как орбита попадает в R.

Ю. С. Ильяшенко и А. Негут построили пример[10], когда такое поведение наблюдается устойчивым образом: все близкие динамические системы обладают тем же свойством. Этот пример показывает, что вопрос о «правильном» определении аттрактора по-прежнему открыт.

Есть две тривиальных причины, вызывающих ε-невидимость в типичной динамической системе: одна из них — большая ($\sim 1/\varepsilon$) константа Липшица отображения (а значит, оно сильно искажает метрику), другая — близость ($\sim \varepsilon$) к структурно неустойчивым динамическим системам. Пример Ю. С. Ильяшенко и А. Негута не только локально типичен, но и имеет равномерно ограниченную (< 100) константу Липшица, не зависящую от ε. Также он $|\ln \varepsilon|$-далек от структурно неустойчивых систем (в классе косых произведений). Свойство невидимости оказывается C^1-грубым.

В примере Ю. С. Ильяшенко и А. Негута присутствует естественный параметр $\frac{1}{n}$, характеризующий удалённость систем от границы множества структурно устойчивых динамических систем. Область в фазовом пространстве, покрывающая четверть статистического аттрактора, оказывается невидимой с показателем порядка 2^{-n}.

В главе 2 настоящей диссертации этот пример усовершенствован: для открытого множества динамических систем специального вида, ступенчатых косых произведений над сдвигом Бернулли, получена суперэкспоненциальная оценка показателя невидимости.

Обсуждавшийся вопрос «что такое типичный аттрактор» можно переформулировать так: «какими свойствами обладает типичный аттрактор»? Особый интерес представляют вопросы о геометрии аттрактора как множества, и о структуре инвариантных мер на нём. М. Тсуджи[11] обнаружил необычный пример аттрактора гладкого отображения бесконечного цилиндра $S^1 \times \mathbb{R}$ в себя: аттрактор является носителем инвариантной меры, абсолютно непрерывной относительно меры Лебега. В частности, это означает, что сам аттрактор имеет положительную меру Лебега. Пример Тсуджи, по-видимому, устойчив в классе C^2-гладких отображений цилиндра в себя.

В примере Тсуджи отображение не является взаимнооднозначным, и это неотъемлемый элемент конструкции. Возникает вопрос, можно ли достичь того же эффекта для диффеоморфизмов? В главе 3 настоящей диссертации он исследуется для типичных косых произведений над символическим сдвигом со слоем отрезок. Кроме отрицательного ответа на данный вопрос, результатом является полное описание динамики в таких косых произведениях.

Цель работы. Целью настоящей работы является исследование топологии типичных аналитических слоений $\mathbb{C}^2$, построение устойчивого примера суперэкспоненциально невидимых областей в косых произведениях, а также исследование косых произведений над сдвигом Маркова и слоем отрезок.

Научная новизна работы. Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

- Доказана теорема о плотности сепаратрисных связок в пространстве полиномиальных слоений степени не выше n двумерного комплексного пространства.

- Построен пример шаров в пространстве косых произведений со слоем k-мерная сфера, для каждой динамической системы из которых большая часть статистического аттрактора ε-невидима с ε порядка двойной экспоненты от диаметра шара и k.

[11] M. Tsujii. Fat solenoidal attractors, *Nonlinearity*, v. 14 (2001), pp. 1011–1027

- Доказаны классификационные теоремы, описывающие динамику типичного косого произведения над сдвигом Маркова со слоем отрезок. Показано, что для такой динамической системы существует лишь конечное число «тонких» аттракторов; они являются носителями SRB-мер с отрицательными послойными показателями Ляпунова.

Методы исследования. В работе используются методы теории динамических систем (в том числе, существенную роль играет исследование показателей Ляпунова), эргодической теории, а также теории случайных процессов. Для исследования полиномиальных слоений применяются методы дифференциальных уравнений, алгебры и комплексного анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть полезны в теории динамических систем с дискретным и непрерывным временем, а также в теории слоений. Полученные в диссертации результаты дают полное описание важного класса динамических систем — косых произведений со слоем отрезок, и могут быть использованы в дальнейших исследованиях специалистами в этой области.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались автором на следующих семинарах и конференциях:

1. семинар механико-математического факультета МГУ по динамическим системам под руководством профессора Ю. С. Ильяшенко (неоднократно, 2004-2009 гг.);

2. международная конференция им. И. Г. Петровского (МГУ, 2004);

3. летняя школа-конференция «Summer School in Dynamical Systems» (Коимбра, Португалия, 2008 г.);

4. семинар Добрушинской математической лаборатории в Институте проблем передачи информации под руководством проф. Р. А. Минлоса (Москва, 2008 г.);

5. семинар Equipes de géométrie analytique в Institut de Recherche Mathematique de Rennes (Ренн, Франция, 2009 г.);

6. летняя школа-конференция «Динамические системы» (Словакия, 25 июня – 7 июля 2009).

7. международная конференция «Топология, геометрия и динамика» памяти В. А. Рохлина (Санкт-Петербург, Россия, 11–16 января 2010).

Публикации. Основное содержание работы опубликовано; список работ автора по теме диссертации приведен в конце автореферата [1–5].

Структура и объем работы. Диссертация содержит введение, три главы и список литературы. Главы разделены на параграфы; первая глава состоит из шести параграфов, вторая из девяти, третья из трёх. Список литературы содержит 30 наименований. Полный объем диссертации 146 страниц.

Основное содержание диссертации

Во **введении** освещается история решаемых задач. Там же даются основные определения и формулируются теоремы, полученные в диссертации, описывается структура диссертации.

В **главе 1** исследуются аналитические слоения двумерного комплексного пространства. Рассмотрим комплексное дифференциальное уравнение

$$\frac{dw}{dz} = \frac{P(z,w)}{Q(z,w)}, \tag{1}$$

где $(z,w) \in \mathbb{C}^2$, а P, Q — многочлены степени не выше n.

Уравнение (1) задает поле направлений в пространстве $\mathbb{C}^2$ за исключением особого множества

$$\Sigma = \{(z,w) \in \mathbb{C}^2 \mid P(z,w) = Q(z,w) = 0\}.$$

Интегральные кривые поля направлений (1) представляют собой римановы поверхности, образующие (особое) одномерное слоение пространства $\mathbb{C}^2$ с особенностями на множестве Σ. В случае, если многочлены P, Q взаимно просты, множество Σ состоит из конечного числа особых точек слоения. Введем обозначение $\mathcal{A}_n$ для пространства слоений, образованных интегральными кривыми дифференциальных уравнений вида (1).

Пространство уравнений (1) заданной степени естественно отождествлять с комплексным проективным пространством S размерности $N-1$, где N — суммарное количество коэффициентов многочленов P и Q. Зададим топологию на пространстве $\mathcal{A}_n$, перенеся с S стандартную топологию проективного пространства.

Основной результат главы 1 относится к сепаратрисам особых точек полиномиальных слоений. Определение сепаратрис для комплексных слоений дается аналогично вещественному случаю.

Определение 1. Сепаратрисой особой точки p называется такой слой L, что для любой малой окрестности U точки p замыкание некоторой связной компоненты пересечения слоя L с окрестностью U представляет собой аналитическую кривую, проходящую через точку p, возможно, с особенностью в этой точке.

Определение 2. Сепаратрисной, или седловой, связкой называется такое положение двух различных локальных сепаратрис, при котором их продолжения до глобальных сепаратрис совпадают. Локальные сепаратрисы могут при этом относиться как к одной и той же, так и к различным особым точкам.

Основная теорема, доказанная в работе, формулируется следующим образом.

Теорема 3. *Слоения с сепаратрисной связкой образуют плотное подмножество в пространстве полиномиальных слоений $\mathcal{A}_n$ для любого $n \geq 2$.*

В **главах 2 и 3** рассматриваются вещественные динамические системы с дискретным временем специального вида. Они представляют собой косые произведения с символическим сдвигом в базе и гладкими отображениями в слое. В обеих главах рассматриваемые системы проявляют свойства частично-гиперболических[12] диффеоморфизмов, хотя сами диффеоморфизмами и не являются.

В **главе 2** исследуются вопросы ε-невидимости в косых произведениях. А именно, строится открытое множество в пространстве ступенчатых косых про-

[12] M. W. Hirsch, C. C. Pugh, M. Shub Invariant manifolds, *Lecture Notes in Math.*, Vol. 583, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1977.

изведений над сдвигом Бернулли, в каждом из которых большая часть аттрактора невидима с показателем 2^{-n^k}, где k равно одной трети хаусдорфовой размерности фазового пространства. Послойные диффеоморфизмы в этом примере структурно устойчивы. Параметр $\frac{1}{n}$ (с точностью до умножения на константу) оценивает снизу расстояние от послойных диффеоморфизмов до структурно неустойчивых диффеоморфизмов. Радиус шара в пространстве косых произведений, в котором работает предложенная в работе конструкция, имеет порядок $\frac{1}{n^2}$.

Обозначим через I отрезок $[-1, 2]$, и для каждого $k \geq 2$ рассмотрим гладкое вложение k-мерного куба $Q := I^k$ в k-мерную сферу $M := S^k$. На M возьмем гладкую меру μ, такую, что $\mu|_Q$ совпадает с точностью до умножения на константу со стандартной лебеговой мерой на кубе, $\mu(Q) = 3^k$. Обозначим через $\mathcal{D}$ пространство диффеоморфизмов $f\colon M \to M$ с C^1-метрикой, а через $\mathcal{D}(L)$ множество диффеоморфизмов $f \in \mathcal{D}$, таких, что $\operatorname{Lip} f \leq L, \operatorname{Lip} f^{-1} \leq L$.

Пусть Σ^2 — множество последовательностей из нулей и единиц, бесконечных в обе стороны:

$$\Sigma^2 = \{\omega = (\ldots, \omega_{-1}, \omega_0, \omega_1, \ldots) \,|\, \omega_i \in \{0, 1\},\ i \in \mathbb{Z}\},$$

а $\sigma\colon \Sigma^2 \to \Sigma^2$ — сдвиг Бернулли:

$$(\sigma\omega)_i = \omega_{i+1}.$$

На множестве Σ^2 введём стандартную метрику

$$d(\omega^1, \omega^2) = \begin{cases} 2^{-m},\ \text{где } m = \min\{i \geq 0 \,|\, \omega^1_{-i} \neq \omega^2_{-i} \text{ или } \omega^1_i \neq \omega^2_i\},\ \text{при } \omega^1 \neq \omega^2, \\ 0,\ \text{при } \omega^1 = \omega^2, \end{cases}$$

и стандартную меру Бернулли μ_Σ, которая определяется своими значениями на цилиндрических множествах

$$\mu_\Sigma\{\omega \,|\, \omega_{i_1} = j_1, \ldots, \omega_{i_m} = j_m\} = 2^{-m}.$$

По определению эта мера инвариантна относительно σ.

Рассмотрим теперь метрическое пространство с мерой

$$X := (\Sigma^2)^k \times M,$$

мера μ_X на котором задана как декартово произведение μ_Σ и μ.

Ступенчатое косое произведение F определяется формулой

$$F\colon X \to X,\ (\omega, x) \mapsto (\sigma\omega, f_{\omega_0}(x)),\ f_{\omega_0} \in \mathcal{D}, \tag{2}$$

где σ — декартово произведение k копий сдвига Бернулли. Здесь послойное отображение f_{ω_0} зависит только от нулевого вектора в последовательности ω. Такая локально постоянная зависимость напоминает ступенчатые функции, откуда и позаимствован термин. Будем обозначать через $C^1_{p,k}$ пространство ступенчатых косых произведений со следующей метрикой:

$$d(F, G) = \max_{\omega_0} d_{C^1}(f^{\pm 1}_{\omega_0}, g^{\pm 1}_{\omega_0}). \tag{3}$$

В случае, если все f_{ω_0} принадлежат $\mathcal{D}(L)$ для некоторого L, будем писать $F \in C^1_{p,k}(L)$.

Также введем обозначение π_i для проекций

$$\pi_i\colon \left(\Sigma^2\right)^k \times Q \to I,\ (\omega, x_1, \dots, x_k) \mapsto x_i. \tag{4}$$

Теорема 4. *Для любых $n > 100$ и $k \geq 2$ существует шар $\mathcal{B}_p \subset C^1_{p,k}(L)$, $L < 2$, радиуса $c\nu^2$, где $\nu = \frac{1}{n}$, в метрике (3), константа c не зависит от n и k. В каждом косом произведении $G \in \mathcal{B}_p$ большая часть статистического аттрактора принадлежит ε-невидимому множеству R,*

$$\varepsilon = 2^{-n^k},$$

где для определения аттрактора и невидимости используется мера μ_X. Точнее, $\pi A_{stat} G \subset Q$, и

$$Q^- := [5\nu, 1 - 5\nu]^k \subset \pi A_{stat} G \subset [-2\nu, 1 + 2\nu]^k =: Q^+; \tag{5}$$

в то время как

$$R = \pi_k^{-1}\left(-2\nu, \frac{1}{10}\right) \tag{6}$$

ε-невидимо для указанного ε.

Замечание 5. Главное в этом результате — независимость от n константы Липшица L. Если же разрешить L зависеть от n, то нетрудно привести пример сколь угодно сильной ε-невидимости. Однако такие динамические системы будут стремиться к вырожденным системам при $n \to +\infty$. Подробнее об этом рассказано в работе Ю. С. Ильяшенко и А. Негута[10].

Сдвиг Бернулли является частным случаем произвольной транзитивной топологической цепи Маркова Σ. Определение косого произведения над цепью Маркова даётся совершенно аналогично (2). В **главе 3** рассматриваются косые произведения над цепью Маркова со слоем отрезок $I = [0, 1]$. Предполагается, что на базе зафиксирована некоторая эргодическая марковская мера ν.

Для формулировки основных результатов необходимо привести следующие определения:

Определение 6. Замкнутое множество в косом произведении называется *тонким*, если оно пересекает почти все в смысле меры ν слои по одной точке.

Тонкое множество может быть представлено в виде объединения графика некоторой функции $\phi\colon \Sigma \to I$ и некоторого множества, проекция которого на Σ имеет меру нуль.

Определение 7. Тонкое множество *непрерывно*, если соответствующая функция ϕ непрерывна.

Для функций $\phi_1, \phi_2\colon \Sigma \to I$ будем писать $\phi_1 < \phi_2$, если

$$\forall \omega \in \Sigma \quad \phi_1(\omega) < \phi_2(\omega).$$

Также в этом случае будем писать $\gamma_{\phi_1} < \gamma_{\phi_2}$ для их графиков γ_{ϕ_1} и γ_{ϕ_2}. В силу того, что косое произведение переставляет слои, образ $F(\gamma_\phi)$ графика γ_ϕ любой функции $\phi\colon \Sigma \to I$ также будет графиком некоторой функции.

Определение 8. График γ *движется вверх (вниз)*, если $F(\gamma) > \gamma$ ($F(\gamma) < \gamma$).

Определение 9. Для любых двух непрерывных $\phi_1, \phi_2\colon \Sigma \to I$, таких, что $\phi_1 < \phi_2$, *полосой, ограниченной графиками* ϕ_1 *и* ϕ_2, называется множество

$$S_{\phi_1,\phi_2} := \{(\omega, x) \,|\, \phi_1(\omega) \le x \le \phi_2(\omega)\}.$$

Определение 10. Полоса S_{ϕ_1,ϕ_2} называется *поглощающей*, если $F(\phi_1) > \phi_1$ и $F(\phi_2) < \phi_2$, и *выталкивающей*, если $F(\phi_1) < \phi_1$ и $F(\phi_2) > \phi_2$.

Замечание 11. Если $\phi_1 < \phi_2$, то в силу монотонности послойных отображений неравенство $F^n(\phi_1) < F^n(\phi_2)$ выполнено для всех $n \geq 0$. Также оно выполнено для всех $n < 0$, для которых соответствующие прообразы определены. Следовательно, для всех $n \geq 0$ образ $F^n(S_{\phi_1,\phi_2})$ также является (непустой) полосой. Кроме того, это означает, что всякая поглощающая полоса имеет непустой максимальный аттрактор:

$$A_{\max}(S_{\phi_1,\phi_2}) := \bigcap_{n=0}^{+\infty} F^n(S_{\phi_1,\phi_2}).$$

Определение 12. SRB[13,14,15]-мера μ — это такая F-инвариантная мера, что

$$\int_{\Sigma\times I} \varphi\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(F^i(x))$$

для почти всех $x \in \Sigma \times I$ и для любой $\varphi \in C(\Sigma \times I)$.

Наконец, косое произведение называется ступенчатым, если послойное отображение зависит лишь от нулевого символа в базе. Динамику таких косых произведений описывает следующая основная теорема:

Теорема 13. *Для типичного косого произведения фазовое пространство покрывается объединением конечного числа поглощающих и выталкивающих полос. При этом*

1. *максимальный аттрактор каждой из поглощающих полос — тонкое непрерывное множество; также являются тонкими непрерывными репеллеры (максимальные аттракторы для обратного отображения) в выталкивающих полосах. Впрочем, над исключительным множеством меры нуль как аттракторы, так и репеллеры могут пересекать соответствующие слои по целым отрезкам — «костям»;*

2. *в каждой из поглощающих и выталкивающих полос имеется ровно одна эргодическая инвариантная мера, проецирующаяся в меру Маркова в базе.*

[13] Я. Г. Синай. Гиббсовские меры в эргодической теории, *Успехи Математических Наук*, 27:4 (1972), с. 21–69.

[14] D. Ruelle. A measure associated with Axiom A attractors, *Amer. J. Math.*, 98 (1976), pp. 619–654.

[15] R. Bowen. Equilibrium states and ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, *Springer Lecture Notes in Math*, 470 (1975).

А именно, это мера, полученная подъёмом меры Маркова на аттрактор (или репеллер), рассматриваемый, как график измеримой определённой почти всюду функции. Также эта мера является SRB-мерой в своей полосе;

3. *показатели Ляпунова вдоль слоя этих мер отличны от нуля;*

4. *аттракторы и репеллеры упорядочены по вертикали: их графики попарно сравнимы, причем их можно упорядочить так, чтобы аттракторы и репеллеры строго чередовались.*

Дополнительные определения, требуемые для точной формулировки условия типичности, приводятся в тексте самой диссертации. Типичные ступенчатые косые произведения образуют открытое плотное множество.

После доказательства теоремы 13 рассматриваются мягкие (неступенчатые) косые произведения.

Определение 14. Мягкое косое произведение $F\colon (\omega, x) \mapsto (\sigma\omega, f_\omega(x))$ называется (L, C, α)-*гёльдеровым*, если отображение $f_{(\cdot)}\colon \Sigma \to C^1(I)$, $\omega \mapsto f_\omega$ гёльдерово с показателем α и константой C, а константа Липшица любого послойного отображения $f_\omega\colon I \to I$, а также обратного к нему, не превосходит L.

Естественным аналогом частичной гиперболичности для гёльдеровых косых произведений является следующее условие:

Определение 15. Числа L, α удовлетворяют условию *согласованности констант*, если $L < 2^\alpha$.

При наличии условия согласованности констант теорема 13 доказывается и для типичных мягких косых произведений. Здесь типичные косые произведения образуют остаточное подмножество систем с условием согласованности констант.

Автор выражает глубокую и искреннюю благодарность своему научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Юлию Сергеевичу Ильяшенко, за постановку задач, постоянное внимание к работе, ценные советы и вдохновляющие обсуждения.

Работы автора по теме диссертации

1. *Волк Д. С.* Плотность сепаратрисных связок в пространстве полиномиальных слоений в $\mathbb{C}P^2$ // Труды МИАН имени Стеклова, **254**, 2006, с. 181–191.

2. *Волк Д. С.* Теорема о плотности сепаратрисных связок для полиномиальных слоений в $\mathbb{C}P^2$ // Фундаментальная. и прикладная математика, **12:4**, 2006, с. 53–64.

3. *Волк Д. С.* Плотность сепаратрисных связок в $\mathbb{C}^2$ // Конференция им. И.Г. Петровского, Сборник тезисов, 2004, с. 241.

4. *Волк Д. С.* Каскады ε-невидимости // Депонировано в ВИНИТИ (2010), №77-В2010, с. 1–38.

5. *V. Kleptsyn, D. Volk.* Thin attractors // Topology, Geometry and Dynamics: Rokhlin Memorial, Abstracts, 2010, pp. 70-72

В работе [5] В. А. Клепцыну принадлежат теоретико-вероятностные идеи, а Д. С. Волку геометрические построения.