Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 512.555.4, 512.555.6

Шавгулидзе Наталия Евгеньевна

Радикалы решеточно упорядоченных колец

Специальность:
01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Михалев Александр Васильевич.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук, профессор
Кожухов Игорь Борисович;
кандидат физико-математических наук, профессор
Ширшова Елена Евгеньевна.

Ведущая организация:
Тульский государственный педагогический университет
имени Л.Н. Толстого.

Защита диссертации состоится 14 мая 2010 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д.1, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Автореферат разослан 14 апреля 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного
совета Д.501.001.84 при МГУ
доктор физ.-мат. наук, профессор А. О. Иванов

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Начало общей теории радикалов колец было положено Курошем и Амицуром в 1953 году. В своей работе[1] А. Г. Курош ввел основные понятия теории радикалов, а также указал основные методы их построения; им были описаны характеристики радикальных и полупростых классов, построение нижнего и верхнего радикала, порожденного данным классом колец (алгебр). Монография В. А. Андрунакиевича и Ю. М. Рябухина[2] подвела итог общей теории радикалов в 80-х годах.

Теория радикалов помогает понять строение колец (алгебр) с помощью разбиения на полупростые и радикальные, которые уже проще описать. В XX веке было найдено большое число радикалов, которые нашли многочисленные применения в разных областях современной теории колец.

Важную роль в теории ассоциативных колец играет лемма Андерсона–Дивинского–Сулинского[3], которая говорит о том, что радикал идеала кольца R является идеалом кольца R.

В работе В. А. Андрунакиевича, А. В. Андрунакиевича[4] радикал кольца представляется в виде пересечения односторонних идеалов, для каждого из которых выполнено условие: факторкольцо по наибольшему идеалу, содержащемуся в данном правом идеале, является полупростым. Там же наднильпотентный радикал кольца представляется в виде пересечения правых полупервичных идеалов с тем же условием.

В работе В. А. Андрунакиевича[5] из класса наднильпотент-

[1] Курош А. Г. *Радикалы колец и алгебр*, Матем. сб., 1953, **33**, номер 1, стр. 13-26

[2] Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. *Радикалы алгебр и структурная теория*, Москва, Наука, 1979

[3] Anderson T., Divinsky N., Sulinski A. *Hereditary radicals in associative and alternative rings*, Canadian Journal of Mathematics, Vol 17, pp. 594-603, 1965

[4] Андрунакиевич В.А., Андрунакиевич А.В. *Односторонние идеалы и радикалы колец*, ДАН СССР, т.259 №1, стр.11-15, 1981

[5] Андрунакиевич В.А. *Радикалы ассоциативных колец, I*, Математический сборник, 44, №2, стр.179-212, 1958

ных радикалов выделен класс специальных радикалов, которому принадлежит значительная часть известных радикалов. В работе В. А. Андрунакиевича[6] появляется понятие первичного модуля для характеризации первичного радикала.

В. А. Андрунакиевич, Ю. М. Рябухин[7] показали, что с помощью первичных модулей можно охарактеризовать специальные радикалы. Они определяют специальный класс модулей и показывают, что он задает радикал и что он связан со специальным классом колец. Если задан специальный класс колец, то специальный радикал кольца R представляется в виде пересечения аннуляторов R-модулей из соответствующего специального класса модулей. Приводятся примеры специальных классов модулей, в том числе класс всех первичных модулей.

Плодотворной оказалась идея распространить теорию радикалов на решеточно упорядоченные кольца (l-кольца), что видно на примере исследований, проведенных в работах А. В. Михалева и М. А. Шаталовой.

М. А. Шаталова[8] вводит понятия l-первичного и l-полупервичного l-идеала l-кольца и определяет радикал в классе l-колец аналогично тому, как он был определен Курошем для колец. В этой работе М. А. Шаталова изучает два радикала, определенные в классе решеточно упорядоченных колец: A-радикал и I-радикал, и показывает их связь между собой. В другой статье[9] М. А. Шаталова вводит понятие специального класса решеточно упорядоченных колец, аналогичное определению В. А. Андрунакиевича для колец. В статье показано, что специальными классами являются класс всех l-первичных l-колец, класс всех l-первичных l-колец без локально нильпотентных l-идеалов, класс l-колец, не содержащих строго

[6]Андрунакиевич В.А. *Первичные модули и радикал Бэра*, Сиб. мат. журн., т.2, номер 6, стр.801-806, 1961

[7]Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. *Специальные модули и специальные радикалы*, ДАН СССР, т.147, стр.1274-1277, 1962

[8]Шаталова М.А. *l_A- и l_I-кольца*, Сибирский математический журнал, т.7, №6, стр.1383-1389, 1966

[9]Шаталова М.А. *К теории радикалов в структурно упорядоченных кольцах*, Математические заметки, т.4, №6, стр.639-648, 1968

положительных делителей нуля, класс подпрямо неразложимых l-колец с l-идемпотентной сердцевиной.

А. В. Михалев и М. А. Шаталова[10] изучили первичный радикал в классе решеточно упорядоченных колец, определенный как пересечение всех l-первичных l-идеалов; доказали, что он совпадает с множеством элементов l-кольца, модуль которых принадлежит первичному радикалу, определенному в классе всех колец (равному пересечению всех первичных идеалов). А также ими было доказано, что он совпадает с пересечением минимальных l-первичных l-идеалов и со множеством всех строго l-нильпотентных элементов. В работах А. В. Михалева и М. А. Шаталовой[11],[12] содержится целый ряд интересных результатов в области упорядоченных модулей.

Диссертация посвящена дальнейшему исследованию радикальных классов решеточно упорядоченных колец.

Цель работы — изучение радикалов решеточно упорядоченных колец, получение их характеризации с помощью односторонних l-идеалов и с помощью аннуляторов решеточно упорядоченных модулей. Изучение специальных классов l-колец и специальных радикалов.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа изложена на 74 страницах и состоит из введения и пяти частей. Библиография включает 22 наименования.

Научная новизна

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем:

---

[10]Михалев А.В., Шаталова М.А. *Первичный радикал решеточно упорядоченных колец*, Сборник работ по алгебре, Москва, Изд-во МГУ, стр.178-184, 1989

[11]Михалев А.В., Шаталова М.А. *Проективные и свободные упорядоченные модули* // Матем. заметки, **11**, номер 1, стр. 41-52, 1972

[12]Михалев А.В., Шаталова М.А. *Свободные упорядоченные модули* // Матем. заметки, **12**, номер 4, стр. 477-487, 1972

1. Доказано, что наднильпотентный радикал l-кольца равен пересечению всех l-полупервичных правых l-идеалов l-кольца, таких что факторкольцо по наибольшему l-идеалу, содержащемуся в данном правом l-идеале, является полупростым.

2. Доказано, что специальный радикал l-кольца равен пересечению всех правых l-первичных l-идеалов, таких что факторкольцо по наибольшему l-идеалу, содержащемуся в данном правом l-идеале, принадлежит специальному классу. Доказано, что первичный радикал l-кольца равен пересечению всех правых l-полупервичных l-идеалов.

3. Доказан аналог леммы Андерсона–Дивинского–Сулинского для случая специального радикала в классе l-колец.

4. Доказано, что специальный радикал l-кольца R представляется в виде пересечения l-аннуляторов l-модулей над R, принадлежащих специальному классу. В частности, первичный радикал l-кольца представляется в виде пересечения l-аннуляторов всех l-первичных l-модулей над R.

Основные методы исследования

Для изучения специальных радикалов в классе решеточно упорядоченных колец используются классические методы теории колец и упорядоченной алгебры, а также развитые автором методы работы со специальными элементами l-колец.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретический характер. Доказанные в диссертации теоремы представляют интерес для теории колец и упорядоченной алгебры.

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались на научно-исследовательском семинаре по алгебре (сентябрь 2009); на семинаре „Кольца и модули“ (октябрь 2009) на механико-математическом факультете МГУ; на международной алгебраической конференции, посвящённой 100-летию со дня рождения профессора А. Г. Куроша (Москва, 28 мая — 3 июня 2008 г.); на семинаре факультета математики университета Фурье г. Гренобля, Франция, в 2007 году.

Публикации автора по теме диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в трех работах автора, список которых приведен в конце автореферата [1–3].

Краткое содержание работы

Диссертация состоит из введения, пяти глав и списка литературы. Во введении изложена краткая история вопроса и обоснована актуальность темы диссертации.

Первая глава носит предварительный характер. В основном, результаты первой главы были известны ранее. Их можно найти в книгах Г. Биркгофа[13], Л. Фукса[14], А. Бигара, К. Каймела, С. Вольфенштейна[15].

В части 1.1 первой главы приводятся необходимые свойства элементов l-кольца. В части 1.2 приводятся свойства l-гомоморфизма l-колец. В части 1.3 дается определение l-идеала, правого l-идеала и изучаются их свойства.

Часть 1.4 посвящена теоремам об изоморфизме. Приводятся первая и вторая теоремы об изоморфизме (см. книгу А. Бигара,

[13]Биркгоф Г. *Теория решеток*, Москва, Мир, 1984

[14]Фукс Л. *Частично упорядоченные алгебраические системы*, Москва, Наука, 1965

[15]Bigard A., Keimel K., Wolfenstein S. *Groups et anneaux reticules*, Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1977

К. Каймела, С. Вольфенштейна[16]). Уточняется третья теорема об изоморфизме. В работе М. А. Шаталовой[17] доказывается третья теорема об изоморфизме для случая, когда A и I являются l-идеалами l-кольца R. Известно, что для колец теорема остается верной, если A является только подкольцом в R. В работе В. И. Арнаутова[18] показано, что для топологических колец аналогичная теорема не верна, так как если A — топологическое подкольцо, а I — идеал топологического кольца R, то $A+I$ не является топологическим кольцом; теорема будет верна, если A является идеалом. Однако в случае l-колец аналогичная теорема верна.

Третья теорема об изоморфизме для l-колец. Пусть R — l-кольцо, A — l-подкольцо, I — l-идеал l-кольца R. Тогда $A+I$ — l-кольцо, $A \cap I$ — l-идеал l-кольца A, I — l-идеал l-кольца $A+I$ и l-кольца $(A+I)/I$ и $I/(A \cap I)$ изоморфны.

В пунктах 1.5 и 1.6 изучаются пересечения и суммы l-идеалов, а также l-идеалы, порожденные подмножествами l-кольца, необходимые для доказательства теорем в дальнейшем.

Во второй главе мы вводим определения l-первичного и l-полупервичного правого l-идеала.

Определение 3. Правый l-идеал P l-кольца R называется *l-первичным*, если $P \neq R$ и выполнено условие:

(1) для любых правых l-идеалов $A,\ B$ l-кольца R, если $AB \subseteq P$, то либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$, где

$$AB = \{z = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mid x_i \in A,\ y_i \in B,\ n \in \mathbf{N}\}.$$

Определение 5. Правый l-идеал S l-кольца R называется *l-полупервичным*, если для любого правого l-идеала A l-кольца R из

[16]Bigard A., Keimel K., Wolfenstein S. *Groups et anneaux reticules*, Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1977

[17]Шаталова М.А. *l_A- и l_I-кольца* // Сибирский математический журнал, т.7, №6, стр.1383-1389, 1966

[18]Arnautov V.I. *Properties of one-sided ideals of topologocal rings* // Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova, Matematica, n.1(60), pp. 3-14, 2006

$A^2 \subseteq S$ следует, что $A \subseteq S$, где

$$A^2 = \{z = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mid x_i, y_i \in A,\ n \in \mathbf{N}\}.$$

Далее, мы показываем, что для двустороннего l-идеала эти определения совпадают с определениями М. А. Шаталовой l-первичного и l-полупервичного l-идеала. То есть мы доказываем, что для любого l-идеала P l-кольца R следующие условия эквивалентны(см. теоремы 2.1.1 и 2.2.1):

1) Для любых l-идеалов A, B l-кольца R, если $AB \subseteq P$, то либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$ (то есть P — l-первичный l-идеал).

2) Для любых правых l-идеалов A, B l-кольца R, если $AB \subseteq P$, то либо $A \subseteq P$, либо $B \subseteq P$.

Для любого l-идеала S l-кольца R следующие условия эквивалентны:

1) Факторкольцо R/S не содержит ненулевых нильпотентных l-идеалов (то есть S — l-полупервичный l-идеал).

2) Для любого правого l-идеала A l-кольца R, если $A^2 \subseteq S$, то $A \subseteq S$.

В третьей главе доказываются теоремы о представлении радикала l-кольца в виде пересечения односторонних l-идеалов.

Теорема 3.1.1. Пусть ρ — радикал в классе l-колец. Тогда для любого l-кольца R имеет место равенство

$$\rho(R) = \bigcap_{Q \in \Lambda} Q,$$

где Λ — множество всех правых l-идеалов Q l-кольца R, для которых факторкольцо по наибольшему l-идеалу, содержащемуся в данном правом l-идеале Q, является ρ-полупростым l-кольцом.

Теорема 3.1.2. Если ρ — наднильпотентный радикал в классе l-колец, то для любого l-кольца R имеет место равенство

$$\rho(R) = \bigcap_{Q \in \Lambda} Q,$$

где Λ — множество всех l-полупервичных правых l-идеалов Q l-кольца R, для которых факторкольцо по наибольшему l-идеалу, содержащемуся в данном правом l-идеале Q, является ρ-полупростым l-кольцом.

Далее мы изучаем специальный класс l-колец. Известно, что он задает радикал, называемый специальным, класс l-колец, не отображающихся гомоморфно на l-кольца из специального класса (под гомоморфизмом подразумевается l-гомоморфизм), является радикальным. Мы доказываем, что радикал, определяемый специальным классом является наследственным и радикал не радикального l-кольца R можно представить в виде пересечения всех l-первичных правых l-идеалов Q l-кольца R, для которых факторкольцо по наибольшему l-идеалу, содержащемуся в данном правом l-идеале Q, принадлежит специальному классу (теорема 3.3.4).

Для колец есть лемма Андерсона–Дивинского–Сулинского, которая говорит о том, что радикал идеала кольца является идеалом (см. [19] или [20] гл. 2 §4). К. Салавова[21] доказала, что для колец с инволюцией эта лемма не верна. Мы показываем, что аналогичное утверждение верно для специального радикала l-кольца: специальный радикал l-идеала I l-кольца R является l-идеалом l-кольца R, при этом выполняется равенство $\rho(I) = I \cap \rho(R)$ (теорема 3.3.5).

В четвертой главе мы изучаем класс всех l-первичных l-колец и класс всех l-колец без положительных делителей нуля. В работе М. А. Шаталовой [22] вводится понятие l-первичного радикала $\rho(R)$ l-кольца R, равного пересечению всех l-первичных l-идеалов l-кольца R. Доказывается, что класс l-колец без положительных делителей нуля является специальным. В работе А. В. Михалева,

[19] Anderson T., Divinsky N., Sulinski A. *Hereditary radicals in associative and alternative rings* // Canadian Journal of Mathematics, Vol 17, pp. 594-603, 1965

[20] Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. *Радикалы алгебр и структурная теория*, Москва, Наука, 1979

[21] Салавова К. *Радикалы колец с инволюцией 1* // Comment. Math. Univ. Carolinae, n.18, pp. 367-381, 1977

[22] Шаталова М.А. *К теории радикалов в структурно упорядоченных кольцах* // Математические заметки, т.4, №6, стр.639-648, 1968

М. А. Шаталовой [23] изучается l-первичный радикал l-кольца, вводится понятие строго l-нильпотентного элемента и доказывается, что l-первичный радикал l-кольца R совпадает с множеством всех строго l-нильпотентных элементов l-кольца R.

Мы доказываем, что l-первичный радикал l-кольца равен пересечению всех правых l-полупервичных l-идеалов l-кольца (теорема 4.1.2).

Мы называем правый l-идеал T l-кольца R *вполне l-первичным*, если из $ab \in T$, где $a > 0$, $b > 0$, $a, b \in R$, $a \notin T$ следует, что $b \in T_g$. Доказываем, что специальный радикал l-кольца R, определяемый классом всех l-колец без положительных делителей нуля, равен пересечению всех вполне l-первичных правых l-идеалов l-кольца R (теорема 4.2.1).

В пятой главе специальные радикалы представляются в виде пересечения l-аннуляторов решеточно упорядоченных модулей.

В работе В. А. Андрунакиевича, Ю. М. Рябухина [24] вводится определение специального класса модулей, показывается, что он задает радикал и что он связан со специальным классом колец. Если задан специальный класс колец, специальный радикал кольца R представляется в виде пересечения аннуляторов R-модулей из соответствующего специального класса модулей. Приводятся примеры специальных классов модулей, в том числе класс всех первичных модулей.

Мы показываем, что утверждения, аналогичные утверждениям из работы В. А. Андрунакиевича, Ю. М. Рябухина, можно доказать для l-колец и решеточно упорядочных модулей (l-модулей). Специальный радикал l-кольца R можно представить в виде пересечения l-аннуляторов l-модулей над R из соответствующего специального класса. В том числе l-первичный радикал l-кольца R можно представить в виде пересечиния l-анулляторов всех l-первичных

[23]Михалев А.В., Шаталова М.А. *Первичный радикал решеточно упорядоченных колец* // Сборник работ по алгебре, Москва, Изд-во МГУ, стр.178-184, 1989

[24]Андрунакиевич В.А., Рябухин Ю.М. *Специальные модули и специальные радикалы*, ДАН СССР т.147, стр.1274-1277, 1962

l-модулей над R.

Мы называем правый модуль M_R над l-кольцом R правым *l-модулем*, если M — l-группа и для любых $r \in R,\ x, y \in M$, таких что $r > 0,\ x \leq y$, выполняется неравенство $xr \leq yr$.

Мы называем *l-аннулятором* правого l-модуля M над l-кольцом R множество $(0 : M)_R = \{r \in R |\ M|r| = 0\}$.

Мы называем правый l-модуль M_R *l-точным*, если его l-аннулятор равен нулю.

Мы называем правый l-модуль M над l-кольцом R *l-первичным*, если $MR \neq 0$ и для любых $0 < x \in M$ и l-идеала B l-кольца R из $xB = 0$ следует, что $B \subseteq (0 : M)_R$.

Мы называем класс правых l-модулей $\Sigma = \bigcup\limits_R \Sigma_R$ *специальным*, если он удовлетворяет следующим условиям:

(S1) Если $M \in \Sigma_R$, то M — l-первичный l-модуль.

(S2) Если $M \in \Sigma_{\overline{R}}$, где $\overline{R} = R/A$, A — l-идеал в R, то $M \in \Sigma_R$.

Обратно, если $M \in \Sigma_R$ и A — l-идеал в R, $A \subseteq (0 : M)_R$, то $M \in \Sigma_{\overline{R}}$,

(композиция $xr = x\overline{r}$).

(S3) Если $M \in \Sigma_R$, B — l-идеал в R, $MB \neq 0$, то $M \in \Sigma_B$.

(S4) Если $0 \neq B$ — l-идеал в R, где R — l-первичное l-кольцо и существует l-точный $M_B \in \Sigma_B$, то существует l-точный $N_R \in \Sigma_R$.

Мы доказываем следующие результаты:

Теорема 5.2.1. 1) Пусть $\Sigma = \bigcup \Sigma_R$ — специальный класс (правых) l-модулей и $\mathcal{K}_\Sigma$ — класс l-колец со свойством:

(K) $R \in \mathcal{K}_\Sigma$ тогда и только тогда, когда существует l-точный $M \in \Sigma_R$.

Тогда $\mathcal{K}_\Sigma$ — специальный класс l-колец.

2) Если $\mathcal{K}$ — специальный класс l-колец, то класс l-модулей $\Sigma^{\mathcal{K}} = \bigcup \Sigma_R^{\mathcal{K}}$ со свойством:

(S) $M \in \Sigma_R^{\mathcal{K}}$ тогда и только тогда, когда $R/(0 : M)_R \in \mathcal{K}$ и M — l-первичный R-модуль,

является специальным классом l-модулей.

С помощью теоремы 5.2.1 специальный радикал l-кольца представляем в виде пересечения l-аннуляторов l-модулей над ним:

Предложение 5.2.2. Если $\Sigma = \bigcup \Sigma_R$ — специальный класс (правых) l-модулей и $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\Sigma$ — специальный класс l-колец, определенный свойством (K) из теоремы 5.2.1, то соответствующий специальный радикал можно представить в виде

$$\rho(R, \mathcal{K}) = \bigcap_{M_\alpha \in \Sigma_R} \{(0 : M_\alpha)_R\}.$$

Далее мы показываем, что класс всех l-первичных (правых) l-модулей является специальным классом l-модулей и для любого l-кольца R l-первичный радикал $\rho(R)$ равен пересечению l-аннуляторов всех l-первичных l-модулей над R (предложение 5.2.3).

Благодарности

Благодарю моего научного руководителя доктора физико-математических наук, профессора Александра Васильевича Михалева за постановку задачи, постоянное внимание к работе и многочисленные советы.

Выражаю глубокую благодарность сотрудникам кафедры высшей алгебры Механико-математического факультета за внимание и поддержку.

Публикации по теме диссертации

[1] *Шавгулидзе Н.Е.* Радикалы l-колец и односторонние l-идеалы // Фунд. и прикл. матем. 2008. **14**, вып. 8. 233-245.

[2] *Шавгулидзе Н.Е.* Специальные классы l-колец и лемма Андерсона–Дивинского–Сулинского // Вестник МГУ, 2010. *№*2, 42-44.

[3] *Шавгулидзе Н.Е.* Специальные классы l-колец // Фунд. и прикл. матем. 2009. **15**, вып. 1. 157-173.