

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. ЛОМОНОСОВА
Механико-математический факультет**

На правах рукописи

Иванова Ольга Алексеевна

Механическое моделирование одномерного континуума Коссера

Специальность: 01.02.04 – механика деформируемого твёрдого тела

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук**

Москва 2010

Работа выполнена на кафедре теории упругости механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель:

Доктор физико-математических наук
профессор Г.Л. Бровко

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук
профессор А.А. Маркин
Доктор физико-математических наук
профессор А.Б. Киселёв

Ведущая организация:

Учреждение Российской Академии Наук Вычислительный
Центр имени А.А.Дородницына РАН

Защита состоится 16 апреля 2010 года в ___ часов на заседании специализированного совета Д 501.001.91 по механике при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119992, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория _____.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан «15» марта 2010 года.

Учёный секретарь
диссертационного совета Д 501.001.91

профессор

С.В. Шешенин

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования и актуальность темы

Исследования сплошных сред с неклассическими свойствами, заложенные классиками науки еще в XIX веке, нашедшие первое строгое воплощение в фундаментальном труде Коссера и получившие мощный толчок к развитию в 50-60-х годах XX века в работах отечественных и зарубежных исследователей, в последние годы составили научный интерес не только в теоретическом, но и в практическом плане в связи с актуальными задачами микроэлектроники, тонкой химической технологии, материаловедения, трибологии, инженерной биологии и других отраслей науки и техники.

Одной из актуальных проблем является технология изготовления материалов и конструктивных элементов (покрытий, пленок, волокон) с наперед заданными механическими свойствами как классического, так и неклассического типов. В связи с этим особую важность приобретает 1) разработка теоретических подходов к конструктивному моделированию материалов и элементов с механическими свойствами определенного типа, 2) оценка и прогнозирование их конкретных механических свойств, 3) выработка возможных рекомендаций по технологии их изготовления.

Имеющиеся модели в области моментных теорий (включая среды типа Коссера, одномерные и двумерные континуумы с моментными свойствами) носят феноменологический характер, оснащаются, как правило, гипотетическими материальными константами, характеризующими неклассические механические свойства, и не затрагивают вопрос о материальной микроструктуре, по существу определяющей особенности неклассических свойств материалов и конструкций (и величины констант). Более того, вопрос о существовании или возможности изготовления материальных элементов с механическими свойствами моментного типа не ставился.

В этом смысле продуктивным представляется подход механического (конструктивного) моделирования, предусматривающий учет (моделирование) микроструктуры представительного элемента континуума с присущими ему видами движений и взаимодействий, способный дать четкую наглядную интерпретацию материальным константам модели и прогнозировать ее свойства, позволяя тем самым решать поставленные три задачи, связанные с изготовлением материалов и конструктивных элементов с наперед заданными (моментными) свойствами.

Цель диссертационной работы

Целью настоящей работы стало изучение возможности конструктивного моделирования одномерного континуума Коссера, изучение особенностей его форм равновесия, форм собственных и вынужденных движений, выявление новых (в сравнении с классическими теориями) механических эффектов, исследование влияния конструктивных элементов на усредненные свойства

модели, оценка возможности управления материальными константами модели (прогнозирования свойств).

Научная новизна

1. С использованием предложенного А.А. Ильюшиным метода механического моделирования с осреднением в длинноволновом приближении построена система уравнений континуальной модели оснащенного стержня в плоских движениях, отвечающая уравнениям одномерного континуума Коссера. Изучены некоторые общие свойства такой упругой континуальной модели при произвольных деформациях.
2. После проведенной линеаризации поставлены задачи о собственных и вынужденных малых движениях оснащенного стержня. Для поперечных колебаний установлено наличие в каждой моде двух различных форм и частот. Впервые обнаружено явление неустойчивости вынужденных колебаний в виде экспоненциального одностороннего отклонения системы (дивергенция). Построен пример упругой конструкции антенного типа и проведены расчеты, иллюстрирующие общие выводы.
3. Впервые предложено обобщение модели на неупругие свойства — построение методом механического моделирования модели одномерного континуума Коссера с частично пластическими свойствами. Выведены уравнения этой модели для малых движений, отмечена неоднозначность решений задач статики в общем случае. Введены понятия предельных и чисто предельных состояний равновесия и показана однозначность решений в чисто предельных состояниях. Рассмотрены конкретные задачи статики и квазистатики.

Достоверность результатов

Достоверность полученных в диссертации результатов обусловлена применением известных подходов и методов, сравнением полученных результатов с известными. В исследовании использован метод механического моделирования, принцип виртуальных работ, соотношения классической теории тонких стержней, теории стержней Коссера, известного типа определяющие соотношения свойств упругости и пластичности (сухого трения), известные в механике классических сред подходы к исследованию колебаний и их устойчивости, построен пример конкретной конструкции оснащенного стержня Коссера, наглядно иллюстрирующий полученные теоретические результаты.

Научная и практическая ценность работы

Результаты диссертации могут быть использованы для инженерных расчетов подвесных и натяжных конструкций (вантовых мостов, линий электропередач), башен и вышек с утяжеленными поперечными платформами (в потоке воздуха, в подводных течениях). Работа также иллюстрирует возможность приложения метода механического моделирования к разработке технологий изготовления материалов и структур с наперед заданными неклассическими свойствами. Основные теоретические положения работы могут быть использованы в научно-технической и учебной литературе.

Апробация работы

Часть результатов работы получена и использована в рамках исследований по гранту РФФИ № 06-01-00565-а «Моделирование неоднородных сред сложной микроструктуры с учетом внутренних взаимодействий классического и неклассического типов».

Результаты работы докладывались и обсуждались:

- на научных семинарах кафедры теории упругости МГУ;
- на «Ломоносовских чтениях» (МГУ, 2003, 2006, 2007, 2008);
- на Международном коллоквиуме EUROMECH Colloquium-458 (Москва, Институт механики МГУ, сентябрь 2004);
- на Международной конференции «Современные проблемы математики, механики, информатики» (Тула, ТулГУ, 2004);
- на Международном научном симпозиуме по проблемам механики деформируемых тел, посвященном 95-летию со дня рождения А.А.Ильюшина (Москва, МГУ, январь 2006);
- на Международном семинаре «Геометрия, континуумы и микроструктуры (GCM7)» (Великобритания, Ланкастер, сентябрь 2006);
- на Международной конференции «Современный анализ и приложения (МАА 2007)» (Украина, Одесса, апрель 2007);
- на Международной конференции «Актуальные проблемы механики сплошной среды» (Армения, Цахкадзор, сентябрь 2007);
- на научных семинарах кафедры механики композитов, кафедры газовой и волновой динамики МГУ (2009), кафедры теории пластичности МГУ (2010)

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Объём работы составляет 89 страниц печатного текста, включая 13 иллюстраций. Список литературы содержит 80 наименований.

По теме диссертации опубликовано 5 работ, одна из них – в издании из списка ВАК. В совместных работах автору принадлежат конкретные разработки по теме диссертации.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении даётся краткий обзор литературы по теме диссертации и излагается краткое содержание диссертационной работы.

В первой главе в п. 1.1 с использованием метода механического моделирования, предложенного А.А. Ильюшиным, в работе построена дискретная модель «оснащенного стержня». Исходная конструкция, привлекаемая для моделирования одномерного континуума Коссера, представляет собой в недеформированном состоянии тонкий стержень длины l с помещёнными на его упругой линии через равные расстояния a жёсткими массивными дисками (включениями), способными вращаться в плоскости изгиба стержня вокруг своих осей симметрии, жёстко закреплённых на стержне и перпендикулярных плоскости его изгиба (рис. 1а).

Повороты дисков относительно упругой линии стержня регулируются упругими шарнирами. Будем предполагать диски также связанными друг с другом (с ближайшими соседями с обеих сторон) одинаковыми ременными передачами, обеспечивающими сопротивление относительно повороту охваченных ими соседних дисков. Ячейкой этой конструкции назовём повторяющийся элемент конструкции длины a , включающий один из дисков и два полустержня, примыкающих к месту крепления этого диска с двух сторон. Для изолированного рассмотрения ячейки как отдельной механической системы, примем, что ременные передачи связывают соседние массивные диски-включения через невесомые и не оказывающие сопротивления передаточные диски-шкивы того же диаметра, расположенные на торцах ячейки (рис. 1 и 2). Будем считать углы поворотов передаточных шкивов равными средним значениям углов поворота связываемых ими включений в соседних ячейках.

На рис. 1 изображён оснащённый стержень в недеформированной (а) и деформированной (б) конфигурациях. Массивные диски-включения изображены затенёнными кругами, передаточные невесомые шкивы – прозрачными кругами; штрихованные линии – ременные передачи. Ячейка конструкции выделена штрихпунктирным прямоугольником.

Будем рассматривать плоские движения конструкции (в плоскости Oxy), характеризуемые перемещениями узлов (мест крепления осей дисков), изгибом и растяжением стержневых элементов (совместно с растяжением ременных передач, не теряющих подходящего для зацепления дисков натяжения), а также вращением дисков вокруг своих осей симметрии (рис. 1б). Эти движения сопровождаются плоскопараллельной системой силовых и моментных внешних воздействий на конструкцию и внутренних взаимодействий её элементов (векторы силовых моментов перпендикулярны к плоскости). Деформированная конфигурация ячейки с внешними воздействиями и внутренними взаимодействиями изображена на рис. 2.

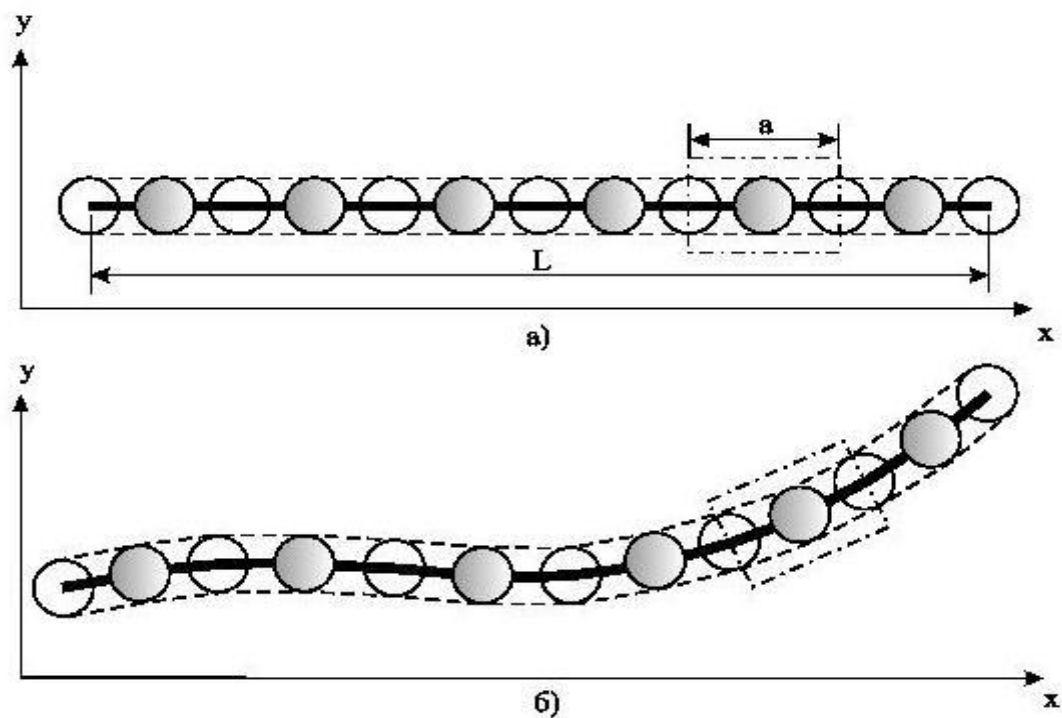


Рис. 1. Конструкция в недеформированной (а) и деформированной (б) конфигурациях.

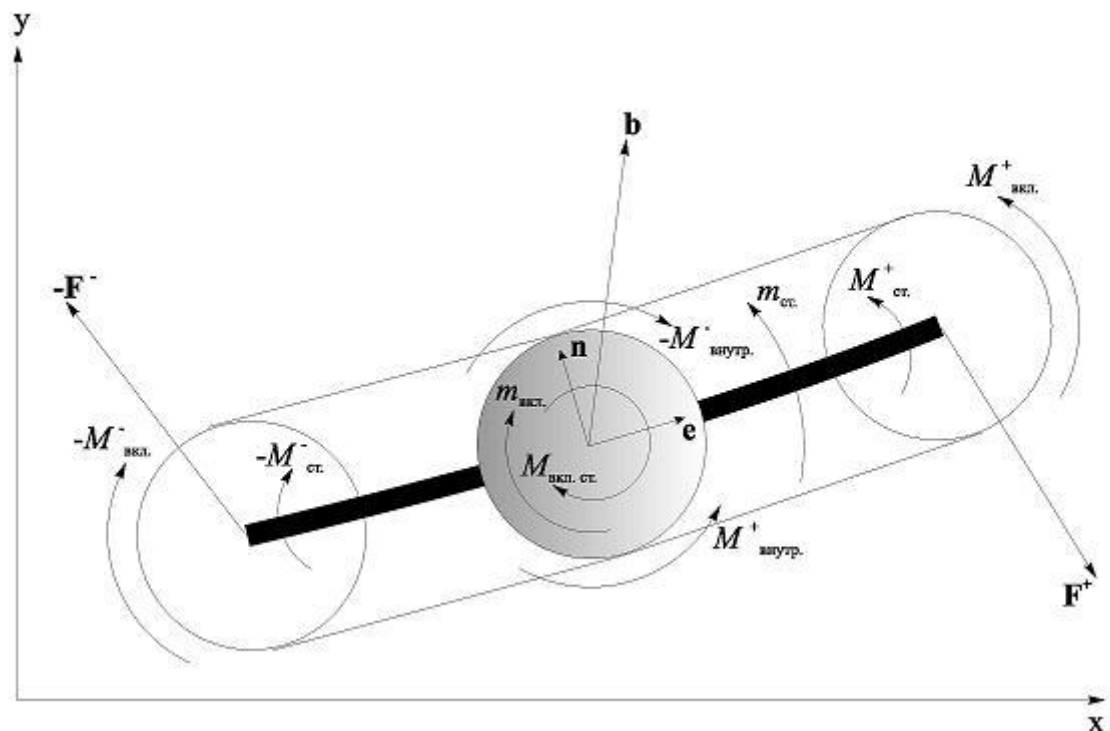


Рис. 2. Деформированная конфигурация ячейки с внешними воздействиями и внутренними силовыми и моментными взаимодействиями.

Внешними по отношению к ячейке силовыми и моментными воздействиями являются как внешние воздействия по отношению ко всей

конструкции: \mathbf{b} – суммарный вектор действующих на ячейку в целом внешних сил, $m_{ст.}$ – момент всех внешних сил, действующих на стержневой элемент ячейки, $m_{вкл.}$ – внешний момент, действующий на массивный диск-включение, – так и «внешние» воздействия со стороны остальных частей конструкции: \mathbf{F}^+ и \mathbf{F}^- – векторы сил, действующих на правый и на левый полустержни со стороны отброшенных правой и левой частей конструкции ($T^+ = \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{e}$, $T^- = \mathbf{F}^- \cdot \mathbf{e}$, $Q^+ = \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{n}$, $Q^- = \mathbf{F}^- \cdot \mathbf{n}$), $M_{ст.}^+$ и $-M_{ст.}^-$ – моменты, действующие на правый и на левый полустержни со стороны отброшенных частей конструкции, $M_{вкл.}^+$ и $-M_{вкл.}^-$ – моменты, действующие на правый и на левый передаточные шкивы со стороны дисков соседних ячеек.

Внутренними взаимодействиями в ячейке являются P^+ и P^- – силы сопротивления правого и левого полустержней растяжению, $M_{изг.}^+$ и $M_{изг.}^-$ – моменты сопротивления правого и левого полустержней изгибу, $M_{вкл. \rightarrow ст.}^*$ – момент воздействия включения на стержень, $M_{внутр.}^+$ и $-M_{внутр.}^-$ – моменты воздействия правого и левого передаточных шкивов на включение.

Обозначив массу ячейки через $m_{яч.}$, а момент инерции диска-включения через $J_{вкл.}$, учитывая инерционные члены среднего поступательного перемещения ячейки и вращательного движения массивного диска-включения, и пренебрегая инерционными членами относительного удлинения и вращения стержневых элементов и ременных передач, выписан явный вид выражения виртуальной работы всех внешних, внутренних и инерционных сил ячейки. Применяя принцип виртуальных работ, состоящий в выполнении равенства $\delta A = 0$ при произвольных вариациях кинематических параметров ячейки, множители при независимых вариациях приравниваем нулю. Таким образом получена система уравнений, сравнительная оценка величин входящих в которые слагаемых в рамках длинноволнового приближения с малым параметром $\alpha = \frac{a}{l}$ (l – длина стержня) показывает, что с

относительной погрешностью порядка α^2 уравнения приводятся к системе уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\delta} \mathbf{F}}{\tilde{\delta} \xi} + \tilde{\mathbf{f}} - \tilde{\rho} \ddot{\mathbf{r}} &= 0, \\ \frac{\tilde{\delta} M_{ст.}}{\tilde{\delta} \xi} + \tilde{Q} \lambda + \tilde{m} + \tilde{M}_{вкл. \rightarrow ст.} &= 0, \\ \frac{\tilde{\delta} M_{вкл.}}{\tilde{\delta} \xi} + \tilde{m}_в. - \tilde{M}_{вкл. \rightarrow ст.} - \tilde{J} \ddot{\phi}_{вкл.} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

совместно с уравнениями

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \tilde{P}, \quad \tilde{M}_{ст.} = \tilde{M}_{изг.}, \quad \tilde{M}_{вкл.} = \tilde{M}_{внутр.}, \\ \frac{\tilde{\partial T}}{\tilde{\partial \xi}} &= \frac{\tilde{\partial P}}{\tilde{\partial \xi}}, \quad \frac{\tilde{\partial M}_{ст.}}{\tilde{\partial \xi}} = \frac{\tilde{\partial M}_{изг.}}{\tilde{\partial \xi}}, \quad \frac{\tilde{\partial M}_{вкл.}}{\tilde{\partial \xi}} = \frac{\tilde{\partial M}_{внутр.}}{\tilde{\partial \xi}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь λ – кратность удлинения стержневого элемента ячейки, и использованы обозначения: $\tilde{\mathbf{f}} = \frac{\mathbf{b}}{a}$, $\tilde{m} = \frac{m_{ст.}}{a}$, $\tilde{m}_{в.} = \frac{m_{вкл.}}{a}$ для удельных (погонных по отношению к длине a ячейки в недеформированной конфигурации) внешних нагрузок, обозначения: $\tilde{M}_{вкл. \rightarrow ст.} = \frac{M_{вкл. \rightarrow ст.}^*}{a}$, $\tilde{\rho} = \frac{m_{яч.}}{a}$, $\tilde{J} = \frac{J_{вкл.}}{a}$ для удельного момента взаимодействия включения со стержнем, удельной плотности массы конструкции и удельного момента инерции включения, а также обозначения вида: $\tilde{A} = \frac{A^+ + A^-}{2}$, $\frac{\tilde{\partial A}}{\tilde{\partial \xi}} = \frac{A^+ - A^-}{a}$

для средних значений и разностных отношений величин A^+ и A^- , причём принято $T^+ = \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{e}$, $T^- = \mathbf{F}^- \cdot \mathbf{e}$, $Q^+ = \mathbf{F}^+ \cdot \mathbf{n}$, $Q^- = \mathbf{F}^- \cdot \mathbf{n}$.

Уравнения (1) являются непосредственно условиями динамического равновесия произвольной ячейки конструкции, а уравнения (2) означают «гладкое» совпадения «внешних» по отношению к ячейке силовых параметров \tilde{T} , $\tilde{M}_{ст.}$, $\tilde{M}_{вкл.}$, входящих в уравнения (1), с внутренними силовыми параметрами \tilde{P} , $\tilde{M}_{изг.}$, $\tilde{M}_{внутр.}$, задаваемыми механическими свойствами (определяющими соотношениями) ячейки.

В п. 1.2. рассмотрен простейший вид определяющих соотношений системы разделённых по энергетически сопряжённым парам и представленные линейными функциями:

$$\tilde{P} = C_{раст.} (\lambda - 1), \quad \tilde{M}_{изг.} = C_{изг.} \frac{\tilde{\partial \varphi}_{ст.}}{\tilde{\partial \xi}}, \quad \tilde{M}_{внутр.} = C_{вкл.} \frac{\tilde{\partial \varphi}_{вкл.}}{\tilde{\partial \xi}}, \quad (3)$$

$$\tilde{M}_{вкл. \rightarrow ст.} = C_{вкл. \rightarrow ст.} (\varphi_{вкл.} - \varphi_{ст.}).$$

Соотношения (3) выражают упругие свойства конструкции: $C_{раст.}$, $C_{изг.}$, $C_{вкл.}$, $C_{вкл. \rightarrow ст.}$ – константы упругого сопротивления растяжению, изгибу, взаимному повороту включений и повороту включений относительно стержня. В частности, при малых удлинениях стержня, когда $\lambda - 1 = \varepsilon \ll 1$, второе из соотношений (3) принимает традиционный для классической теории изгиба тонких стержней вид: $\tilde{M}_{изг.} = C_{изг.} \kappa$ (κ – кривизна упругой линии стержневого элемента).

Осреднение уравнений (1), (2) с учётом (3) в длинноволновом приближении (в пределе при $\alpha \rightarrow 0$) приводит к уравнениям одномерного

континуума Коссера (ρ – погонная плотность оснащённого стержня, J – погонный момент инерции вращения включений):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \mathbf{f} - \rho \ddot{\mathbf{r}} &= 0, \\ \frac{\partial M_{cm.}}{\partial \xi} + Q\lambda + m + M_{вкл. \rightarrow cm.} &= 0, \\ \frac{\partial M_{вкл.}}{\partial \xi} + m_{в.} - M_{вкл. \rightarrow cm.} - J\ddot{\varphi}_{вкл.} &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

совместно с тождествами

$$T \equiv P, \quad M_{cm.} \equiv M_{изг.}, \quad M_{вкл.} \equiv M_{внутр.} \quad (5)$$

В п. 1.3 с учётом тождеств (5) уравнения (4) движения конструкции записаны в собственных осях (\vec{s}^0, \vec{n}^0) деформированной конфигурации оснащённого стержня. Сравнение полученной системы с уравнениями Кирхгофа-Клебша показывает, что хотя в данном случае мы рассматриваем только плоское движение, тогда как уравнения Кирхгофа-Клебша написаны для трёхмерного случая, но здесь, в отличие от уравнений Кирхгофа-Клебша, учитывается удлинение стержня $\left(\lambda \equiv \frac{\partial s}{\partial \xi} \neq 1, \quad \xi \neq s \right)$ (s – длина дуги упругой линии стержня в деформированной конфигурации) и силы инерции $(\rho w_{\vec{s}^0}, \rho w_{\vec{n}^0})$ (здесь $w_{\vec{s}^0}, w_{\vec{n}^0}$ – компоненты вектора ускорения в собственных осях). Кроме того, поскольку рассматриваемый стержень оснащён массивными включениями, имеем дополнительно уравнение динамического равновесия системы включений, и в последних двух уравнениях системы (4) учитывается взаимодействие $M_{вкл. \rightarrow cm.}$ включений и стержня.

Рассмотрены состояния статического равновесия при отсутствии внешних распределённых нагрузок. Выделены специальные виды рассматриваемой модели оснащённого стержня: несвязанная модель, безмоментная модель и модель псевдоконтинуума Коссера, — для которых выведены интегралы энергии статического равновесия.

Для статического равновесия общей модели при произвольных деформациях, сопровождающихся условием $\frac{d^2 \varphi_{вкл.}}{ds^2} \equiv k \frac{d^2 \varphi_{cm.}}{ds^2}$ ($k = const$), получены общие представления форм равновесия стержня. Установлено, что для $\frac{d^2 \varphi_{вкл.}}{ds^2} \equiv \frac{d^2 \varphi_{cm.}}{ds^2}$ (то есть, когда константа пропорциональности k равна единице) возможен лишь случай одновременного тождественного равенства и самих функций $\varphi_{вкл.} \equiv \varphi_{cm.}$. Получено, что в этом случае реализуются два вида положений равновесия:

1. Стержень принимает прямолинейную форму, повороты включений отсутствуют.

2. Стержень принимает форму дуги окружности, включения повёрнуты на тот же угол, что и стержневые элементы. (Интеграл Эйлера в этом случае совпадает с таковым для псевдоконтинуума Коссера, то есть такого специального вида конструкции, в любой точке которого $\varphi_{вкл.} = \varphi_{ст.}$).

Во второй главе в п. 2.1 рассматривается система с упругими свойствами, испытывающая малые движения, сопровождающиеся малыми перемещениями u и w (в направлении координатных осей x и y соответственно), малыми относительными удлинениями $\varepsilon = \lambda - 1$ и малыми углами поворота элементов стержня $\varphi_{ст.}$ так, что независимые переменные ξ и x (и производные по этим переменным) могут быть отождествлены, проекции T и Q силы \mathbf{F} на векторы \mathbf{e} касательной и \mathbf{n} нормали к элементу стержня могут считаться проекциями на оси x и y соответственно, и выполнены приближённые равенства для кратности λ удлинения стержневого элемента, угла поворота $\varphi_{ст.}$ стержневого элемента и кривизны κ стержневого элемента:

$$\lambda \cong 1, \varphi_{ст.} \cong \frac{\partial w}{\partial x}, \kappa \cong \frac{\partial \varphi_{ст.}}{\partial x} \cong \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Кроме того, диапазоны изменения величин ε , κ , $\frac{\partial \varphi_{вкл.}}{\partial x}$, $\varphi_{вкл.} - \varphi_{ст.}$ считаются достаточно малыми, чтобы механические свойства системы могли быть представлены линейными соотношениями упругости (3), которые в рассматриваемом случае малых движений с учётом (6) могут быть записаны с использованием классических обозначений в виде:

$$P = ES_{сеч.} \varepsilon, M_{изг.} = EJ_{сеч.} \kappa, M_{внутр.} = C \frac{\partial \varphi_{вкл.}}{\partial x}, M_{вкл. \rightarrow ст.} = K(\varphi_{вкл.} - \varphi_{ст.}), \quad (7)$$

где E – модуль Юнга материала стержня, $S_{сеч.}$ – площадь поперечного сечения стержня, $J_{сеч.}$ – момент инерции поперечного сечения стержня, C – коэффициент жёсткости ременной передачи, K – константа упругости шарнирного крепления включений к стержню.

В этих обозначениях в силу (5), (6) уравнения (4) после подстановки определяющих соотношений (7) принимают вид:

$$ES_{сеч.} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_x = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + f_y = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (9)$$

$$EJ_{сеч.} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + m + Q + K \left(\varphi_{вкл.} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \quad (10)$$

$$C \frac{\partial^2 \varphi_{вкл.}}{\partial x^2} - K \left(\varphi_{вкл.} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + m_{в.} = J \frac{\partial^2 \varphi_{вкл.}}{\partial t^2}. \quad (11)$$

Здесь все константы, внешние силовые воздействия f_x, f_y (проекция силы \mathbf{f} на оси координат) и внешние моменты m, m_e считаются известными. Таким образом, четыре уравнения (8)-(11) составляют систему для четырёх неизвестных функций $u, w, \varphi_{\text{вкл.}}, Q$ от независимых переменных x и t .

Очевидно, что уравнение (8) не связано с остальными уравнениями системы и представляет собой уравнение распространения продольной волны со скоростью $c = \sqrt{S_{\text{сеч.}} \frac{E}{\rho}}$, где ρ обозначает погонную плотность массы оснащённого стержня. Для двух неизвестных функций w и $\varphi_{\text{вкл.}}$, исключая неизвестную величину Q , окончательно получаем систему из двух уравнений в частных производных (до четвёртого порядка включительно):

$$\begin{aligned} -EJ_{\text{сеч.}} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - K \frac{\partial \varphi_{\text{вкл.}}}{\partial x} - \frac{\partial m}{\partial x} + f_y &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ C \frac{\partial^2 \varphi_{\text{вкл.}}}{\partial x^2} - K \varphi_{\text{вкл.}} + K \frac{\partial w}{\partial x} + m_e &= J \frac{\partial^2 \varphi_{\text{вкл.}}}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (12)$$

В п. 2.2 для системы (12) рассмотрена задача о собственных колебаниях рассматриваемого упругого одномерного континуума при отсутствии внешних распределённых силовых и моментных воздействий ($f_y = 0$ и $m_e = 0$). Для стержня длины l приняты граничные условия в виде: стержень закреплён с обоих концов шарнирно, причём концы стержня и крайние диски-включения свободны от внешних моментных воздействий, что выражается формулами (при $x = 0$ и $x = l$):

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \varphi_{\text{вкл.}}}{\partial x} = 0. \quad (13)$$

Решение задачи (12), (13) ищется в виде:

$$w = (A \sin px) \cdot e^{i\omega t}, \quad \varphi_{\text{вкл.}} = (B \cos px) \cdot e^{i\omega t}, \quad (14)$$

где A и B – произвольные константы, p выражается формулой $p = \frac{\pi k}{l}$ ($k \in \mathbb{N}$), а ω – частота колебаний.

После подстановки этих выражений в уравнения (12) для частоты ω получено:

$$\omega_{1,2}^2(p) = \frac{JEJ_{\text{сеч.}} p^4 + (\rho C + KJ) p^2 + K\rho \pm \sqrt{D(p)}}{2\rho J}, \quad (15)$$

где $D(p) = (JEJ_{\text{сеч.}})^2 p^8 - 2JEJ_{\text{сеч.}} (\rho C - KJ) p^6 + [(\rho C - KJ)^2 - 2\rho KJEJ_{\text{сеч.}}] p^4 + 2K\rho (\rho C - KJ) p^2 + \rho^2 K^2$.

Если $K \neq 0$, то для любого значения p и соответствующего ему по (15) любого (одного) из полученных двух значений ω нетривиальное решение

системы (12) как системы относительно A и B (после подстановки явного вида w и $\varphi_{\text{вкл.}}$) имеет вид:

$$A = a(p, \omega) \cdot \Phi, \quad B = \Phi, \quad (16)$$

где Φ – произвольная (отличная от нуля) константа, причём

$$a(p, \omega) = \frac{Kp}{EJ_{\text{сеч.}} p^4 + Kp^2 - \rho\omega^2} \equiv \frac{Cp^2 + K - J\omega^2}{Kp}. \quad (17)$$

Тем самым всякое решение задачи вида (14) есть пара функций

$$w_j = a_j \Phi_j \sin pxe^{\pm i\omega_j t}, \quad \varphi_{\text{вкл.}j} = \Phi_j \cos pxe^{\pm i\omega_j t} \quad (j=1,2) \quad (18)$$

где знак $+$ или $-$, а также значение j в обоих равенствах выбраны одинаково,

Φ_j – произвольная ненулевая константа, p – любое из значений $p = \frac{\pi k}{l}$

($k \in \mathbb{N}$), а $\omega_j = \omega_j(p)$ и $a_j = a(p, \omega_j)$ выражены формулами вида (15) и (17).

В силу линейности задачи (12), (13) любая линейная комбинация пар функций (18) с постоянными коэффициентами также является решением. Всевозможные вещественнозначные комбинации имеют вид сумм по натуральным значениям k :

$$w = \sum_k \sin \frac{\pi k x}{l} \left[a_1^{(k)} \Phi_1^{(k)} \sin(\omega_1^{(k)} t + \varphi_1^{(k)}) + a_2^{(k)} \Phi_2^{(k)} \sin(\omega_2^{(k)} t + \varphi_2^{(k)}) \right], \quad (19)$$

$$\varphi_{\text{вкл.}} = \sum_k \cos \frac{\pi k x}{l} \left[\Phi_1^{(k)} \sin(\omega_1^{(k)} t + \varphi_1^{(k)}) + \Phi_2^{(k)} \sin(\omega_2^{(k)} t + \varphi_2^{(k)}) \right],$$

где $\Phi_j^{(k)}$, $\varphi_j^{(k)}$ – произвольные константы ($j=1,2$), и аналогично (18) использованы соответствующие обозначения, основанные на формулах (15) и (17):

$$\omega_j^{(k)} = \omega_j \left(\frac{\pi k}{l} \right), \quad a_j^{(k)} = a \left(\frac{\pi k}{l}, \omega_j^{(k)} \right) \quad j=(1,2) \quad (20)$$

Решения задачи (12), (13) в виде (19) представляют собой либо конечные суммы, либо бесконечные ряды, для равномерной сходимости которых достаточна сходимость мажоритарных рядов

$$\sum_k |\Phi_j^{(k)}|, \quad \sum_k |a_j^{(k)} \Phi_j^{(k)}| \quad j=(1,2)$$

Пара функций (19) представляет общий вид решения задачи (12), (13) в рамках сделанных предположений. Формулы (19) показывают существенную особенность решения, состоящую в том, что каждой моде колебательных движений, определяемой числом k , соответствуют, вообще говоря, ровно две частоты и две формы колебаний.

В п. 2.3 для иллюстрации полученного решения рассмотрен пример конструкции, состоящей из металлического стержня с насаженными на него такими же стержнями меньшей длины, которые связаны между собой упругой (резиновой) передачей:

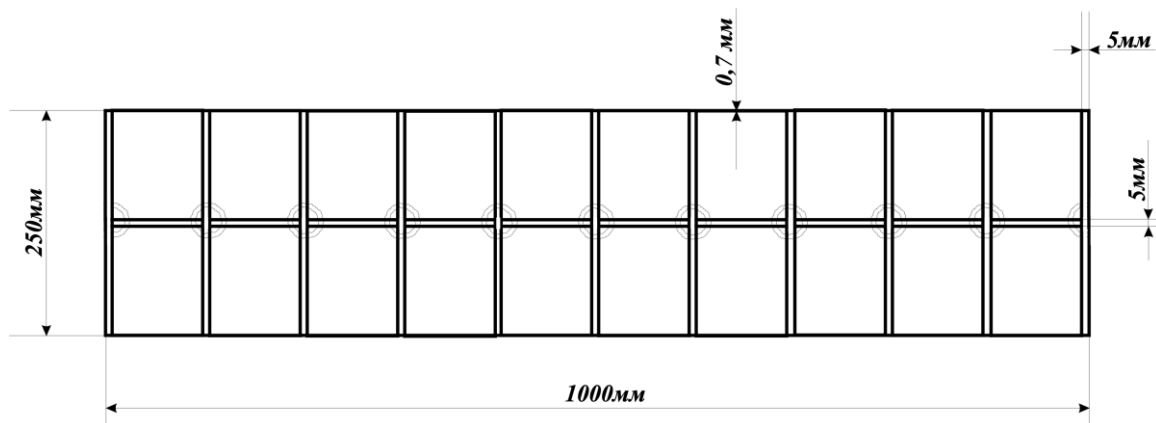


Рис. 3. Конструкция антенного типа.

Численно-аналитическим методом получено решение задачи о собственных колебаниях такой конструкции. Приведены графики зависимости частот собственных колебаний от параметра моды (для каждой из двух форм собственных колебаний). На примере одного из значений параметра моды колебаний ($k=1$) выписан явный вид движений для соответствующей пары частот и приведены иллюстрации характеров этих движений для разных частот этой пары: первая форма колебаний (с более низкой частотой) соответствует прогибам несущего стержня, при которых повороты его элементов «сопутствуют» (совпадают по знаку) поворотам поперечных стержней-включений (и даже превосходят их по величине), вторая форма (с более высокой частотой) соответствует «встречным» (противоположным по знаку) поворотам элементов несущего стержня и стержней-включений. Можно сказать, что при колебаниях с низкой частотой включения содействуют изгибу несущего стержня, а при колебаниях с высокой частотой включения препятствуют изгибу несущего стержня:



Рис. 4. Характер движения для двух частот одной пары: (a) – «сопутствующие» движения, меньшая частота, (b) – «встречное» движение, большая частота.

В п. 2.4 для задачи (12), (13) рассмотрен случай колебаний оснащённого стержня при отсутствии внешних нагрузок f_x, f_y, t и воздействии лишь одного внешнего момента m_e , связанного с угловым отклонением $\varphi_{вкл.}$ включений зависимостью:

$$m_e = g\varphi_{вкл.}, \quad (21)$$

где g – некоторая постоянная величина. При $g > 0$ условие (21) означает, что момент m_g стремится увеличить, а при $g < 0$ – уменьшить угловое отклонение включения от начального положения.

Условие (21) может быть интерпретировано как моментное воздействие со стороны набегающего со скоростью v потока газа (жидкости) плотности ρ^* на включения, оснащённые плоскостями обтекания («крылышками»), прикрепленными к включениям вдоль направления потока «навстречу» набегающему потоку при $g > 0$ или с противоположной стороны («по ходу» потока) при $g < 0$. При малых углах $\varphi_{вкл.}$ отклонения включений (когда $\sin \varphi_{вкл.} \approx \varphi_{вкл.}$) величину g можно считать постоянной, равной

$$g = c\rho^*v^2, \quad (22)$$

где c – постоянная, зависящая от аэродинамических свойств «крылышек», причём знак c определяется направлением потока.

После подстановки в уравнения такой задачи величины w и $\varphi_{вкл.}$ в аналогичном случае собственных колебаний (который, вообще говоря, является вырожденным случаем этой задачи при $g = 0$) виде, не прибегая к попыткам аналитического исследования, привлечена рассмотренная выше конструкция антенного типа, для которой на основании численных расчётов оценён характер зависимости частот колебаний от g , что в силу (21), (22) позволило также принципиально оценить поведение системы в потоке газа

Для конструкции указанного вида проведены расчёты для первых пяти мод движений, то есть для значений $p = \frac{\pi k}{l}$ с $k = 1, 2, \dots, 5$, и значений g из диапазона от $-10^5 H$ до $7 \cdot 10^3 H$. Во всех рассмотренных случаях получены действительные значения квадратов частот.

При этом, как показывают рис. 5 и 6, для $g < g_1$, где $g_1 \approx 320H$ (в том числе, для всех отрицательных g) квадраты всех низких частот ω_1 (а тем самым и высоких частот ω_2) положительны, а для $g > g_1$ квадрат низшей частоты (ω_1 при $k = 1$) становится отрицательным.

Это означает, что при $g < g_1$ система в каждой моде (при каждом k) испытывает колебательные движения с фиксированными амплитудами, а при $g > g_1$ колебания на низшей частоте переходят в режим одностороннего экспоненциального отклонения.

Для обтекаемого стержня с «крылышками» это в силу (22) значит, что расположение «крылышек» по ходу потока ($c < 0$) сохраняет колебательный характер во всех модах (с любыми k) при любых величинах v скоростей обтекания, а для системы с «крылышками» навстречу потоку ($c > 0$)

существует критическая скорость $v_1 = \sqrt{\frac{g_1}{c\rho^*}}$, при приближении к которой

($\nu \rightarrow \nu_1 -$) колебания с наименьшей частотой (ω_1 при $k=1$) замедляются ($\omega_1 \rightarrow 0$) и при превышении которой ($\nu > \nu_1$) переходят в движение одностороннего отклонения экспоненциального характера (ω_1 – чисто мнимое число), что можно характеризовать как явление *дивергенции*.

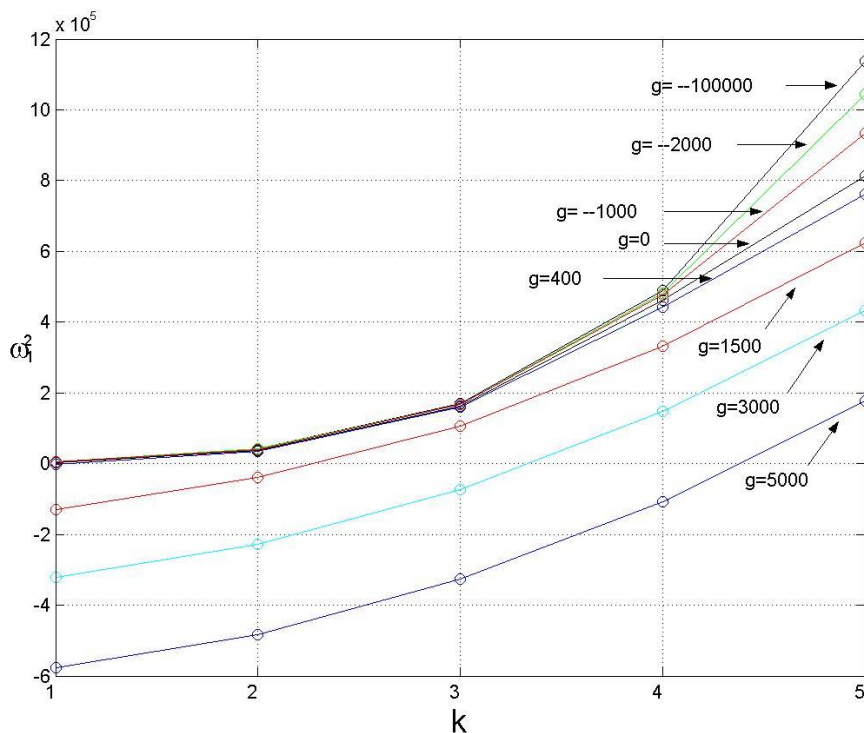


Рис. 5.

Зависимость квадрата низшей частоты ω_1 от k ($k = 1, 2, \dots, 5$) при $g = -100000H$, $g = -2000H$, $g = -1000H$, $g = 0H$, $g = 400H$, $g = 1500H$, $g = 3000H$, $g = 5000H$.

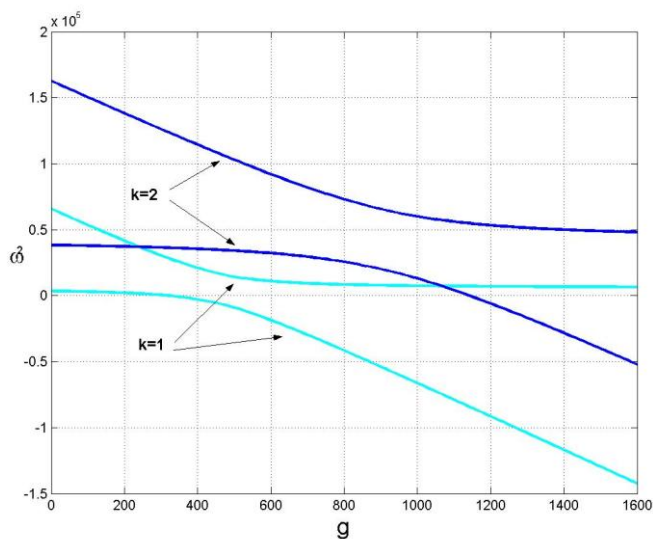


Рис. 6.

Зависимости квадратов частот ω_1 и ω_2 от g при $k = 1, 2$ в диапазоне $0 \leq g \leq 1600H$.

В третьей главе в п. 3.1 предложена модель одномерного континуума Коссера с частично идеально пластической связью: рассматривается система, движения которой описываются уравнениями (4):

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \xi} + \mathbf{f} - \rho \dot{\mathbf{r}} = 0, \quad \frac{\partial M_{ст.}}{\partial \xi} + Q\lambda + m + M_{вкл. \rightarrow ст.} = 0, \quad \frac{\partial M_{вкл.}}{\partial \xi} + m_{в.} - M_{вкл. \rightarrow ст.} - J \ddot{\varphi}_{вкл.} = 0.$$

Проводится линеаризация этих уравнений с учётом предположений о малости кинематических характеристик аналогично проделанному в главе 1. Механические свойства системы в отношении растяжения и изгиба несущего стержня, а также взаимного поворота включений принимаются упругими, а в отношении взаимного поворота включений и элементов несущего стержня – идеально жёсткопластическими (типа сухого трения). Для определяющих соотношений примем простейшую форму отдельных зависимостей внутри каждой из указанных энергетически сопряжённых пар обобщённых сил и обобщённых перемещений. Тогда, привлекая классическую теорию растяжения и изгиба тонких стержней, для упругих свойств системы получаем:

$$P = ES_{сеч.} \frac{du}{dx}, \quad M_{ст.} = EJ_{сеч.} \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad M_{вкл.} = C \frac{d\varphi_{вкл.}}{dx}, \quad (23)$$

где E – модуль Юнга материала несущего стержня, $S_{сеч.}$ и $J_{сеч.}$ – площадь и момент инерции поперечного сечения несущего стержня, а константа C – коэффициент жёсткости системы включений.

Идеально жёсткопластические свойства взаимодействия включений с элементами несущего стержня выразим соотношениями:

$$|M_{вкл. \rightarrow ст.}| \leq M_{\max.} = const > 0, \quad (24)$$

причём

$$|M_{вкл. \rightarrow ст.}| < M_{\max.} \Rightarrow \dot{\varphi}_{отн.} = 0, \quad (25)$$

$$\dot{\varphi}_{отн.} \neq 0 \Rightarrow M_{вкл. \rightarrow ст.} = M_{\max.} \text{sign}(\dot{\varphi}_{отн.}),$$

где $\varphi_{отн.} = \varphi_{вкл.} - \varphi_{ст.} \equiv \varphi_{вкл.} - \frac{dw}{dx}$ – угол относительного поворота включений и элемента несущего стержня, причём в случае $|M_{вкл. \rightarrow ст.}| = M_{\max.}$ возможно как движение ($\dot{\varphi}_{отн.} \neq 0$), так и покой ($\dot{\varphi}_{отн.} = 0$). В общем случае равновесия выполнено неравенство (24), величина момента $M_{вкл. \rightarrow ст.}$ не определена, он играет роль реакции (подобно поперечной силе Q), а тем самым включается в число неизвестных величин, подлежащих определению при решении краевой задачи в целом.

В пп. 3.2 и 3.3 рассмотрены положения равновесия описанной конструкции при статических внешних нагрузках. В этом случае достаточно учитывать лишь соотношение (24). Таким образом, условия (23), (24) составляют полную систему определяющих соотношений краевой задачи статики для рассматриваемой системы. Исследование постановки второй краевой задачи показало, что для существования её решения достаточно

предусмотреть задание лишь пяти из граничных условий, соответствующих следующим пяти заданным величинам: одной из P_0 или P_l , одной из Q_0 или Q_l , а также каким-либо трём из $M_{см.0}$, $M_{вкл.0}$, $M_{см.l}$, $M_{вкл.l}$.

Здесь приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} P(0) &= P_0, \quad Q(0) = Q_0, \quad M_{см.}(0) = M_{см.0}, \quad M_{вкл.}(0) = M_{вкл.0}, \\ P(l) &= P_l, \quad Q(l) = Q_l, \quad M_{см.}(l) = M_{см.l}, \quad M_{вкл.}(l) = M_{вкл.l}, \end{aligned} \quad (28)$$

то есть, на конце $x=0$ приложены заданные внешние граничные силы и моменты $-P_0$, $-Q_0$, $-M_{см.0}$, $-M_{вкл.0}$, а на конце $x=l$ – силы и моменты P_l , Q_l , $M_{см.l}$, $M_{вкл.l}$.

Показано также, что строго предельные (то есть, такие, для которых почти во всех точках стержня выполнено тождество $M_{вкл. \rightarrow см.} \equiv M_{\max.}$, либо почти во всех точках стержня выполнено тождество $M_{вкл. \rightarrow см.} \equiv -M_{\max.}$) состояния равновесия единственны (с точностью до жестких движений и поворота всех включений на один и тот же угол).

Даны решения задач о статическом равновесии при отсутствии распределенных внешних нагрузок, а также в случае свободных краев стержня и свободных крайних включений.

В п. 3.4 решена задача о равномерном нагружении консольно закреплённого оснащённого стержня изучаемого типа: пусть имеется оснащённый стержень длины l с частично пластическими свойствами описанной выше структуры, левый конец и крайнее левое включение которого жёстко закреплены, а на правом действует сосредоточенная монотонно возрастающая от исходного нулевого значения сила $Q_l(t)$.

Полученное решение показывает, что на промежутке времени $t \in [0, t_1]$, пока $Q_l(t)$ не достигнет значения $\frac{C + EJ_{сеч.}}{C} M_{\max.}$, относительный угол поворота включений и элементов стержня сохраняется равным нулю, а функции абсолютного угла поворота включений и прогиба несущего стержня зависят как от x , так и от времени (то есть, от приложенной силы $Q_l(t)$). Когда же $Q_l(t)$ достигает критического значения (при $t = t_1$), а также во все последующие моменты времени монотонного возрастания силы, абсолютный угол поворота включений уже не зависит от величины прикладываемой силы, а остаётся постоянным во времени и зависит только от координаты точки стержня, тогда как функция прогиба несущего стержня продолжает меняться как в зависимости от координаты точки, так и в зависимости от $Q_l(t)$. При этом во все моменты времени $t > t_1$ во всех точках оснащённого стержня $x \in (0, l]$ внутренний момент взаимодействия включений и несущего стержня $M_{вкл. \rightarrow см.}(x, t)$ остаётся равным своему минимальному значению $-M_{\max.}$, то есть все состояния равновесия при $t > t_1$ оказываются чисто предельными.

Основные результаты и выводы

1. В работе на основании рассмотрения дискретной модели оснащенного стержня методом механического моделирования с осреднением в длинноволновом приближении построена система уравнений континуальной модели оснащенного стержня в плоских движениях, отвечающая уравнениям одномерного континуума Коссера. Изучены общие свойства упругой континуальной модели при произвольных статических деформациях в отсутствие распределенных внешних нагрузок, выделены случаи безмоментной, несвязанной моделей, а также модели псевдоконтинуума Коссера.
2. В линеаризованной постановке рассмотрены задачи о собственных и вынужденных малых движениях оснащенного стержня. Для поперечных колебаний установлено наличие в каждой моде двух различных форм и частот. Впервые обнаружено явление неустойчивости вынужденных колебаний в виде экспоненциального одностороннего отклонения системы (дивергенция). Построен пример упругой конструкции антенного типа и проведены расчеты, иллюстрирующие общие выводы.
3. Сделано обобщение модели на неупругие свойства — построение методом механического моделирования модели одномерного континуума Коссера с частично пластическими свойствами (связи между включениями и несущим стержнем приняты в виде сухого трения). Выведены уравнения этой модели для малых движений, отмечена неоднозначность решений задач статики в общем случае. Введены понятия предельных и чисто предельных состояний равновесия и показана однозначность решений в чисто предельных состояниях. Рассмотрены конкретные задачи статики и квазистатики.

По теме диссертации опубликованы следующие работы

1. Иванова О.А. Модель одномерного континуума Коссера. В кн.: Упругость и неупругость. М.: URSS, 2006. С. 139-146.
2. Brovko G.L., Grishayev A.G., Ivanova O.A. Continuum models of discrete heterogeneous structures and saturated porous media: constitutive relations and invariance of internal interactions // Journal of Physics: Conference series. 2007. № 62. P. 1-22.
3. Бровко Г.Л., Иванова О.А., Кречко Л.М., Финошкина А.С. Подходы к построению классических и неклассических моделей сплошных сред: аксиоматика и конструктивное моделирование // Актуальные проблемы

механики сплошной среды. Ереван: Ер. гос. ун-т архитект. и строит., 2007. С. 104-111.

- 4. Бровко Г.Л., Иванова О.А. Моделирование свойств и движений неоднородного одномерного континуума сложной микроструктуры типа Коссера // Изв. РАН. Механика твёрдого тела. 2008. № 1. С. 22-36.**
5. Brovko G.L., Ivanova O.A., Finoshkina A.S. On geometrical and analytical aspects in formulations of problems of classic and non-classic continuum mechanics // Operator Theory: Advances and Applications. Basel/Switzerland: Birkhäuser Verlag. 2009. V.191. Pp.51-79.