

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет
Кафедра прикладной механики и управления

На правах рукописи

Смирнов Илья Александрович

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАНОСА АВТОМОБИЛЯ

Специальность 01.02.01 – теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2010

Работа выполнена на кафедре прикладной механики и управления механико-математического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научные руководители:

доктор физико-математических наук,
профессор Игорь Васильевич Новожилов

кандидат физико-математических наук,
с.н.с. Анастасия Владимировна Влахова

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук,
профессор Валентин Федорович Бутузов

доктор технических наук,
в.н.с. Игорь Анатольевич Копылов

Ведущая организация:

Московский энергетический институт
(технический университет)

Защита диссертации состоится 4 июня 2010 года в 16:30 на заседании диссертационного совета Д 501.001.22 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, Москва, Ленинские горы, МГУ, механико-математический факультет, аудитория 16-10.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ.

Автореферат разослан 30 апреля 2010 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета:

кандидат физико-математических наук,
доцент Владимир Александрович Прошкин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Современная автомобильная промышленность является достаточно развитой, высокотехнологичной отраслью. Законы рынка заставляют автопроизводителей всесторонне повышать качество выпускаемой ими продукции, уделяя внимание как дизайну автомобилей, так и их комфорту, надежности и практичности. Особое внимание привлекается к вопросам безопасности движения, в частности, к проблемам предотвращения ситуаций, приводящих к заносу автомобиля.

Разработка надежного и безопасного автомобиля предполагает построение и анализ соответствующих математических моделей на начальном этапе проектирования. Статические математические модели дают возможность исследования эффективности так называемых пассивных средств безопасности, предназначенных для защиты жизни и здоровья водителя и пассажиров автомобиля в случае аварии. К ним относятся инерционные ремни, подушки безопасности, мягкие элементы передней панели, безопасные стекла, энергопоглощающие бамперы, различные элементы, усиливающие жесткость корпуса автомобиля.

Использование динамических моделей позволяет оценить влияние параметров конструкции автомобиля на его движение, разработать эффективные алгоритмы управления автомобилем и реализовать их в виде так называемых средств активной безопасности. В отличие от пассивных, средства активной безопасности контролируют движение и вмешиваются в процесс управления автомобилем, помогая снизить вероятность возникновения аварийных ситуаций и минимизировать их негативные последствия. К ним относятся антиблокировочная и антипробуксовочная системы, система курсовой устойчивости, электронная система блокировки дифференциала и проч. Динамические модели используются также при разработке программного обеспечения для различных тестовых стендов и тренажеров, позволяющих сформировать у водителей необходимые навыки управления автомобилем.

По статистике большинство автомобильных аварий происходит вследствие потери сцепления колес с дорогой, приводящей к возникновению заноса. В диссертационной работе описывается движение автомобиля в различных ситуациях, возникающих при разгоне, торможении, прохождении поворота. Проводится построение динамической модели переменной структуры, позволяющей исследовать влияние на возникновение и развитие заноса ряда параметров конструкции автомобиля, а также управляющих воздействий: угла поворота передних колес, разгонных и тормозных моментов.

Изучение динамики автомобиля связано с рассмотрением нелинейных систем дифференциальных уравнений высокого порядка. Их качественный анализ, как правило, сложен. Численный анализ подобных систем в реальном времени затруднен сильным разнесением характерных постоянных времени движения, в связи с чем приходится проводить интегрирование уравнений системы на больших характерных временах с малым шагом в долях малого

характерного интервала времени. Вместе с тем изучаемые уравнения часто получаются описательно избыточными по отношению к цели исследования. В этом случае актуально приближенное моделирование движения.

В настоящей работе рассматриваются задачи динамики автомобиля, движущегося с небольшими боковыми наклонами при малых различиях характеристик сцепления правых и левых колес одной оси с дорогой, в предположении недеформируемости деталей кузова, рулевого управления, крепления колес и проч. Используемая модель контактных сил учитывает возникновение псевдоскольжения при малых скоростях точек пятна контакта колес относительно дороги. В рамках такой постановки постоянные времени движения автомобиля могут быть разбиты на три группы:

- "медленное" время траекторных движений, имеющее порядок 1 с;
- "среднее" время боковых движений точек контакта колес с дорогой, имеющее порядок 0,1 с (характерное время увода);
- "быстрое" время продольных движений точек контакта колес с дорогой, имеющее порядок 0,01 с.

При движении со скольжением (потерей сцепления) колес обеих осей с дорогой "быстрым" является характерное время вращения колес, имеющее порядок 0,1 с.

Методы фракционного анализа, объединяющие методы теории размерности и подобия и методы теории возмущений, позволяют упростить исходную математическую модель автомобиля, составленную в соответствии с законами классической механики. При помощи нормализации на классе медленных траекторных движений исходная, размерная, система приводится к сингулярно возмущенной форме с малыми параметрами, отражающими сильное разнесение малых и больших характерных времен, на которых развиваются движения исследуемой системы. Методы теории сингулярных возмущений позволяют, далее, разделить "быстрые" и "медленные" движения автомобиля, т.е. построить приближенные модели его движения на каждом из временных интервалов, и оценить погрешность и область применимости указанных моделей. Порядок дифференциальных уравнений приближенных моделей является более низким по сравнению с порядком уравнений исходной системы. Их интегрирование может быть проведено в реальном времени. В ряде случаев приближенные модели допускают аналитическое исследование.

Цель работы. Диссертационная работа посвящена приближенному математическому моделированию движения автомобиля в процессе заноса. Для описания движения в работе применяется "велосипедная" модель. Основной целью работы является упрощение исходной системы уравнений модели, т.е. построение набора приближенных моделей более низкого порядка, позволяющих в реальном времени описывать как движения автомобиля в режиме псевдоскольжения колес, так движения при потере сцепления колес с дорогой. Приближенные модели должны быть пригодны как для исследования класса медленных, траекторных, движений, включающих разгон, торможение и занос автомобиля, необходимого для оценки дорожной ситуации, так и для

исследования быстрых движений, необходимого для построения алгоритмов предотвращения или парирования уже начавшегося заноса автомобиля.

Научная новизна. В работе впервые построена динамическая модель переменной структуры, образованная набором приближенных математических моделей, позволяющих описывать медленные, траекторные, а также быстрые составляющие движения автомобиля в процессе заноса при различных вариантах потери сцепления колес с дорогой.

Достоверность результатов. Результаты работы получены путем упрощения широко используемой в практических задачах "велосипедной" модели движения автомобиля. Для исследования применимости этой модели к рассматриваемым в диссертации задачам заноса проведено численное сравнение "велосипедной" модели с четырехколесной моделью автомобиля, достоверность которой подтверждена большим числом испытаний реального автомобиля. При построении приближенных моделей движения "велосипедной" модели в работе использованы подходы, основанные на строгих математических методах.

Теоретическая и практическая ценность результатов. Теоретическая ценность работы заключается в развитии подходов фракционного анализа, ориентированных на создание упрощенных математических моделей движения колесных транспортных средств. Разработаны методика введения в уравнения движения колесных транспортных средств иерархической структуры малых параметров и подходы к исследованию корректности предельных переходов по введенным малым параметрам. Построенные в диссертационной работе приближенные модели могут быть использованы для верификации более сложных моделей движения автомобиля, а также для формирования алгоритмов, используемых в программном обеспечении тренажерных комплексов водителя и приобретающих в последнее время все большую актуальность средств активной безопасности автомобиля, работающих в режиме реального времени и способствующих предотвращению заноса или минимизации его отрицательных последствий.

Апробация работы. Результаты работы докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях:

- Конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова (2003, 2004 годы, Москва, МГУ).
- 49-ая международная научно-техническая конференция ААИ "Приоритеты развития отечественного автотракторостроения и подготовки инженерных и научных кадров" (2005 год, Москва, МАМИ).
- Международный научно-технический семинар "Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации" (2003, 2005, 2006 годы, Украина, Алушта).

- Научный семинар им. акад. А.Ю. Ишлинского по прикладной механике и управлению (2006, 2007, 2009 годы, Москва, МГУ).
- Научный семинар "Асимптотические методы" под руководством проф. А.Б. Васильевой и проф. В.Ф. Бутузова (2007, 2010 годы, Москва, МГУ).
- Научный семинар "Динамика относительного движения" под руководством чл.-корр. РАН, проф. В.В. Белецкого, проф. Ю.Ф. Голубева, доц. К.Е. Якимовой, доц. Е.В. Мелкумовой (2010 год, Москва, МГУ).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 04–01–00759, 06–01–00517) и аналитической ведомственной целевой программы "Развитие научного потенциала высшей школы 2006–2008 г."

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в статье в научном журнале и сборниках тезисов докладов и трудов научных конференций. Список работ приведен в конце автореферата.

Структура работы. Диссертация состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы, содержащего 73 наименования. В работе 169 страниц и 46 рисунков.

Краткое содержание диссертации

Во введении разобраны вопросы, связанные с актуальностью темы, целью работы, методикой исследований, достоверностью результатов, научной новизной диссертации, ее теоретической и практической ценностью. Охарактеризованы объем и структура диссертации. Приведены краткий обзор подходов к математическому и численному моделированию движения автомобиля (§ 1) и основные положения используемого в работе аппарата фракционного анализа (§ 2).

В диссертационной работе занос определяется следующим образом. *Рассмотрим движение автомобиля на конечных интервалах времени $T \sim T_0$, в течение которых развиваются процессы разгона, торможения, поворота. Зададимся программным, невозмущенным, движением, например, движением по средней линии дорожной полосы с требуемой путевой (продольной) скоростью. Будем предполагать, что соответствующие программные значения угла поворота передних колес, разгонных и тормозных моментов не превосходят ограничений, определяемых нормами безопасности движения. Зададимся начальными отклонениями δ_0 параметров бокового движения автомобиля от их невозмущенных, программных, значений. Если за рассматриваемое конечное время T_0 эти отклонения возрастают до неприемлемых по требованиям безопасности движения значений ε_0 , то будем называть режим движения заносом.*

В § 3 приведено описание исследуемой системы. Изучение движения автомобиля в диссертационной работе проводится на основании "велосипедной" модели. В рамках этой модели передние колеса автомобиля заменяются одним эквивалентным передним колесом, задние – одним задним. Движением переднего колеса управляет водитель или адаптивная система управления, ось вращения заднего колеса фиксирована в корпусе. Предполагается, что корпус и колеса модели являются абсолютно жесткими и она не имеет боковых наклонов. "Велосипедная" модель широко используется в литературе при описании движений колесных транспортных средств с малыми боковыми наклонами в ситуациях, когда можно пренебречь различиями между характеристиками сцепления правых и левых колес одной оси с дорогой.

Для вывода уравнений движения модели в работе определяются следующие системы координат. С опорной плоскостью, моделирующей дорогу, связывается неподвижный трехгранник $O_0x_0y_0z_0$, с корпусом и колесами модели – трехгранники $Cx_1y_1z_1$ и $A_2x_2y_2z_2$. Здесь C – центр масс системы; точки A_1 и A_2 лежат на пересечении продольных плоскостей симметрии переднего и заднего колес с их осями вращения; оси O_0z_0 , Cz_1 , A_2z_2 ориентированы по вертикали; оси Cx_1 , A_1x_1 , A_2x_2 лежат в плоскостях продольной симметрии корпуса и колес соответственно и направлены вперед по ходу движения (рис. 1).

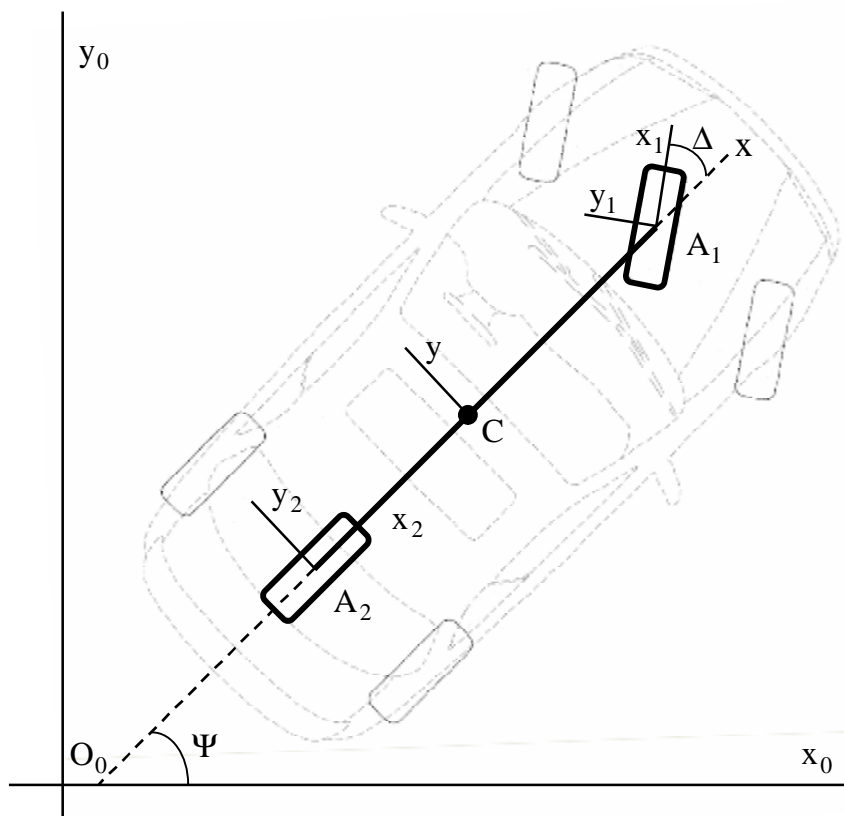


Рис. 1. "Велосипедная" модель автомобиля

Положение модели задается координатами X , Y ее центра масс в системе координат $O_0x_0y_0z_0$, углом Ψ поворота корпуса, углами φ_1 , φ_2

поворота колес вокруг осей A_1y_1 , A_2y_2 и углом Δ поворота переднего колеса относительно корпуса вокруг оси A_1z_1 . Для автомобиля величина Δ не превышает 0,5 рад.

Уравнения движения модели состоят из уравнений изменения количества движения и кинетического момента системы в целом относительно центра масс в проекциях на оси трехгранника $Sxyz$, уравнений изменения кинетического момента переднего и заднего колес относительно осей A_1y_1 , A_2y_2 их вращения, уравнения изменения кинетического момента системы, образованной передним колесом и механизмом рулевого управления, относительно оси A_1z_1 и кинематических соотношений:

$$\begin{aligned}
 M \frac{dV_x}{dT} &= P_{x1} \cos \Delta - P_{y1} \sin \Delta + P_{x2} + MV_y \Omega_z + F_x, \\
 M \frac{dV_y}{dT} &= P_{x1} \sin \Delta + P_{y1} \cos \Delta + P_{y2} - MV_x \Omega_z + F_y, \\
 0 &= N_1 + N_2 - Mg, \\
 0 &= -AN_1 + BN_2 - (P_{x1} \cos \Delta - P_{y1} \sin \Delta + P_{x2})H + P_{x1}R - L_1 + P_{x2}R - L_2, \\
 (\tilde{I}_z - I_{z1}) \frac{d\Omega_z}{dT} &= (P_{x1} \sin \Delta + P_{y1} \cos \Delta)A - P_{y2}B + M_z - M_\Delta, \\
 I \frac{d\Omega_1}{dT} &= -P_{x1}R + L_1, \quad I \frac{d\Omega_2}{dT} = -P_{x2}R + L_2, \\
 I_{z1} \frac{d\Omega_\Delta}{dT} &= M_\Delta - I_{z1} \frac{d\Omega_z}{dT}, \quad \frac{d\Psi}{dT} = \Omega_z, \quad \frac{d\Delta}{dT} = \Omega_\Delta, \\
 \frac{dX}{dT} &= V_x \cos \Psi - V_y \sin \Psi, \quad \frac{dY}{dT} = V_x \sin \Psi + V_y \cos \Psi.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь T – размерное время; V_x , V_y – проекции вектора скорости автомобиля на оси Sx и Sy ; Ω_z – вертикальная составляющая угловой скорости корпуса; $\Omega_1 = d\phi_1/dT$, $\Omega_2 = d\phi_2/dT$ – угловые скорости вращения колес вокруг осей A_1y_1 , A_2y_2 соответственно; Ω_Δ – угловая скорость вращения переднего колеса относительно корпуса вокруг оси A_1z_1 ; $\tilde{I}_z = \tilde{M}\tilde{\rho}_z^2$ – приведенный момент инерции корпуса автомобиля относительно оси Sz , \tilde{M} – приведенная масса корпуса, $\tilde{\rho}_z$ – соответствующий радиус инерции; M – приведенная масса автомобиля; $I = mr^2$, $I_{z1} = m\rho_{z1}^2$ – осевой момент инерции колес и приведенный момент инерции переднего колеса и механизма рулевого управления относительно оси A_1z_1 ; m , ρ , ρ_{z1} – масса колеса и соответствующие радиусы инерции; R – радиус колес; A , B – продольные расстояния от центра масс автомобиля до передней и задней осей соответственно; H – высота центра масс над опорной плоскостью; P_{xj} , P_{yj} , N_j – соответственно, проекции на оси трехгранников $A_jx_jy_jz_j$ касательных и нормальных составляющих контактных сил взаимодействия j -го колеса с опорной плоскостью ($j=1,2$); L_1 , L_2 –

моменты, приложенные, соответственно, к переднему и заднему колесам со стороны корпуса, которые могут быть разгонными (от двигателя) или тормозными; M_{Δ} – момент рулевого привода, приложенный к переднему колесу относительно оси A_1z_1 ; F_x , F_y , M_z – соответствующие проекции возмущающих сил и моментов; g – ускорение свободного падения. Координаты φ_1 , φ_2 являются циклическими и в уравнения (1) не входят. Величины L_1 , L_2 и M_{Δ} рассматриваются в качестве управлений, изменяющихся на характерных временах $T \sim T_0$ или $T > T_0$. Современные автомобили проектируются таким образом, что $\rho_z^2 < AB$, $H < A + B$. Для большинства автомобилей отношение массы колеса к приведенной массе автомобиля мало: $\mu = m/M \sim 10^{-2} - 10^{-1}$.

Выражения для нормальных составляющих контактных сил N_1 , N_2 определяются из третьего и четвертого уравнений системы (1). В работе рассматриваются движения, для которых $N_1, N_2 > 0$, т.е. колеса не отрываются от дороги.

В диссертационной работе используется модель касательных составляющих контактных сил, позволяющая описывать как явление псевдоскольжения колеса, так и его движение в случае потери сцепления с дорогой:

$$P_{xj} = -\alpha_{xj} N_j \frac{E_{xj}}{E_j} p(E_j), \quad P_{yj} = -\alpha_{yj} N_j \frac{E_{yj}}{E_j} p(E_j) \quad (j = 1, 2) \quad (2)$$

Здесь α_{xj} , α_{yj} – коэффициенты кулонова трения скольжения в продольном и боковом направлениях относительно плоскостей симметрии колес;

$$E_{xj} = \frac{U_{xj}}{\Omega_j R}, \quad E_{yj} = \frac{U_{yj}}{\Omega_j R} \quad (j = 1, 2) \quad (3)$$

– относительные проскальзывания контактирующих поверхностей колес и опорной поверхности в продольном и боковом направлениях, $E_j = \sqrt{E_{xj}^2 + E_{yj}^2}$;

$$\begin{aligned} U_{x1} &= V_x \cos \Delta + (V_y + \Omega_z A) \sin \Delta - \Omega_1 R, \\ U_{y1} &= -V_x \sin \Delta + (V_y + \Omega_z A) \cos \Delta, \\ U_{x2} &= V_x - \Omega_2 R, \quad U_{y2} = V_y - \Omega_2 B \end{aligned} \quad (4)$$

– проекции скоростей точек контакта колес на оси $A_j x_j$, $A_j y_j$ трехгранников $A_j x_j y_j z_j$ ($j = 1, 2$).

Для зависимости $p(E_j)$ из (2) принята кусочно-линейная аппроксимация (рис. 2). Для автомобильных колес ширина линейной зоны, отвечающей режиму псевдоскольжения колес, $\varepsilon \approx 0,1$. За пределами указанной зоны касательная составляющая контактной силы достигает своего предельного значения и становится равна кулоновой силе трения скольжения.

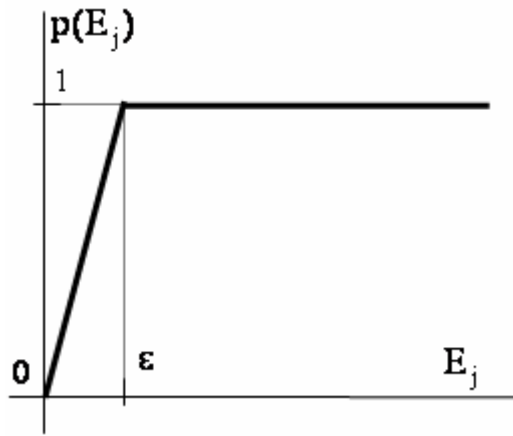


Рис. 2. Кусочно-линейная аппроксимация характеристики контактной силы

Если при движении j -го колеса справедливо неравенство

$$E_j < \varepsilon, \quad (5)$$

то считается, что колесо *не теряет сцепление с дорогой*, если

$$E_j \geq \varepsilon \quad (6)$$

– колесо *теряет сцепление с дорогой*.

Уравнения (1)–(4) образуют замкнутую систему. Для того чтобы однозначно определить движение автомобиля, необходимо задать начальные условия, возмущения F_x , F_y , M_z и управления L_1 , L_2 , M_Δ . Математическая модель (1)–(4) не учитывает влияние на движение автомобиля моментов "верчения", возникающих при контакте колес с опорной плоскостью.

В соответствии с (2), (5), необходимые и достаточные условия реализации режима движения автомобиля без потери сцепления колес с дорогой имеют вид

$$\left(\frac{P_{x1}}{\varepsilon_{x1} N_1} \right)^2 + \left(\frac{P_{y1}}{\varepsilon_{y1} N_1} \right)^2 < 1, \quad \left(\frac{P_{x2}}{\varepsilon_{x2} N_2} \right)^2 + \left(\frac{P_{y2}}{\varepsilon_{y2} N_2} \right)^2 < 1. \quad (7)$$

Из (2) следует, что при начальных условиях, возмущениях и управлениях, обеспечивающих выполнение неравенства (6), соответствующее выбранному номеру j неравенство из (7) переходит в равенство

$$\left(\frac{P_{xj}}{\varepsilon_{xj} N_j} \right)^2 + \left(\frac{P_{yj}}{\varepsilon_{yj} N_j} \right)^2 = 1. \quad (8)$$

В работе проводилась оценка слагаемых, стоящих в правых и левых частях четвертого и пятого уравнений системы (1). Было показано, что малость слагаемого $P_{x1}R - L_1 + P_{x2}R - L_2$ по сравнению с остальными слагаемыми в четвертом уравнении системы (1) может быть оценена параметром

$$\varepsilon_1 = \mu \frac{\rho^2}{R^2} \frac{R}{(A+B)} \sim 10^{-3} - 10^{-2}.$$

Малость величин $(\tilde{I}_z - I_{z1} - I_z)$ и M_Δ по сравнению с приведенным моментом $I_z = M\rho_z^2$ инерции автомобиля относительно оси Cz (ρ_z – соответствующий

радиус инерции) и моментами контактных сил соответственно может быть оценена множителем μ . Указанные малые величины отвечают проекциям векторов кинетических моментов колес автомобиля на оси A_1y_1 , A_2y_2 и механизма рулевого управления на ось A_1z_1 . После пренебрежения ими система (1) перейдет систему из [3, 6]:

$$\begin{aligned}
 M \frac{dV_x}{dT} &= P_{x1} \cos \Delta - P_{y1} \sin \Delta + P_{x2} + MV_y \Omega_z + F_x, \\
 M \frac{dV_y}{dT} &= P_{x1} \sin \Delta + P_{y1} \cos \Delta + P_{y2} - MV_x \Omega_z + F_y, \\
 0 &= N_1 + N_2 - Mg, \\
 0 &= -AN_1 + BN_2 - (P_{x1} \cos \Delta - P_{y1} \sin \Delta + P_{x2})H, \\
 I_z \frac{d\Omega_z}{dT} &= (P_{x1} \sin \Delta + P_{y1} \cos \Delta)A - P_{y2}B + M_z, \\
 I \frac{d\Omega_1}{dT} &= -P_{x1}R + L_1, \quad I \frac{d\Omega_2}{dT} = -P_{x2}R + L_2, \\
 I_{z1} \frac{d\Omega_\Delta}{dT} &= M_\Delta - I_{z1} \frac{d\Omega_z}{dT}, \quad \frac{d\Psi}{dT} = \Omega_z, \quad \frac{d\Delta}{dT} = \Omega_\Delta, \\
 \frac{dX}{dT} &= V_x \cos \Psi - V_y \sin \Psi, \quad \frac{dY}{dT} = V_x \sin \Psi + V_y \cos \Psi.
 \end{aligned} \tag{9}$$

На основании теоремы Пуанкаре [5] рассогласование между решениями систем (1) и (9) оценивается величиной $O(\mu)$ на конечном интервале времени $T \sim T_0$. В работе модель (9) рассматривается в качестве исходной при проведении асимптотических процедур методов теории сингулярных возмущений.

В диссертационной работе ставится задача упрощения исходной системы (2)–(4), (9) т.е. построения приближенных моделей более низкого порядка, позволяющих описывать как режим движения автомобиля без потери сцепления колес с дорогой, так и режим движения при потере сцепления колес с дорогой. Указанные модели должны быть пригодны для описания движений, возникающих при разгоне, торможении и заносе автомобиля.

В § 4 Введения проводится численное сравнение "велосипедной" модели с четырехколесной моделью движения автомобиля из [4], достоверность которой подтверждена большим числом испытаний. Рассматриваются движения при различных путевых скоростях, углах поворота передних управляемых колес и коэффициентах сцепления.

Показано, что при движении по сухой асфальтовой дороге с высокой путевой скоростью и малым углом поворота передних колес угол крена является достаточно малым (порядка 10^{-2}) и после истечения времени переходного процесса остается практически неизменным, что не приводит к значительному перераспределению нагрузки между левыми и правыми колесами одной оси; различия между боковыми контактными силами для правых и левых колес одной оси четырехколесной модели являются приемлемыми. При этом боковые контактные силы на колесах "велосипедной"

модели близки к соответствующим средним значениям контактных сил четырехколесной модели, а различия для последовательных положений продольной оси автомобиля и угловой скорости его корпуса в силу указанных моделей незначительны (рис. 3).

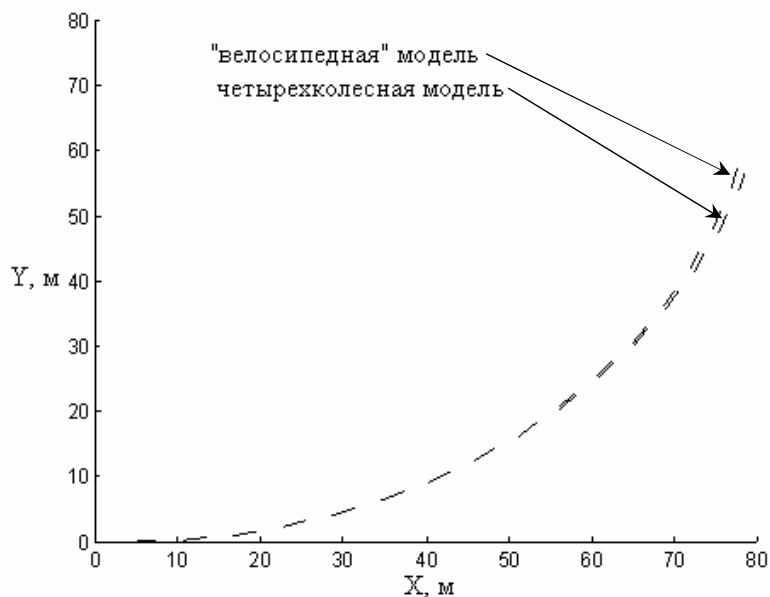


Рис. 3. Последовательные положения продольной оси переднеприводного автомобиля при разгоне на сухой асфальтовой дороге с малым углом поворота передних колес. $L_{1j} = 150 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $\Delta = 0,05$, $V_x(0) = 20 \text{ м/с}$ (для "велосипедной" модели $L_1 = 300 \text{ Н}\cdot\text{м}$)

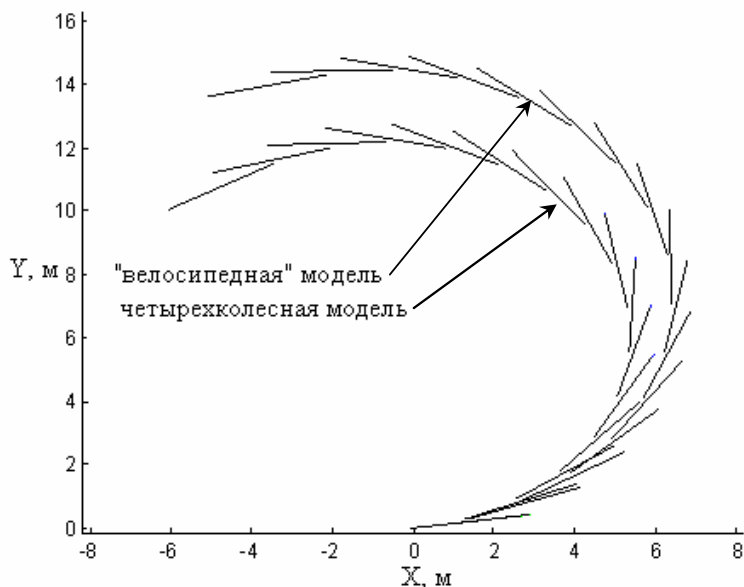


Рис. 4. Последовательные положения продольной оси переднеприводного автомобиля при неинтенсивном разгоне на сухой асфальтовой дороге с большим углом поворота передних колес. $L_{1j} = 50 \text{ Н}\cdot\text{м}$, $\Delta = 0,4$, $V_x(0) = 5 \text{ м/с}$ (для "велосипедной" модели $L_1 = 100 \text{ Н}\cdot\text{м}$)

При движении по сухому асфальту с невысокой путевой скоростью и большим углом поворота передних колес наблюдается похожая ситуация. Погрешность определения положения продольной оси автомобиля и угловой скорости корпуса на начальном этапе движения в силу "велосипедной" модели увеличивается по сравнению с предыдущим случаем, но по-прежнему остается приемлемой (рис. 4).

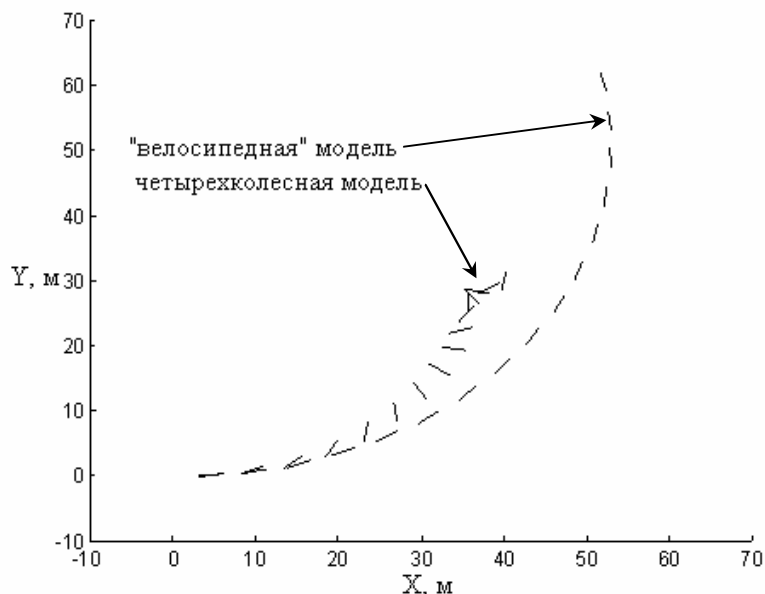


Рис. 5. Последовательные положения продольной оси переднеприводного автомобиля при разгоне на сухой асфальтовой дороге с пробуксовкой и большим углом поворота передних колес. $\Delta = 0,4$, $V_x(0) = 15$ м/с

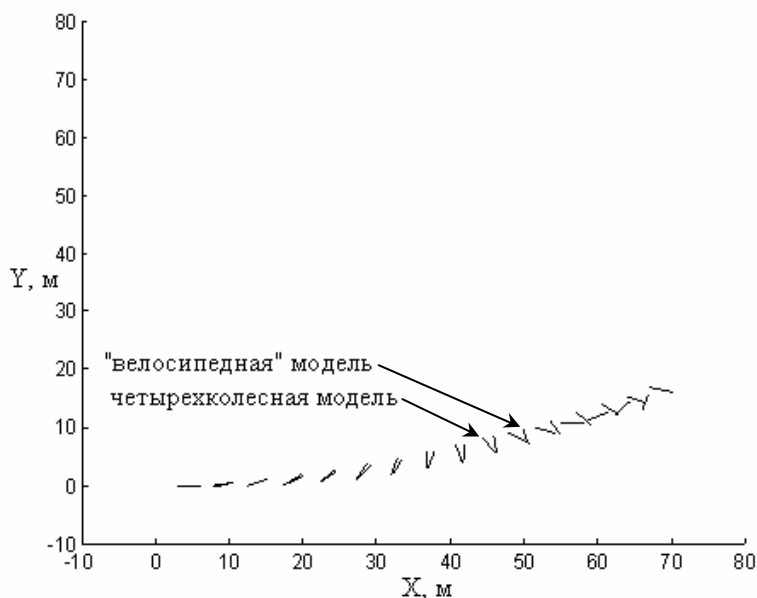


Рис. 6. Последовательные положения продольной оси переднеприводного автомобиля при разгоне на льду с пробуксовкой и большим углом поворота передних колес. $\Delta = 0,4$, $V_x(0) = 15$ м/с

При движении по сухому асфальту с высокой путевой скоростью и большим углом поворота передних колес угол крена, оставаясь малым, достаточно сильно изменяется и после истечения времени переходного процесса, что приводит к перераспределению нагрузки и сильным различиям между величинами контактных сил на колесах одной оси. Боковая контактная сила на колесах "велосипедной" модели превосходит суммарную боковую контактную силу на соответствующих осях четырехколесной модели, что увеличивает угловую скорость и кривизну траектории поворота для четырехколесной модели по сравнению с "велосипедной" моделью (рис. 5). При аналогичном движении по льду, т.е. при низком уровне сцепления колес с дорогой и, как следствие, малом различии между величинами контактных сил для колес одной оси, различия в поведении "велосипедной" и четырехколесной моделей на начальном этапе заноса являются приемлемыми (рис. 6).

Таким образом, показано, что при значениях параметров, начальных условий, возмущений и управлений, обеспечивающих движение автомобиля с достаточно малыми (но не изменяющимися существенно после истечения времени переходного процесса) углами крена, перераспределение нагрузки между колесами одной оси является незначительным. В этом случае при малых различиях характеристик сцепления колес одной оси с дорогой различия между "велосипедной" и четырехколесной моделями автомобиля как в режиме движения с малыми проскальзываниями колес относительно дороги, так и при движении в режиме заноса, являются приемлемыми.

Первая глава посвящена приближенному моделированию движения автомобиля без потери сцепления колес с дорогой, т.е. при выполнении условий (7). Возможность приближенного анализа связана с малостью величин μ и ε , введенных в (1), (2). При движении колес автомобиля в режиме псевдоскольжения оценками постоянных времени движения автомобиля служат $T_1 = V_{x^*}/g$, $T_2 = (\rho_{z1}/(A+B))T_1$, $T_3 = \varepsilon T_1$, $T_4 = \varepsilon\mu(\rho^2/R^2)T_1$. Здесь V_{x^*} – характерное значение путевой скорости автомобиля.

Для построения приближенных моделей движения автомобиля используется аппарат фракционного анализа [5], объединяющего методы теории размерности и подобия и методы теории сингулярных возмущений [1, 2, 7]. В системе (2)–(4), (9) проводится замена исходного набора фазовых переменных $V_x, V_y, \Omega_z, \Omega_j, \Omega_\Delta, \Psi, \Delta, X, Y$ новым набором $V_x, U_{xj}, U_{yj}, \Omega_\Delta, \Psi, \Delta, X, Y$, содержащим "быстрые" переменные U_{xj}, U_{yj} ($j=1,2$). Система (2)–(4), (9) приводится к безразмерной форме путем нормализации $t = T/T_*$, $v_x = V_x/V_{x^*}, \dots$, где T_*, V_{x^*}, \dots – характерные значения времени и переменных, отвечающие классу "медленных" движений автомобиля с характерными временами $T_* = T_1 \sim T_0$ порядка нескольких секунд, в течение которых развиваются процессы разгона, торможения и поворота. Система (2)–(4), (9), записанная в безразмерной форме, имеет вид

$$\frac{dw}{dt} = f_1(w, u_{yj}, u_{xj}, \varepsilon, \varepsilon\mu),$$

$$\varepsilon \frac{du_{yj}}{dt} = f_{2j}(\mathbf{w}, u_{yj}, u_{xj}, \varepsilon, \varepsilon\mu), \quad (10)$$

$$\varepsilon\mu \frac{du_{xj}}{dt} = f_{3j}(\mathbf{w}, u_{yj}, u_{xj}, \varepsilon, \varepsilon\mu) \quad (j=1,2).$$

Здесь \mathbf{w} – вектор "медленных" переменных $v_x, \omega_\Delta, \psi, \delta, x, y$; u_{xj}, u_{yj} – безразмерные компоненты векторов скоростей точек контакта колес с дорогой; f_1, f_{2j}, f_{3j} – условные обозначения правых частей. Параметры ε и μ рассматриваются в качестве малых параметров. После вырождения $\varepsilon = 0, \mu = 0$ сингулярно возмущенная система (10) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\mathbf{w}}}{dt} &= \mathbf{f}_1(\bar{\mathbf{w}}, \bar{u}_{yj}, \bar{u}_{xj}, 0, 0), \\ 0 &= f_{2j}(\bar{\mathbf{w}}, \bar{u}_{yj}, \bar{u}_{xj}, 0, 0), \\ 0 &= f_{3j}(\bar{\mathbf{w}}, \bar{u}_{yj}, \bar{u}_{xj}, 0, 0). \end{aligned} \quad (11)$$

Система (11) описывает медленные составляющие движения, развивающиеся на характерных временах $T \sim T_0$. Ее размерный аналог имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \Delta \frac{B^2 + \rho_z^2}{(A+B)^2} \right) M \frac{dV_x}{dT} &= \frac{L_1}{R \cos \Delta} + \\ &+ \frac{\operatorname{tg} \Delta}{A+B} \left(BF_y + M_z - \frac{B^2 + \rho_z^2}{A+B} \frac{MV_x}{\cos^2 \Delta} \Omega_\Delta \right) + \frac{L_2}{R} + F_x, \\ I_{z1} \frac{d\Omega_\Delta}{dT} &= M_\Delta - \frac{I_{z1}}{A+B} \frac{d(V_x \operatorname{tg} \Delta)}{dT}, \quad \frac{d\Psi}{dT} = \frac{\operatorname{tg} \Delta}{(A+B)} V_x, \quad \frac{d\Delta}{dT} = \Omega_\Delta, \\ \frac{dX}{dT} &= V_x \cos \Psi - V_y \sin \Psi, \quad \frac{dY}{dT} = V_x \sin \Psi + V_y \cos \Psi. \\ V_y &= \frac{B \operatorname{tg} \Delta}{(A+B)} V_x, \quad \Omega_z = \frac{\operatorname{tg} \Delta}{(A+B)} V_x. \end{aligned} \quad (12)$$

С применением методов теории сингулярных возмущений в работе были получены достаточные условия допустимости проведенного вырождения:

$$H < \min(A, B), \quad P_{y2} \sin \delta > 0. \quad (13)$$

Первое из условий (13) требует низкого расположения центра масс и выполняется для большинства автомобилей. Второе условие означает, что боковая контактная сила на заднем колесе должна быть направлена внутрь поворота, что является естественным для рассматриваемого режима движения без потери сцепления колес с дорогой. При выполнении условий (13) и условий гладкости правых частей системы (10) рассогласование между решениями исходной и вырожденной систем (2)–(4), (9) и (12) оценивается величиной $O(\varepsilon + \mu) \sim 20\%$ на интервале времени $T \sim T_0$. Эта оценка для "медленных" переменных справедлива на всем указанном интервале времени, для "быстрых" переменных – вне пограничного слоя малой ширины.

В диссертационной работе проводится аналитическое и численное сравнение асимптотической модели (12) с асимптотической моделью, полученной в [6] в предположении малости величин μ , ε и характерных значений Δ_* угла Δ поворота передних колес, и с неголономной моделью, получаемой на основании гипотезы о непроскальзывании колес.

Показано, что линейризация модели (12) по малому Δ приводит к системе, отличной от модели из [6]. Причина этого заключается в том, что при $|\Delta| \ll 1$ переменные V_y , Ω_z изменяются в малых диапазонах и наравне с U_{xj} , U_{yj} являются "быстрыми" переменными. При $\Delta = 0$ система (12) совпадает с асимптотической моделью из [6].

При построении неголономной модели движения автомобиля соотношения

$$\begin{aligned} U_{x1} &= V_x \cos \Delta + (V_y + \Omega_z A) \sin \Delta - \Omega_1 R = 0, \\ U_{y1} &= -V_x \sin \Delta + (V_y + \Omega_z A) \cos \Delta = 0, \\ U_{x2} &= V_x - \Omega_2 R = 0, \quad U_{y2} = V_y - \Omega_z B = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

рассматриваются в качестве уравнений неголономных связей, наложенных на систему. Уравнения неголономной модели получаются с применением метода неопределенных множителей Лагранжа. Неголономная модель отличается от асимптотической модели (12), поскольку учитывает инерционные свойства колес. При $m = 0$ неголономная модель совпадает с асимптотической моделью (12).

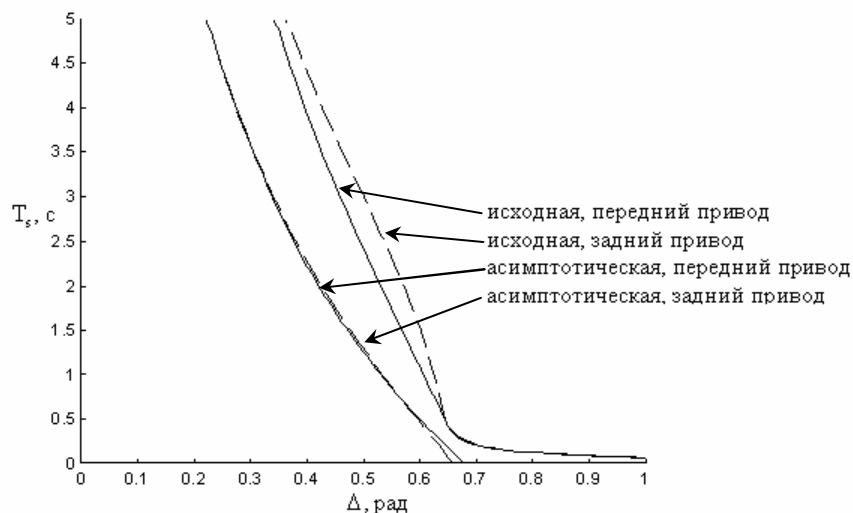


Рис. 7. Зависимость интервала времени движения без потери сцепления колес с дорогой от величины угла поворота передних колес при разгоне передне- и заднеприводного автомобилей. $L_1 = 300$ Н·м, $L_2 = 0$ Н·м и $L_1 = 0$ Н·м, $L_2 = 300$ Н·м соответственно, $V_x(0) = 5$ м/с

В ходе численного исследования показано, что оценки точности и пределы применимости асимптотических моделей соответствуют теоретическим оценкам. Рассматривалось влияние на потерю сцепления колес с

дорогой управляющих параметров – разгонных, тормозных моментов и угла поворота передних колес (рис. 7).

Вторая глава посвящена построению асимптотических моделей движения автомобиля при различных вариантах потери сцепления колес с дорогой. Рассматриваются три случая возможного движения: движение при потере сцепления с дорогой колес передней оси, задней оси и колес обеих осей. Асимптотические модели получаются на основании подходов, изложенных в первой главе диссертации. В случае, когда j -е колесо теряет сцепление с дорогой, соответствующие переменные U_{xj} , U_{yj} начинают изменяться медленно, что повышает порядок дифференциальных уравнений вырожденной системы по сравнению с (12). В случае потери сцепления с дорогой колес обеих осей автомобиля быстро изменяющимися переменными являются угловые скорости Ω_1 , Ω_2 вращения колес вокруг осей A_1y_1 , A_2y_2 . В качестве примера приведем асимптотическую модель движения автомобиля при потере сцепления с дорогой переднего колеса

$$\begin{aligned}
 M \frac{dV_x}{dT} &= P_{x1} \cos \Delta - P_{y1} \sin \Delta + P_{x2} + MV_y \Omega_z + F_x, \\
 I_z \frac{d\Omega_z}{dT} &= (P_{x1} \sin \Delta + P_{y1} \cos \Delta)A - P_{y2}B + M_z, \\
 I_{z1} \frac{d\Omega_\Delta}{dT} &= M_\Delta - I_{z1} \frac{d\Omega_z}{dT}, \quad \frac{d\Psi}{dT} = \Omega_z, \quad \frac{d\Delta}{dT} = \Omega_\Delta, \\
 \frac{dX}{dT} &= V_x \cos \Psi - V_y \sin \Psi, \quad \frac{dY}{dT} = V_x \sin \Psi + V_y \cos \Psi, \\
 N_1 &= \frac{(MgB - P_{x2}H)}{A + B + \left(-\alpha_{x1} \frac{U_{x1}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{yx1}^2}} \cos \Delta + \alpha_{y1} \frac{U_{y1}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{yx1}^2}} \sin \Delta \right) H}, \\
 N_2 &= Mg - N_1, \\
 P_{x1} &= \frac{L_1}{R} \equiv -\alpha_{x1} N_1 \frac{U_{x1}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y1}^2}}, \quad P_{y1} = -\alpha_{y1} N_1 \frac{U_{y1}}{\sqrt{U_{x1}^2 + U_{y1}^2}}, \quad P_{x2} = \frac{L_2}{R}, \\
 P_{y2} &= \left(1 + \frac{MB^2}{I_z} \right)^{-1} \left[\left(\frac{MAB}{I_z} - 1 \right) (P_{x1} \sin \Delta + P_{y1} \cos \Delta) + \right. \\
 &\quad \left. + MV_x \Omega_z - F_y + \frac{MB}{I_z} M_z \right], \\
 V_y &= \Omega_z B, \quad U_{x1} = V_x \cos \Delta + \Omega_z (A + B) \sin \Delta - \Omega_1 R, \\
 U_{y1} &= -V_x \sin \Delta + \Omega_z (A + B) \cos \Delta,
 \end{aligned} \tag{15}$$

$$\Omega_2 = \frac{V_x}{R}, \quad U_{x2} = -\frac{\varepsilon\Omega_2 R}{\varkappa_{x2} N_2} P_{x2}, \quad U_{y2} = -\frac{\varepsilon\Omega_2 R}{\varkappa_{y2} N_2} P_{y2}.$$

Достаточными условиями корректности перехода от исходной системы к системе (15), помимо условий гладкости правых частей исходной системы, служат

$$H < B, \quad \text{если } P_{y1} \sin \Delta < 0, \quad (16)$$

$$H < B, \quad \varkappa_{y1}^2 N_1 |\sin \Delta| H / (A + B) < |P_{y1}|, \quad \text{если } P_{y1} \sin \Delta \geq 0.$$

Как указывалось ранее, условие $H < B$ выполняется для большинства современных автомобилей. При выполнении условия $P_{y1} \sin \Delta < 0$ передние колеса автомобиля должны быть повернуты в сторону бокового скольжения передней оси, т.е. наружу поворота. Подобный режим не характерен для движения с боковым скольжением одной только передней оси автомобиля и может возникнуть лишь как часть сложного движения в процессе заноса. Условие $P_{y1} \sin \Delta \geq 0$, напротив, выполняется в подавляющем большинстве случаев. Условие $\varkappa_{y1}^2 N_1 |\sin \Delta| H / (A + B) < |P_{y1}|$ требует, чтобы контактная сила была больше своего предельного значения равного произведению коэффициента трения на нормальную реакцию, умноженного на коэффициент не превосходящий 0,1, поэтому на заданном уровне точности его можно считать выполненным.

В диссертационной работе построена динамическая модель переменной структуры, описывающая движение автомобиля в различных дорожных ситуациях. Указанная модель образована асимптотической моделью (15) и аналогичными асимптотическими моделями движения автомобиля при потере сцепления с дорогой заднего колеса и колес обеих осей, а также моделью (12) движения автомобиля без потери сцепления колес с дорогой. Условиями перехода от одной модели к другой служат выражения (5)–(8). Показано, что асимптотические процедуры, примененные к уравнениям (1), приводят к модели переменной структуры, которая совпадает с построенной в работе моделью. Оценки погрешности, условия применимости и условия перехода от одной модели к другой также не претерпевают изменений.

Проводился численный анализ динамической модели переменной структуры, позволяющий подтвердить ее достоверность на основании ряда тестовых расчетов. Рассматривались движения автомобилей с различными типами привода в процессе заноса под действием начальных возмущений по угловой скорости корпуса, исследовано влияние на занос управляющих воздействий.

Показано, что при потере сцепления с дорогой передних колес вследствие блокировки или пробуксовки начальная угловая скорость автомобиля достаточно быстро затухает, что приводит к стабилизации угла курса (рис. 8).

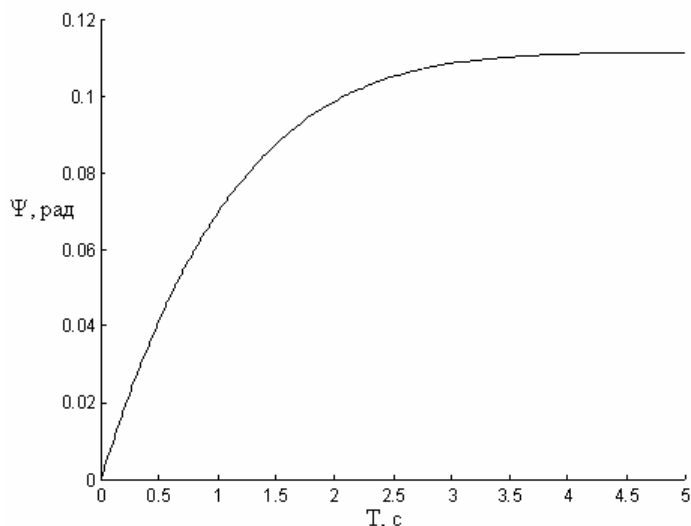


Рис. 8. Зависимость угла курса переднеприводного автомобиля от времени при разгоне с пробуксовкой передних колес и фиксированным (нулевым) углом Δ поворота передних колес. $\Omega_z(0) = 0,1 \text{ 1/с}$, $V_x(0) = 1 \text{ м/с}$

Аналогичная ситуация наблюдается при потере сцепления с дорогой колес обеих осей автомобиля (рис. 9, после момента времени T_1). При потере сцепления с дорогой задних колес начальная угловая скорость, напротив, начинает возрастать (рис. 9, до момента времени T_1), что приводит к резкому росту параметров бокового движения (рис. 10). Таким образом, модель переменной структуры подтверждает, что потеря сцепления с дорогой задних колес наименее желательна с точки зрения безопасности движения по сравнению с потерей сцепления передних или колес обеих осей автомобиля.

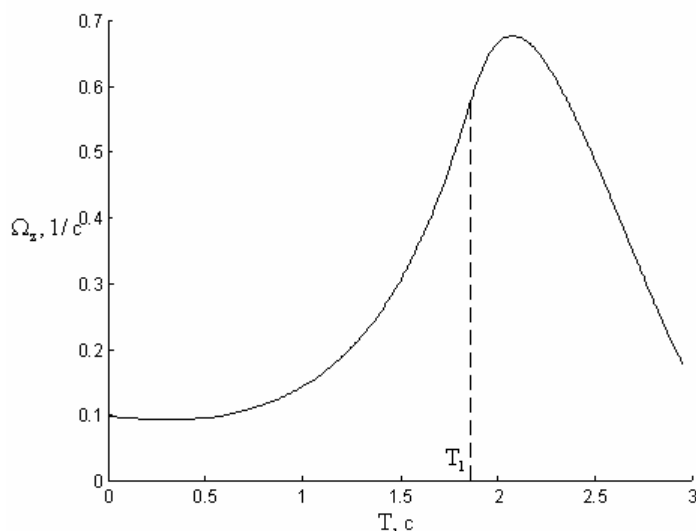


Рис. 9. Зависимость угловой скорости корпуса заднеприводного автомобиля от времени при разгоне с пробуксовкой задних колес и фиксированным (нулевым) углом Δ поворота передних колес. $\Omega_z(0) = 0,1 \text{ 1/с}$, $V_x(0) = 1 \text{ м/с}$

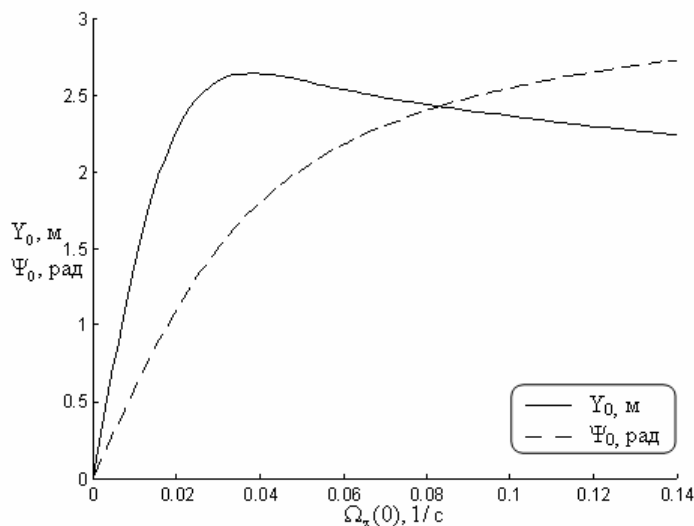


Рис. 10. Зависимость боковой координаты Y_0 центра масс и угла курса Ψ_0 автомобиля в момент остановки от начальной угловой скорости корпуса при торможении с блокировкой задних колес и фиксированным (нулевым) углом Δ поворота передних колес. $V_x(0) = 10$ м/с

В работе исследовалось влияние на ход заноса изменений угла поворота передних колес. При помощи модели переменной структуры подтверждено, что поворот передних колес в сторону проскальзывания задней оси автомобиля препятствует дальнейшему развитию заноса (рис. 11).

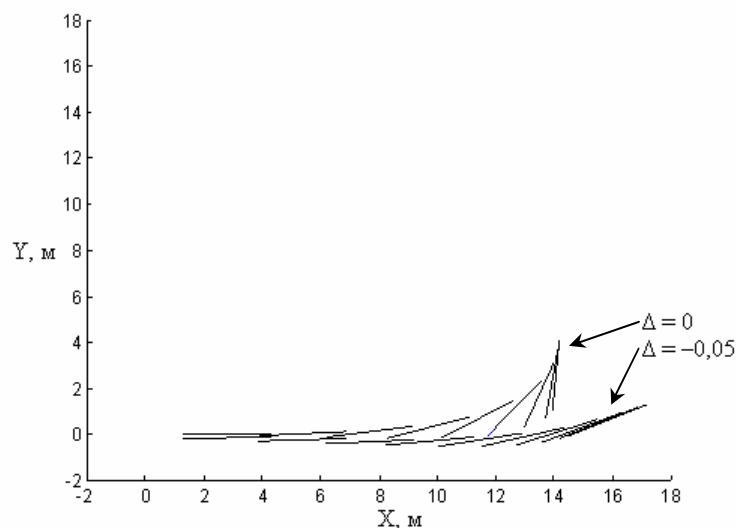


Рис. 11. Последовательные положения продольной оси автомобиля при торможении с блокировкой задних колес и фиксированном (нулевом) и повернутом в сторону заноса задней оси угле Δ поворота передних колес. $\Omega_z(0) = 0,03$ 1/с, $V_x(0) = 10$ м/с

Проведенный анализ асимптотических моделей позволяет сформировать качественные оценки влияния тех или иных факторов управления автомобилем на его занос.

В Заключение приведены основные положения диссертационной работы, выносимые на защиту:

1. Рассмотрена "велосипедная" модель движения автомобиля, учитывающая псевдоскольжения колес. При помощи методов фракционного анализа, включающего методы теории размерности и подобия и методы теории возмущений, построены асимптотические модели движения автомобиля для случая произвольных углов поворота передних управляемых колес. Указанные модели описывают порознь "медленные" движения на временах порядка нескольких секунд, в течение которых происходят траекторные движения автомобиля, и "быстрые" изменения скоростей точек контакта колес.
2. Рассмотрена неголономная модель движения автомобиля, имеющая тот же порядок дифференциальных уравнений, что и асимптотическая модель "медленных" составляющих движения для случая псевдоскольжения колес. Проведено аналитическое и численное сравнение неголономной модели и моделей, полученных асимптотическими методами.
3. С применением методов фракционного анализа построены приближенные математические модели движения автомобиля при различных вариантах потери сцепления колес с дорогой. Получены оценки точности и условия корректности моделей. На основании указанных моделей построена динамическая модель переменной структуры, описывающая движение автомобиля в различных дорожных ситуациях.
4. Проведен численный анализ динамической модели переменной структуры, позволивший подтвердить ее достоверность на основании тестовых расчетов; рассмотрено влияние на ход заноса управляющих параметров – разгонных, тормозных моментов и углов поворота передних колес.

Список публикаций по теме диссертации

1. Влахова А.В., Новожилов И.В., Смирнов И.А. Математическое моделирование заноса автомобиля.// Вестник Московского университета. Сер. 1, Математика. Механика, №6, 2007. – С. 44-50.
2. Влахова А.В., Смирнов И.А. Занос колесного экипажа на вираже. // Труды XII международного научно-технического семинара "Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации". Сентябрь 2003 г, Алушта. – М.: Издательство МЭИ, 2003. С. 330-331.
3. Смирнов И.А. О построении асимптотических моделей двухколесного экипажа различного уровня точности. // XXVI Конференция молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова. Тезисы докладов. М, 2004. С.113.
4. Влахова А.В., Смирнов И.А. Методы приближенного математического моделирования движения автомобиля. // Материалы 49-ой международной научно-технической конференции ААИ "Приоритеты развития

отечественного автотракторостроения и подготовки инженерных и научных кадров". Секция 4. "Математические методы моделирования и оптимизации автотранспортных средств". Часть 1. М.: МАМИ, 2005. С. 37-40.

5. Влахова А.В., Смирнов И.А. Описание движения автомобиля при помощи модели переменной структуры. // Труды XIV международного научно-технического семинара "Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации". Сентябрь 2005 г., Алушта. – Самара: Самарский государственный аэрокосмический университет, 2005. С. 90.
6. Смирнов И.А. Методы математического моделирования движения автомобиля. // Труды XV международного научно-технического семинара "Современные технологии в задачах управления, автоматизации и обработки информации". Сентябрь 2006 г., Алушта. - М 2006. С. 165.

Литература к автореферату

1. Васильева А.Б. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных. // Ж. выч. матем. и мат. физ. 1963. Т. 3, № 4. С. 611–642.
2. Васильева А.Б, Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.
3. Влахова А.В., Новожилов И.В. О заносе колесного экипажа при «блокировке» и «пробуксовке» одного из колес. // Фундаментальная и прикладная математика, 2005. Т.11, вып.7. С. 11-20.
4. Магомедов М.Х. Антиблокировочные системы робастно-адаптивной стабилизации движения колесно-транспортных средств. // Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. М.: 2003. – 299 с.
5. Новожилов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995. – 224 с.
6. Новожилов И.В., Павлов И.С. Приближенная математическая модель колесного экипажа. // Изв. РАН. МТТ. 1997. №2. С. 196–204.
7. Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных.// Матем. сб. 31 (73). 1952. №3. С. 575-586.