

На правах рукописи

НЕВСКИЙ Юрий Александрович

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ГРАВИТАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ
В ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМАХ**

Специальность 01.02.05 – механика жидкости, газа и плазмы

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Работа выполнена на кафедре аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета и в лаборатории механики многофазных сред Института механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
А.Н. Осипцов

Официальные оппоненты: член корреспондент РАН
доктор физико-математических наук
О.Э. Мельник
кандидат физико-математических наук
М.К. Ермаков

Ведущая организация: Институт механики УНЦ РАН (г. Уфа)

Защита состоится 28 мая 2010 г. в 15 часов на заседании диссертационного совета Д.501.001.89 при Московском государственном университете им. М.В. Ломоносова по адресу: 119899, г. Москва, Ленинские горы, Главное здание МГУ, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова.

Автореферат разослан “___” апреля 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д.501.001.89,
доктор физико-математических наук

А.Н. Осипцов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Процессы гравитационной конвекции в дисперсных системах широко распространены в природе и технике. Примерами могут служить двухфазная конвекция в вулканических очагах магмы, течения двухфазных рабочих сред в химико-технологических аппаратах (флотация, барботаж и пр.), осаждение примесей при промышленной очистке воды, движение пропанта в трещинах гидроразрыва, разделение компонент биологических жидкостей в медицинских приложениях и многие другие. В лабораторной практике широко используется метод фракционирования гранулированных материалов, основанный на гравитационной седиментации частиц. Список приложений, использующих процесс гравитационной конвекции двухфазных сред, может быть продолжен за счет рассмотрения во многом аналогичных процессов, происходящих в разнообразных инерционных сепараторах, где роль силы тяжести играет центробежная сила.

В связи с развитием компьютерных технологий и численных методов в последние годы наметился значительный интерес к количественному описанию гравитационной конвекции суспензий и объяснению ряда неожиданных эффектов, выявленных экспериментально, но не допускающих интерпретации на основе простых гидравлических или аналитических моделей. Один из таких эффектов - увеличение эффективной скорости гравитационного осаждения дисперсной примеси в закрытых сосудах при отклонении стенок сосуда от направления силы тяжести. Этот эффект был обнаружен еще в начале XX века известным английским ученым-медиком Артуром Бойкоттом (A.E. Boycott) при оседании эритроцитов крови и с тех пор в литературе носит название эффекта Бойкотта. Как правило, ускорение процесса осаждения примеси связывают с возникновением крупномасштабных вихревых течений в процессе гравитационного осаждения суспензии. Развитие вихревых зон часто сопровождается появлением мезомасштабных явлений, в частности, образованием расслоений дисперсной фазы, ориентированных перпендикулярно силе тяжести. Причины развития вихревых зон и образования расслоений в поле концентрации дисперсной фазы, а также влияние этих факторов на эффективную скорость осаждения примеси в замкнутых объемах остаются во многом не исследованными.

Современный подход к описанию движения дисперсных систем основан на использовании приближения взаимопроникающих и взаимодействующих континуумов, где каждый континуум относится к определенной фазе вещества. В литературе существует совсем немного работ, в которых для исследования гравитационной конвекции дисперсных систем применяются обоснованные континуальные модели. Отсутствует общепринятый набор безразмерных параметров подобия для задач двухфазной конвекции.

При описании конвективных течений многофазных сред существуют про-

блемы, связанные с замыканием континуальных моделей и обоснованием корректности используемых соотношений. Для суспензий характерно небольшое различие плотностей материалов фаз, что приводит к необходимости оценки роли нестационарных процессов на масштабе обтекания отдельных частиц, а следовательно, и вклада нестационарных составляющих силы межфазного взаимодействия (сил Архимеда, присоединенных масс, Бассэ-Буссинеска).

При континуальном описании суспензии учет конечности объемной доли включений, имеющих плотность, отличную от плотности несущей фазы, делает среду эффективно "сжимаемой" даже в случае несжимаемых несущей фазы и вещества частиц. Это свойство обусловлено изменением массы единицы объема среды за счет относительного перемещения фаз. Следует отметить, что этот факт игнорируется практически во всех опубликованных к настоящему времени теоретических исследованиях гравитационной конвекции суспензии.

Для проведения численного моделирования гравитационной конвекции в рамках двухконтинуальных моделей требуется разработка специальных численных алгоритмов, учитывающих как сжимаемость континуума, описывающего несущую фазу, так и возможность появления сильных разрывов в поле концентрации дисперсной фазы.

Перечисленные выше проблемы послужили мотивацией для проведения исследований, изложенных в настоящей диссертационной работе.

Цели работы:

- Построение общей двухконтинуальной гидродинамической модели гравитационной конвекции суспензий с малой, но конечной объемной концентрацией дисперсной фазы; определение параметров подобия, управляющих процессом конвекции, и масштабных факторов.
- Исследование роли нестационарных составляющих силы межфазного взаимодействия (в том числе наследственной силы Бассэ) в задачах гравитационного оседания частиц. Определение условий возможности пренебрежения (необходимости учета) этими силами.
- Построение предельных (асимптотических по значениям безразмерных параметров) моделей гравитационной конвекции суспензии, соответствующих типичным реальным ситуациям.
- Разработка численных алгоритмов и проведение параметрических численных расчетов гравитационной конвекции суспензии в замкнутых двумерных объемах. Исследование возникновения вихревых течений, а также эффектов ускоренного осаждения частиц в сосуде с наклонными стенками (эффект Бойкотта) и горизонтального расслоения дис-

персной примеси. Сопоставление результатов, полученных на основе моделей с конечной и пренебрежимо малой объемной концентрацией частиц.

Научная новизна. В работе получены следующие новые результаты, выносимые на защиту:

- Построена общая двухконтинуальная гидродинамическая модель гравитационной конвекции суспензии с конечной объемной долей дисперсной фазы. Определены параметры подобия, управляющие конвекцией, и найдены масштабные факторы. Построены упрощенные модели, соответствующие характерным предельным значениям определяющих параметров и представляющие интерес для практических приложений.
- В рамках обоснования корректности модели на ряде модельных задач проведено исследование влияния нестационарных и "наследственных" сил в межфазном взаимодействии на движение одиночных тяжелых (легких) сферических частиц в нестационарном потоке. Развита алгоритмы вычисления наследственной силы Бассэ. Определен диапазон параметров, в котором описание оседающей (всплывающей) примеси в суспензии невозможно без учета нестационарных и "наследственных" сил.
- Для предельной модели стационарной гравитационной конвекции, вызванной оседанием малоинерционных частиц в эффективно невязкой жидкости, найдены условия существования первого интеграла уравнений баланса импульса. Приведены примеры аналитических решений, построенных с использованием указанного первого интеграла.
- В рамках модели сильновязкой жидкости с малоинерционными частицами проведено численное исследование ряда задач гравитационной конвекции в замкнутых двумерных сосудах. Исследованы условия развития вихревых структур и неустойчивостей на границе "суспензия-чистая жидкость". Численно воспроизведены экспериментально полученные эффекты ускорения осаждения и горизонтального расслоения дисперсной примеси в сосуде с наклонными стенками. Проведено сравнение численных расчетов для случаев учета и пренебрежения объемной долей дисперсной фазы.

Достоверность результатов диссертации обусловлена использованием современных математических моделей движения дисперсных сред. В численных алгоритмах применялись методы, хорошо апробированные при решении аналогичных задач математической физики. Точность расчетов

подтверждается сравнением результатов с известными численными и аналитическими решениями, а также качественным соответствием полученных результатов некоторым известным экспериментальным данным.

Научная значимость работы состоит в исследовании роли нестационарных и наследственных сил при описании межфазного взаимодействия в задачах гравитационного оседания частиц в нестационарном потоке, а также в разработке математических моделей и численных алгоритмов, позволяющих корректно описывать эффекты развития вихревых структур, расщепления дисперсной фазы и эффект Бойкотта в задачах гравитационной конвекции суспензий.

Практическая значимость работы заключается в создании математических моделей и комплекса компьютерных программ, позволяющих моделировать процесс гравитационной конвекции суспензии с целью управления эффективной скоростью разделения фаз, а также в выработке ряда качественных рекомендаций по организации процесса осаждения дисперсной фазы.

Апробация работы. Результаты, полученные в диссертации, докладывались на 14 международных и российских научных конференциях: Конференции-конкурсе молодых ученых НИИ механики МГУ (2004, 2006-2009); Конференции “Ломоносовские чтения” (2005, 2008, 2009, 2010); IX Всероссийском съезде по теоретической и прикладной механике (Н. Новгород, 2006); XV школе-семинаре “Современные проблемы гидроаэродинамики” (Сочи, 2007); Всероссийской конференции “Механика и химическая физика сплошных сред” (Бирск, 2007); Всероссийской конференции “Современные проблемы механики сплошной среды”, посвященной 100-летию акад. Л.И. Седова (Москва, 2007); XV Международной конференции “Современные проблемы математики, механики и их приложений”, посвященной 70-летию акад. В.А. Садовниченко (Москва, 2009); Международной конференции “Потоки и структуры в жидкостях: физика геосфер” (Москва, 2009), XVI Международной конференции “Вычислительная механика и современные вычислительные программные системы” (Алушта, 2009).

Результаты работы обсуждались на трех специализированных научных семинарах: семинаре кафедры аэромеханики и газовой динамики механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (Москва, 2003-2008), семинаре по механике многофазных сред под рук. д.ф.-м.н. А.Н. Осипцова (НИИ механики МГУ, Москва, 2003-2009), семинаре под рук. акад. А.Г. Куликовского, проф. А.А. Бармина, проф. В.П. Карликова (2010 г.).

Публикации по теме диссертации. Основные результаты работы изложены в 16 научных публикациях. Статьи [10] и [11] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК на момент публикации.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, четы-

рех глав, заключения и списка литературы. В работе содержится 21 рисунок, 2 таблицы и 121 библиографическая ссылка. Общий объем диссертации составляет 118 страниц.

Глава 1 посвящена обзору исследований гравитационного оседания дисперсных частиц в вязкой жидкости, оседания суспензий в замкнутых объемах и проблеме замыкания континуальных уравнений дисперсных сред, возникающей при построении моделей гравитационной конвекции суспензий с конечной объемной долей примеси.

В **разделе 1.1** описаны подходы к учету зависимости скорости оседания примеси от локальной объемной концентрации частиц, основанные на введении поправочной функции к стоксовской скорости осаждения одиночной частицы. Обсуждаются особенности влияния взаимного расположения частиц на вводимые поправочные функции. Цитируются известные обзоры G. Batchelor, R. Davis & A. Acrivos, M. Ungarish и другие работы. Приведены результаты ряда экспериментальных работ и наиболее часто используемые в литературе выражения для "стесненной" скорости оседания частиц. Отмечается, что в инженерной практике наиболее часто используется степенная поправочная функция в стоксовской скорости оседания одиночной частицы с различными показателями степени n : $f(c) = (1 - c)^n$, где c - локальная объемная концентрация частиц.

В **разделе 1.2** дан обзор основных публикаций, посвященных экспериментальному исследованию и моделированию гравитационной конвекции дисперсных систем в замкнутых объемах. Особое внимание уделяется работам, в которых исследуется эффект ускоренного оседания дисперсной фазы в сосудах с наклонными стенками (эффект Бойкотта). Отмечаются ключевые моменты развития теоретических моделей, начиная с "теории кинематических волн" Кинча (G. Kynch), геометрической теории ПНК (авторы - Ponder E., Nakamura H., Kuroda K.) и заканчивая двухконтинуальными подходами, сформулированными в работах школы А. Акривоса. Отмечается вклад в исследование различных задач двухфазной конвекции таких авторов, как B. Fitch, K. Davis, R. Davis, K. Kinoshita, W.D. Hill, U. Shaffinger, A. Acrivos, E. Herzbolzheimer, S.J. McCaffery, L. Elliott, D.B. Ingham, F. Blanchette, Г.М. Махвиладзе, В.П. Мясников, В.Л. Зеленко, Д.В. Любимов и др. На основе обзора литературы сделан вывод, что проблеме построения строгих двухконтинуальных моделей для гравитационного осаждения суспензий в замкнутых объемах уделялось недостаточное внимание. Отсутствуют общепринятые параметры подобия для задач конвекции дисперсных систем. Остается открытым вопрос о роли нестоксовских компонент в межфазном взаимодействии (сил Архимеда, присоединенных масс, Бассэ-Буссинеска), требует специального анализа вопрос о корректном уче-

те "сжимаемости" континуума, описывающего суспензию. Наконец, требуется модель для количественного описания эффекта Бойкотта и анализ причин возникновения вихревых зон и мезомасштабных структур в оседающей суспензии.

Глава 2 посвящена формулировке основных уравнений гравитационной конвекции двухфазных смесей типа "жидкость-твердые частицы" в рамках двухконтинуального подхода и особенностям замыкания полученных уравнений. Рассмотрены как строго обоснованные методы замыкания уравнений двухфазной конвекции, применимые для случая малой объемной доли примеси, так и полуэмпирические соотношения, используемые, в основном, при учете конечной объемной доли дисперсной фазы.

В **разделе 2.1** из общей интегральной модели описания движения многофазных систем выводятся дифференциальные уравнения двухконтинуальной модели для разреженных дисперсных смесей, состоящих из твердых частиц и жидкости. Используются предположения о ньютоновской реологии жидкости и малости хаотической составляющей скорости дисперсных включений, что позволяет пренебречь тензором напряжений в среде частиц.

Для определения межфазной силы используются выражения, справедливые для одиночной частицы при малых значениях числа Рейнольдса обтекания частицы $Re_s = 2\sigma|\mathbf{v} - \mathbf{v}_s|\rho/\mu_0$. Здесь локальные скорости несущей фазы и примеси обозначаются как \mathbf{v} и \mathbf{v}_s , ρ - плотность несущей фазы, μ_0 - вязкость несущей фазы, а σ - радиус частиц.

Раздел 2.2 посвящен, в основном, описанию взаимодействия между несущей фазой и сферическими частицами с учетом нестоксовских составляющих межфазной силы (сил Архимеда, присоединенных масс и Бассэ-Буссинеска). В этом случае межфазная сила имеет вид (M. Maxey & J. Riley (1983)):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_s = & 6\pi\sigma\mu(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) + \frac{2}{3}\pi\sigma^3\rho\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d_s\mathbf{v}_s}{dt}\right) + \frac{4}{3}\pi\sigma^3\rho\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathbf{g}\right) + \\ & + 6\sigma^2\sqrt{\pi\mu\rho}\int_0^t \frac{d_s(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s)}{d\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое - сила Стокса \mathbf{f}_{St} , второе - сила присоединенных масс \mathbf{f}_m , третье - сила Архимеда \mathbf{f}_A , четвертое - сила Бассэ-Буссинеска \mathbf{f}_B , \mathbf{g} - ускорение силы тяжести.

Анализ вклада перечисленных выше сил на масштабе длины скоростной релаксации уединенной частицы позволяет заключить, что при сравнимых плотностях фаз априорное пренебрежение остальными силами по сравнению с силой Стокса некорректно. Длина скоростной релаксации определя-

ется соотношением $l = mU/6\pi\sigma\mu$, где m - масса частицы, U - ее характерная скорость, а масштаб времени определяется как l/U .

В конце раздела приводятся имеющиеся в литературе выражения для поправок к межфазной силе на "стесненность" обтекания частиц при их регулярном и хаотическом расположении в пространстве.

Раздел 2.3 посвящен построению двухконтинуальной модели гравитационной конвекции суспензии с учетом конечности объема, занятого дисперсной фазой. Считается, что собственные напряжения в среде частиц отсутствуют, суспензия в целом - сжимаемая (за счет возможности перераспределения примеси) ньютоновская жидкость с переменной вязкостью, зависящей от локальной объемной доли частиц, и ее тензор напряжений имеет вид:

$$P^{ij} = -p\delta^{ij} + 2\mu(c)e^{ij} - \frac{2}{3}\mu(c)\delta^{ij}\text{div}(\mathbf{v})$$

Здесь δ^{ij} - символы Кронекера, e^{ij} - компоненты тензора скоростей деформации, p - гидродинамическое давление. Зависимость вязкости от локальной концентрации при малых объемных концентрациях частиц можно вычислять по формуле Эйнштейна:

$$\mu(c) = \mu_0 \left(1 + \frac{5}{2}c \right), \quad \mu_0 = \mu(0)$$

Для вычисления зависимости вязкости суспензии от объемной доли при больших значениях объемной концентрации примеси можно использовать выражение, предложенное в работе A.L. Graham (1981).

При формулировке окончательной формы уравнений суспензии оказывается удобным вместо уравнения импульса для несущей фазы использовать эквивалентное уравнение импульса для среды в целом. Это уравнение получается суммированием уравнений импульса для несущей и дисперсной фаз, что позволяет исключить силу межфазного взаимодействия. Удобно также вместо уравнения неразрывности для несущей фазы записать эквивалентное уравнение неразрывности для среднеобъемной скорости суспензии в целом, поскольку такая скорость бездивергентна. Заметим, что дивергенция среднemasсовой скорости суспензии не равна нулю, и поэтому среда "сжимаема". В результате, уравнения дисперсной смеси с конечным объемным содержанием частиц в поле силы тяжести можно записать в виде:

$$\text{div}[(1-c)\mathbf{v} + c\mathbf{v}_s] = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c\mathbf{v}_s) = 0 \quad (2)$$

$$\rho(1-c)\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho_s c \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} = \nabla_j \mathbf{P}^j + [\rho(1-c) + \rho_s c] \mathbf{g}$$

$$m \frac{d_s \mathbf{v}_s}{dt} = \mathbf{f}_s + m \mathbf{g}$$

Здесь плотности вещества фаз ρ и ρ_s считаются постоянными.

Конечность объема частиц приводит к необходимости учета стесненности обтекания частиц при формулировке выражений для межфазного обмена импульсом. Поправка к силе Стокса $\varphi_1(c)$ зависит от геометрии близко расположенных частиц. Аналогичные поправки $\varphi_{2-4}(c)$ должны быть учтены и в выражениях для сил присоединенных масс, Архимеда и Бассэ-Буссинеска в выражении для \mathbf{f}_s . К сожалению, в литературе практически отсутствуют данные о конкретном виде таких поправочных функций для нестационарных составляющих межфазной силы.

Сформулированная модель учитывает двухскоростные эффекты, "сжимаемость" смеси за счет перераспределения объема дисперсной фазы и нестационарность сил в межфазном обмене импульсом.

Естественная попытка упростить представленную модель двухфазной конвекции связана с выяснением реальной необходимости учета нестационарных и наследственных сил в межфазном взаимодействии.

В связи с этим в **главе 3** рассмотрен ряд одномерных модельных задач о движении одиночных частиц под действием силы тяжести в стационарных и нестационарных гидродинамических полях. Развита методика численного решения интегродифференциального уравнения движения частицы с учетом силы Бассэ. Исследовано влияние силы Бассэ на длину скоростной релаксации частиц в задачах оседания (всплытия) частиц. На основании параметрических численных расчетов определены диапазоны отношения плотностей фаз, в которых можно не учитывать нестационарные и наследственные силы в межфазном взаимодействии.

В **разделе 3.1** рассматривается задача о влиянии сил гравитации, Архимеда, присоединенных масс и Бассэ-Буссинеска на характер движения уединенной частицы на длине ее скоростной релаксации при стоксовском законе сопротивления и характерной скорости, равной стоксовской скорости осаждения. Считается, что на частицу действуют все силы, определенные в (1). Оценка вклада различных сил в расчетах осуществляется с помощью условных коэффициентов a_{1-4} , которые равны нулю, если сила "выключена" или единице, если она "включена". В безразмерном виде система уравнений движения частицы выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}_s}{dt} = \mathbf{v}_s, \quad \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} = \lambda(\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) + \frac{\eta(2a_1 + a_2)}{2 + a_2\eta} \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \\ + \lambda \sqrt{\frac{9\eta}{2\pi}} a_3 \int_0^t \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_s}{dt} \right) \Big|_{t=t_1} \frac{dt_1}{\sqrt{t-t_1}} + a_4 \lambda (a_1 \eta - 1) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь \mathbf{j} - единичный вектор, направленный против силы тяжести, $\eta = \rho/\rho_s$ и $\lambda = 2/(2 + a_2\eta)$. Система (3) содержит единственный определяющий параметр - η .

Для численного решения уравнений (3) предложен как метод прямого численного интегрирования интегродифференциального уравнения, так и метод сведения этого уравнения к системе чисто дифференциальных уравнений более высокого порядка, основанный на идеях работы Е. Michaelides (1992). Указанная замена оказывается эквивалентной лишь в диапазоне отношения плотностей фаз $\eta < 4/7$. На основании параметрических расчетов в диссертации продемонстрирована достоверность результатов, полученных обоими методами.

Раздел 3.2 посвящен описанию результатов, полученных для случаев покоящейся, монотонно ускоряющейся, монотонно замедляющейся и осциллирующей несущей фазы. Методика определения вклада исследуемых сил следующая: перед силой, вклад которой исследуется, коэффициент a_i принимает нулевое значение. Скорости $\mathbf{v}_{sm_i}(t)$ и $\mathbf{v}_s(t)$ соответствуют системе (3) при $a_i = 0$ и $a_i = 1$. В качестве параметра, показывающего вклад исследуемой силы, используется величина $R_i = \max_t |\mathbf{v}_s(t) - \mathbf{v}_{sm_i}(t)|$ для тяжелых частиц ($\eta < 1$) и $R_i = \max_t |\mathbf{v}_s(t) - \mathbf{v}_{sm_i}(t)|/\eta$ для легких частиц ($\eta > 1$). Основные качественные результаты расчетов: для тяжелых частиц, движущихся в нестационарном поле скорости в отсутствие массовой силы, влиянием нестационарных и наследственных сил (присоединенных масс и Бассе-Буссинеска) можно пренебрегать; учет силы Бассе-Буссинеска при оседании частицы под действием массовой силы, даже в покоящейся жидкости, приводит к увеличению времени скоростной релаксации более чем на порядок. Для частиц, оседающих под действием силы тяжести в осциллирующем с частотой ω_1 потоке несущей фазы ($v(t) = \cos(\omega_1 t)$), полученные зависимости величин R_2 , R_3 и R_{23} от отношения плотностей фаз η для частот $\omega_1 = 0.1, 1, 10$ представлены на Рис. 1. Получено, что при описании движения тяжелых частиц силой присоединенных масс практически всегда можно пренебрегать (в пределах точности $\sim 5\%$), в то время как для легких частиц учет силы присоединенных масс необходим при любых условиях. В диапазоне отношений плотностей фаз $\eta \in [0.005; 0.92]$ вклад силы Бассе-Буссинеска превышает 5%.

Глава 4 посвящена исследованию задач гравитационной конвекции суспензии в замкнутых двумерных областях и выяснению параметров подобия, управляющих конвекцией. Рассмотрены важные частные случаи конвекции в сосудах, линейный размер которых много больше длины скоростной релаксации фаз. Отдельно исследован случай стационарной конвекции малоконцентрированной суспензии при больших числах Рейнольдса.

В разделе 4.1 общие уравнения гравитационной конвекции суспензии (2) записываются в безразмерном виде. В качестве масштабов при обезразмеривании приняты стоксовская скорость оседания частицы в плотной среде $U = mg|1 - \eta|/6\pi\sigma\mu_0$ и вертикальный линейный размер рассматрива-

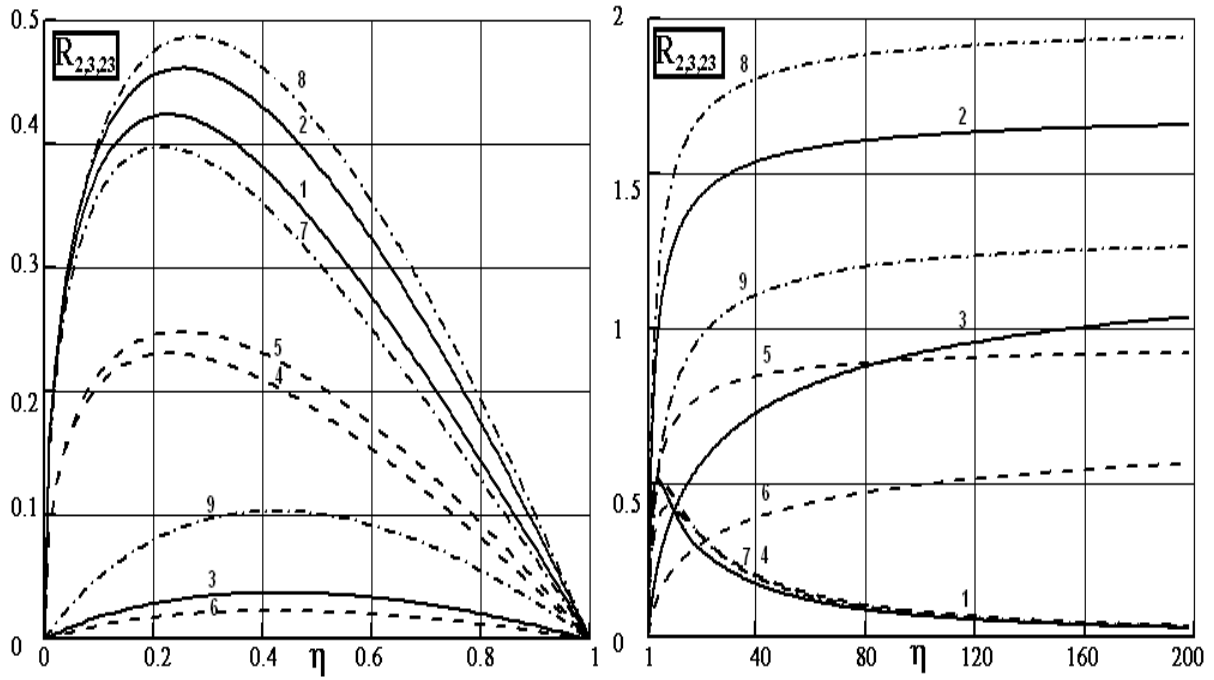


Рис. 1 Величины R_2 , R_3 и R_{23} в зависимости от отношения плотностей фаз η при $\omega_1 = 1$ (сплошная линия), $\omega_1 = 0.1$ (штрихованная линия) и $\omega_1 = 10$ (штрих-пунктир). Кривые 1, 4, 7 показывают влияние силы Бассэ (R_3), 2, 5, 8 - суммарное влияние нестационарных и наследственных сил (R_{23}), а 3, 6, 9 - влияние силы присоединенных масс (R_2).

емого замкнутого объема. Масштаб времени T_t , как правило, принимался равным отношению L/U . Случай равноплотной смеси или отсутствия силы гравитации становится вырожденным $U = 0$, но в этом случае отсутствует причина движения и конвекция не возникает.

Полная система уравнений гравитационной конвекции суспензий в безразмерном виде зависит от четырех параметров: параметра инерционности частиц $\beta = L/l$ (где l - длина скоростной релаксации частицы при стоксовском законе сопротивления), отношения плотностей фаз $\eta = \rho/\rho_s$, числа Рейнольдса конвекции $Re = \rho UL/\mu_0$ и числа Струхала $Sh = L/UT_t$, обычно равного единице. В начальные условия входит характерная объемная доля частиц в начальный момент времени c_0 .

В конце раздела приведены таблицы характерных значений размерных и безразмерных параметров, встречающихся в приложениях, из которых следует, что параметр инерционности частиц β практически всегда удовлетворяет неравенству $\beta \gg 1$, а числа Рейнольдса могут быть как малыми, так и большими.

В разделе 4.2 рассматриваются наиболее характерные для реальных ситуаций предельные случаи построенной общей модели. Их особенность заключается в том, что параметр $\beta \gg 1$, что соответствует размерам сосуда, много большим длины релаксации скоростей фаз. Это позволяет существенно упростить общую модель, а из межфазных сил оставить только силы Стокса и Архимеда.

Первая предельная постановка соответствует характерному асимптотическому пределу:

$$\beta \rightarrow \infty, \quad \eta/\beta \rightarrow 0, \quad c_0\beta/\eta \rightarrow \infty, \quad \text{Re} \rightarrow 0, \quad c_0\beta\text{Re}/\eta = A \sim O(1), \quad \text{Sh} = 1$$

Здесь c_0 - характерное начальное значение объемной доли частиц, A - аналог числа Грасгофа (коэффициент перед силой плавучести в рассматриваемой модели). В данном пределе уравнения конвекции упрощаются и принимают вид:

$$\begin{aligned} \text{div}(\mathbf{v}) - \frac{\partial(cf)}{\partial y} &= 0, & \frac{\partial c}{\partial t} + \text{div}(c\mathbf{v}_s) &= 0, & \mathbf{v}_s &= \mathbf{v} - f(c)\mathbf{j} \\ \nabla p_1 &= \frac{1}{\text{Re}} \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_0(c) \tau_{ij} \mathbf{k}_i - \text{Sgn}(1 - \eta) A \left(\frac{c}{c_0} \right) \mathbf{j}, & p_1 &= p\text{Re} & (4) \\ \tau_{ij} &= \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \text{div} \mathbf{v} \right] \end{aligned}$$

Здесь Sgn обозначает знак выражения в скобках, φ_0 - поправка к вязкости на конечность объема частиц. В расчетах выражение для "стесненной" скорости осаждения принималось в виде $f(c) = (1 - c/c_m)^{3.1}$, где c_m - концентрация плотной упаковки частиц.

В случае малых объемных концентраций дисперсной фазы, в результате предельного перехода $c \rightarrow 0$ можно получить модель гравитационной конвекции для сильноразреженных суспензий.

В этом пределе удобно ввести безразмерную числовую концентрацию частиц $n_s = n_s^*/n_{s0}^*$ и относительную массовую концентрацию дисперсной фазы $\alpha = mn_{s0}^*/\rho$, n_{s0}^* - характерное значение размерной числовой концентрации частиц в начальный момент времени. Массовая концентрация частиц и характерная объемная доля в начальный момент времени связаны очевидным соотношением $\alpha = c_0/\eta$, где c_0 - объемная доля частиц, соответствующая начальной концентрации n_{s0}^* . В рассматриваемом пределе несущая фаза становится несжимаемой, вязкость среды постоянна, а в выражении для скорости оседания частиц исчезают поправки на стесненность обтекания. Уравнения конвекции разреженной суспензии принимают вид:

$$\begin{aligned} \text{div} \mathbf{v} &= 0, & \frac{d_s n_s}{dt} &= 0 \\ \nabla p_1 &= \nabla^2 \mathbf{v} - \text{Sgn}(1 - \eta) A n_s \mathbf{j}, & \mathbf{v}_s &= \mathbf{v} - \mathbf{j} & (5) \end{aligned}$$

В данном приближении поле скоростей среды частиц бездивергентно, и концентрация дисперсной фазы остается постоянной вдоль фиксированной траектории частицы.

Следует отметить, что если отношение плотностей фаз конечно, то массовая доля частиц α является величиной того же порядка, что и объемная доля c_0 . Когда $c_0 \rightarrow 0$, массовая концентрация частиц может оставаться конечной если $\eta \rightarrow 0$, то есть, например, в случае твердых частиц в газе. В случае суспензий при $c_0 \rightarrow 0$ массовая концентрация тоже идет к нулю, но обратное влияние частиц на несущую фазу может быть существенным, поскольку слагаемое, определяющее величину влияния примеси на движение суспензии, имеет порядок параметра A , который содержит произведение c_0 на большой параметр и величина которого может быть весьма немалой.

Важно, что в данном предельном случае остается единственный параметр подобия $A = c_0 \beta \text{Re} / \eta = 4.5 c_0 (L/\sigma)^2$, который содержит только геометрические характеристики смеси (отношение линейных размеров и объемную концентрацию частиц). В данном случае для моделирования натуральных экспериментов в лабораторных условиях достаточно лишь уменьшить размер частиц пропорционально размеру установки при соблюдении равенства объемной концентрации дисперсной фазы.

Второй интересный предельный случай соответствует следующим асимптотическим соотношениям между параметрами:

$$\beta \rightarrow \infty, \quad \eta/\beta \rightarrow 0, \quad \text{Sgn}(1 - \eta)c_0\beta/\eta = B \sim O(1), \quad \text{Re} \gg 1, \quad \text{Sh} = 1$$

В этом пределе объемная доля частиц также стремится к нулю. Уравнения конвекции в данном случае принимают вид:

$$\text{div} \mathbf{v} = 0, \quad \frac{d_s n_s}{dt} = 0, \quad \mathbf{v}_s = \mathbf{v} - \mathbf{j}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - B n_s \mathbf{j} \quad (6)$$

Раздел 4.3 посвящен аналитическому исследованию предельного случая (6) при стационарной гравитационной конвекции суспензий. Заметим, что случай стационарной конвекции может реализоваться лишь в областях с непрерывным подводом и отводом примеси на границах области.

Если бы источниковый член $B n_s \mathbf{j}$ был потенциальным, то влияние частиц сказывалось бы лишь на распределении давления. Это может реализоваться лишь в специальном случае, когда производная концентрации частиц по продольной координате равна нулю. В этом случае имеет место интеграл Бернулли.

Более интересна возможность существования другого первого интеграла, который имеет место вдоль линий тока дисперсной фазы. С использованием тождества $n_s \mathbf{j} = \nabla(y \cdot n_s) - y \cdot \nabla n_s$ при условиях $\partial \mathbf{v}_s^2 / \partial y = 0$ (а) или $\text{rot}(\partial \mathbf{v}_s / \partial y) = 0$ (б) уравнение баланса импульса в (6) можно проинтегрировать вдоль траектории частиц и получить соотношения:

$$\frac{\mathbf{v}_s^2}{2} + H + p + B y n_s(\psi_s) = \text{const}(\psi_s)$$

Здесь $H = 0$ в случае (а) и $H : \nabla H = (\partial \mathbf{v}_s / \partial y)$ в случае (б).

Данным интегралам могут удовлетворять различные вихревые течения с однородным и неоднородным распределением концентрации частиц. В разделе приведены два частных примера точных решений уравнений конвекции (6), построенных с использованием найденных интегралов.

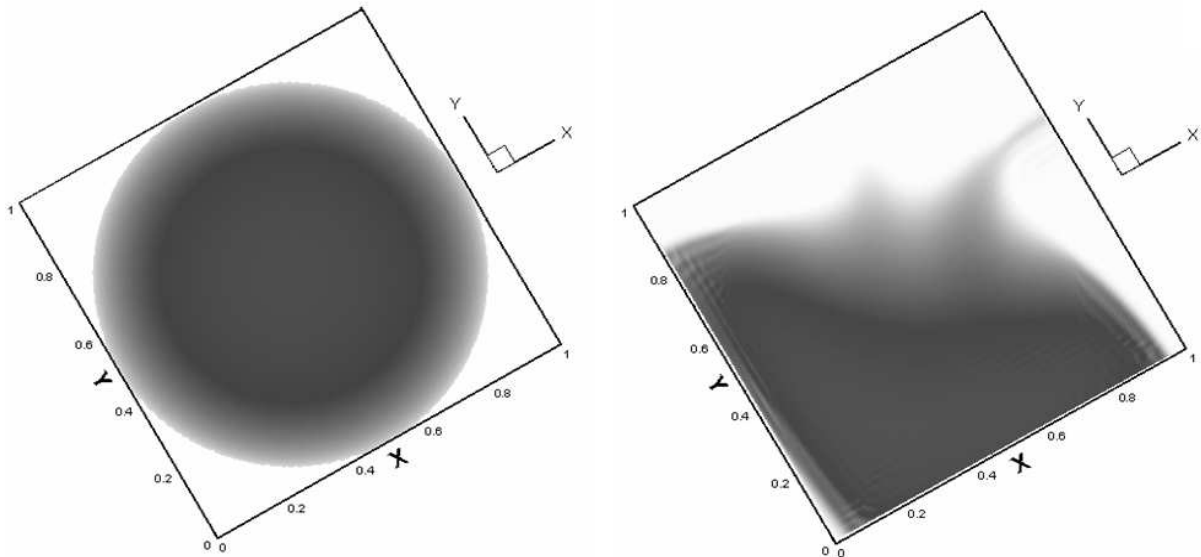


Рис. 2. Оседание кругового облака частиц. Слева изображена начальная концентрация примеси, справа - концентрация примеси в момент времени $t = 0.314$ при $A = 600$.

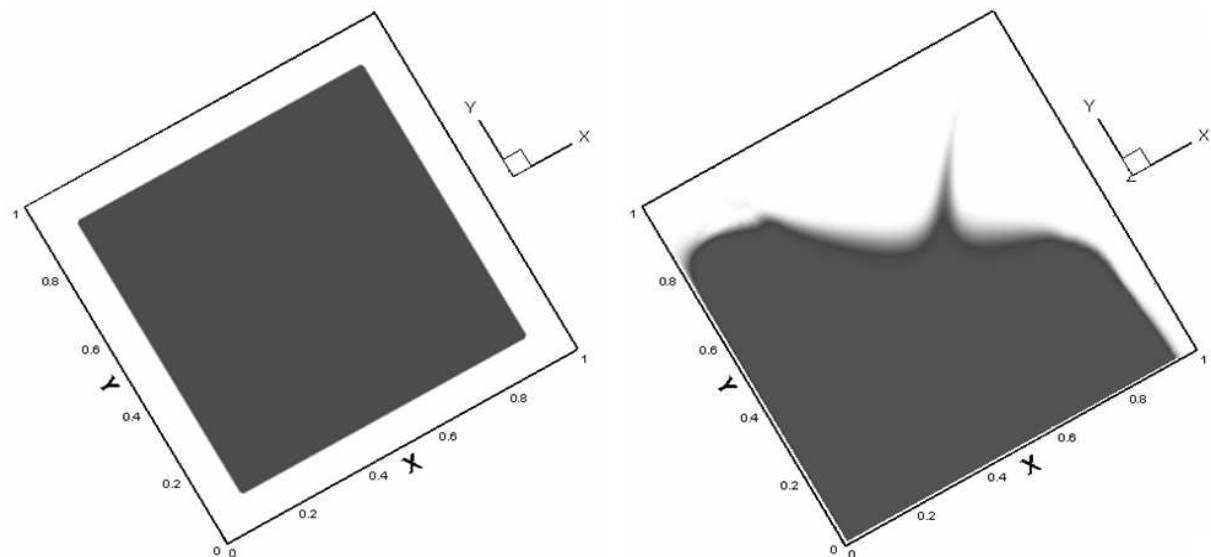


Рис. 3. Оседание квадратного облака частиц. Слева изображена начальная концентрация примеси, справа - концентрация примеси в момент времени $t = 0.314$ при $A = 600$.

Раздел 4.4 посвящен численному исследованию гравитационной конвекции суспензии в двумерных замкнутых объемах в случае, описываемом системой (5). На границах области задаются условия прилипания для несущей фазы. Вводятся переменные ψ, ω (функция тока, вихрь). Полученная система состоит из одного гиперболического уравнения для концентрации частиц и двух эллиптических уравнений для функции тока и завихрен-

ности. Завихренность может рождаться либо на границе объема, либо в областях с неоднородной по горизонтали концентрацией частиц.

Для численного расчета уравнений переноса частиц использовались схемы "с ограничением потока" (R. Fazio, A. Jannelli (2009)), а для расчета эллиптических уравнений для функции тока и завихренности на каждом шаге по реальному времени - методы установления по фиктивному времени.

Проводились параметрические расчеты конвекции в квадратных вертикальных и наклонных областях для различных начальных распределений концентрации частиц с целью исследования механизмов развития вихревых зон и эффекта Бойкотта. Были рассмотрены задачи оседания конечных объемов суспензии (прямоугольных и круговых), оседание узкой полоски частиц, а также даны примеры расчета формы осадка. Примеры расчетов приведены на рис. 2-3.

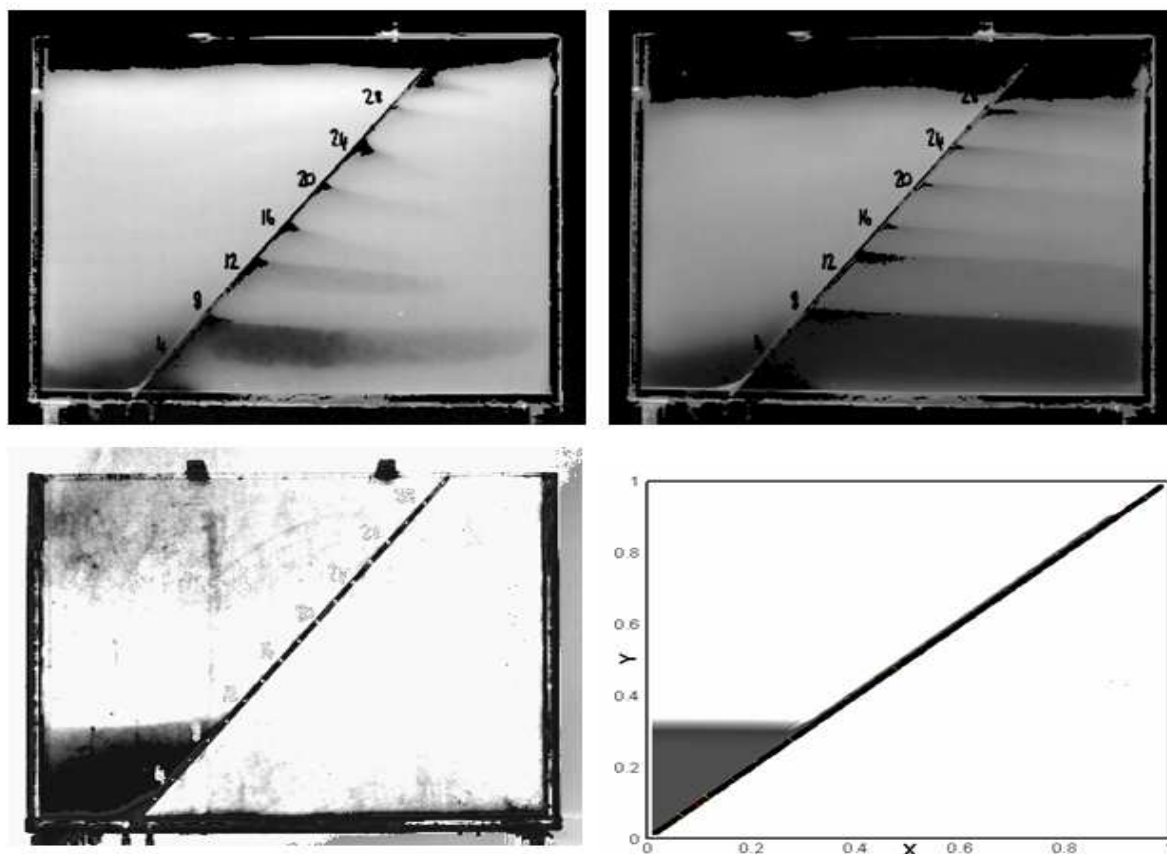


Рис. 4. Фотографии эксперимента из работы (Blanchette 2003) и численный расчет, сверху светлым отображена суспензия, темным - чистая жидкость, снизу - наоборот, темным - частицы. Вверху: слева направо - состояние после 3-х и 10 минут с начала эксперимента. Внизу: слева - состояние после 40 минут с начала эксперимента, справа - численный расчет поля концентрации при $A = 600$ в момент времени $t = 0.17$.

На основании расчетов установлено, что в сосудах с наклонными стенками возникает интенсивная вихревая зона в области, где частицы движутся от наклонной стенки. Если считать "верхними" стенками сосуда те его границы, на которые невозможно выпадение осадка, то в наклонных прямо-

угольных сосудах "верхних" стенок не одна, как в вертикальном сосуде, а две. Как бы в процессе гравитационной конвекции не перераспределялась примесь, до тех пор пока горизонтальный уровень верхней границы среды частиц будет выше нижней точки хотя бы одной из "верхних" стенок сосуда, будет существовать и вихревая структура, ускоряющая осаждение частиц. Существование такой структуры обусловлено наличием слоя чистой жидкости вблизи "верхней" наклонной стенки сосуда, а значит и наличием продольного градиента концентрации примеси, который приводит к генерации вихря. В этом и заключается суть механизма, влекущего к уменьшению времени осаждения суспензии в наклонном сосуде - эффекту Бойкотта.

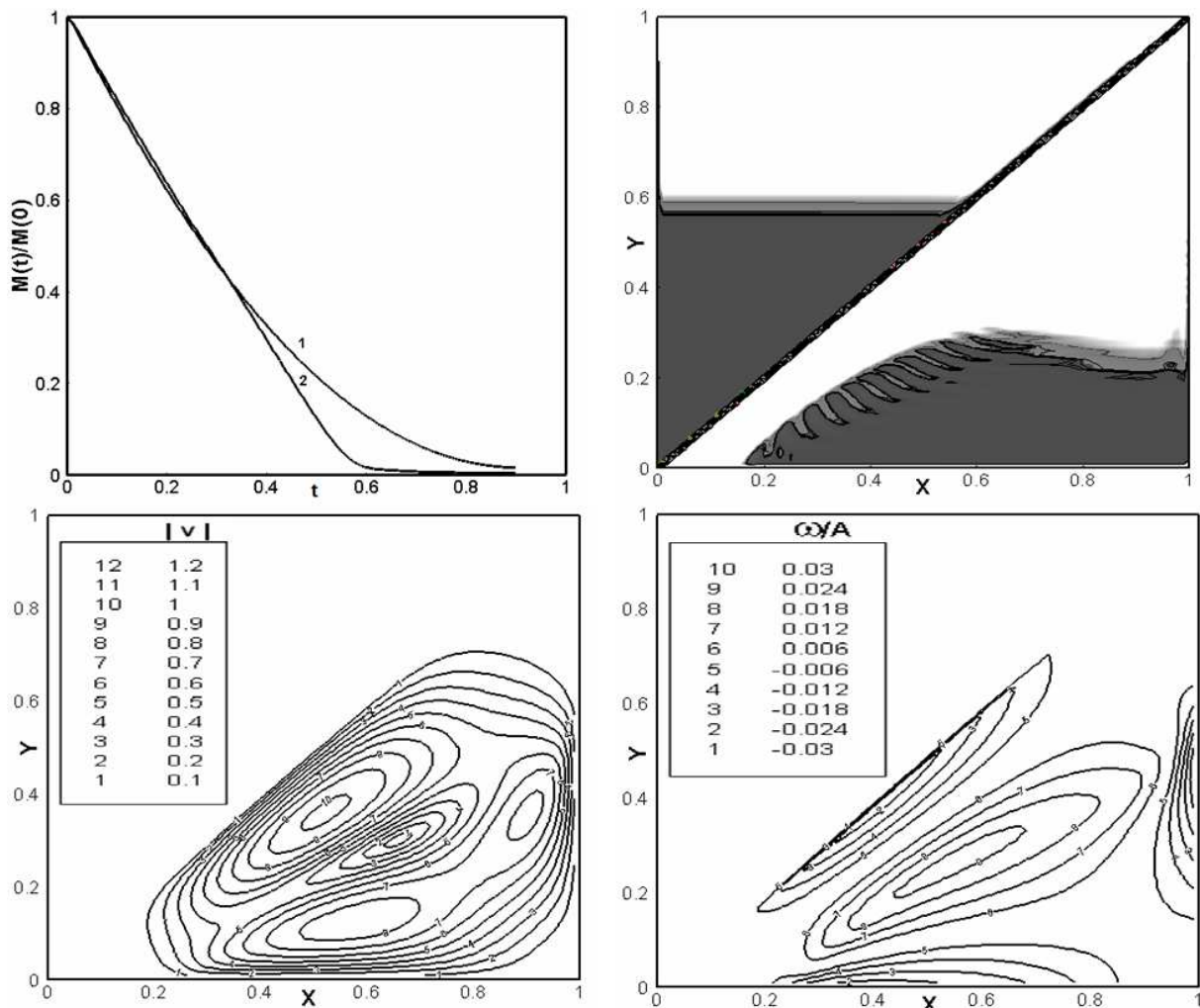


Рис. 5. Вверху: слева - зависимость безразмерной массы взвешенных частиц от времени.

Кривая 1 - для части над перегородкой, кривая 2 - под перегородкой, справа - поле концентрации примеси при $A = 600$ в момент времени $t = 0.32$. Внизу: слева - изображены изолинии модуля скорости несущей фазы, справа - изолинии вихревого поля при $t = 0.32$.

В рамках исследования эффекта Бойкотта проводился также расчет гравитационной конвекции суспензии в прямоугольном сосуде с непроницаемой диагональной перегородкой в условиях, приблизительно соответствующих экспериментам работы F. Blanchette (2003) (см. Рис. 4). Эксперименты проводились в вертикальном узком прямоугольном сосуде размером

0.25 × 0.4 × 0.05 м с непроницаемой диагональной перегородкой, перегородка устанавливалась после заполнения сосуда однородной суспензией с частицами радиусом $\sim 16 \cdot 10^{-6}$ м и плотностью 4200 кг/м³. Плотность несущей фазы составляла 1100 кг/м³, а вязкость варьировалась в пределах $\mu = 15 \cdot 10^{-3} - 21 \cdot 10^{-3}$ кг/(м·с). Объемная доля примеси составляла всего $3 \cdot 10^{-3}$, поэтому влияние осадка на конвекцию было несущественно.

За счет трения на передней и задней стенках сосуда течение в эксперименте не является двумерным, однако осредненную по толщине зазора картину конвекции, по-видимому, можно качественно описать используемой в расчетах двумерной моделью.

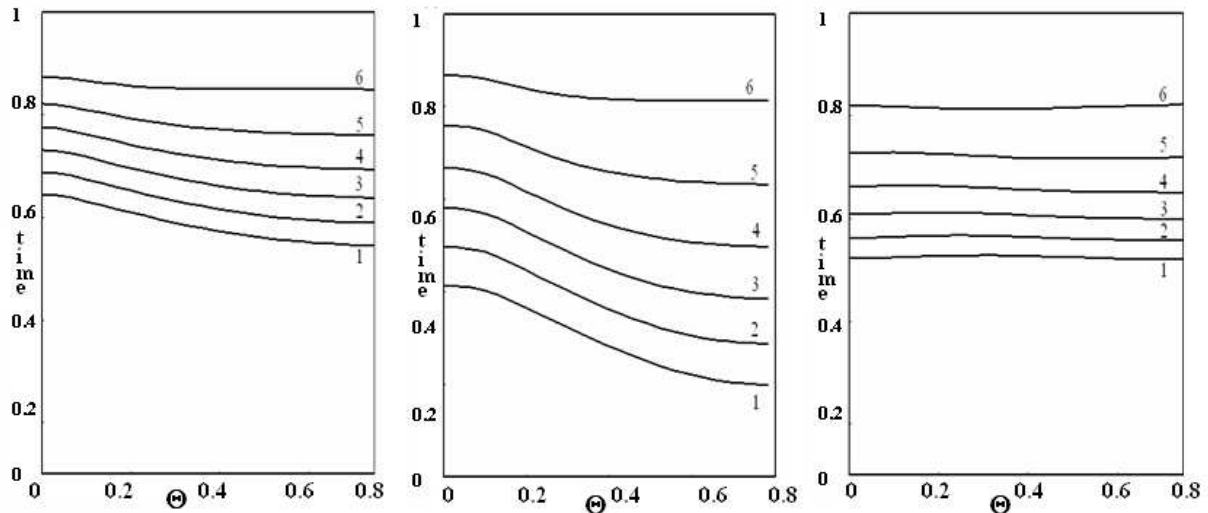


Рис. 6. Графики времени, необходимого для достижения массой взвешенных частиц 5-30 % от начальной массы в зависимости от угла наклона сосуда Θ при $A = 600$ (слева и справа) и при $A = 6000$ (в центре). Кривая 1 соответствует $M(t)/M(0) = 0.3$, $M(t)/M(0) = 0.25$ – кривая 2, $M(t)/M(0) = 0.2$ – 3, $M(t)/M(0) = 0.15$ – 4, $M(t)/M(0) = 0.1$ – 5, $M(t)/M(0) = 0.05$ – 6.

Слева и в центре отображена зависимость для расчетов с однородным начальным распределением примеси, заполняющей сосуд на 90%, справа - начальная форма облака частиц - круг, концентрация в котором убывает от центра к периферии.

Результаты расчетов свидетельствуют о качественном совпадении с экспериментом таких макропараметров, как отношение высот верхних границ областей с частицами в верхней и в нижней части сосуда и изменение массы взвешенных частиц $M(t)/M(0) = \int_{\Sigma} n_s(x, y, t) dx dy / \int_{\Sigma} n_s(x, y, 0) dx dy$ (проявление эффекта Бойкотта). Можно говорить также о качественном описании эффекта горизонтального расслоения дисперсной примеси и возникновения мезомасштабных пальцеобразных структур за счет влияния циркуляционных зон на боковой границе суспензии (см. Рис. 5). Из полученных данных следует, что в отдельных циркуляционных зонах происходило увеличение скорости осаждения примеси более чем в два раза уже при небольших значениях аналога числа Грасгофа.

Для случая конвекции в наклонном квадратном сосуде проводились рас-

четы с целью определения оптимального угла, при котором эффект Бойкотта наиболее ярко выражен. Исследовалось, как зависит от угла отклонения сосуда время, необходимое для уменьшения величины $M(t)/M(0)$ до 5-30 % при различных начальных распределениях концентрации примеси. В случае однородного начального распределения концентрации примеси в прямоугольной области эффект сокращения времени оседания частиц в наклонном сосуде проявляется наиболее сильно. Величина этого эффекта существенно зависит от аналога числа Грасгофа (см. Рис. 6).

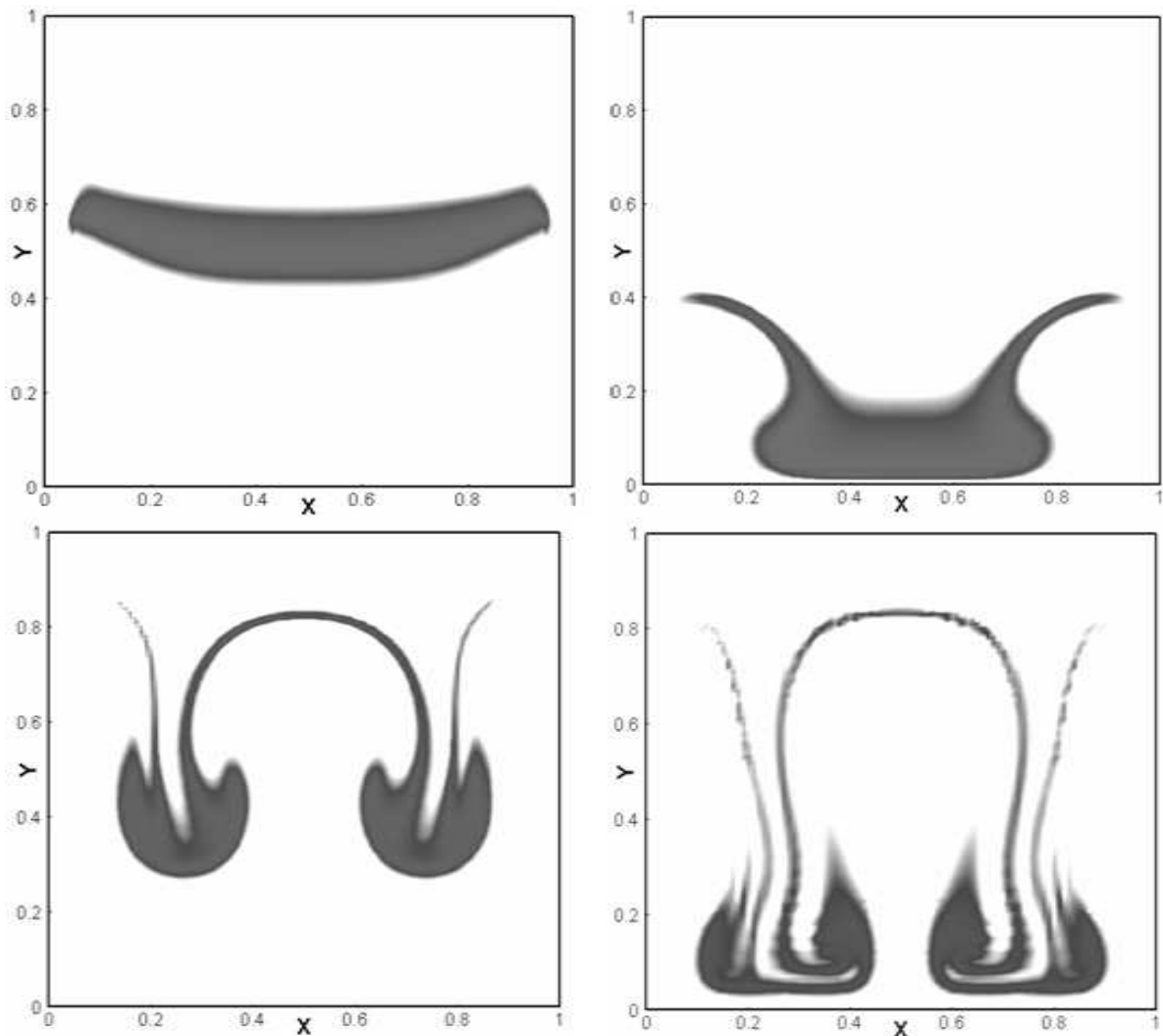


Рис. 7. Эволюция поля однородной полоски частиц при $A = 600$ (сверху) и $A = 6000$ (снизу). Сверху последовательно изображена концентрация примеси в моменты времени $t = 0.3$, и $t = 0.6$, снизу - в моменты времени $t = 0.12$ и $t = 0.18$.

При увеличении параметра A усиливается проявление неустойчивости нижней границы оседающей суспензии (неустойчивости типа Рэлея-Тейлора). Если при малых A горизонтальная полоска примеси, расположенная в верхней части сосуда, доходит до дна сосуда без деформаций, то при $A = 600$ в процессе гравитационной конвекции полоска выгибается вниз, образуя симметричную дугу, а при $A = 6000$ дуг уже две (см. Рис. 7). При дальнейшем увеличении аналога числа Грасгофа происходит увеличение интенсивности

вихревого течения, сформированного осаждением частиц.

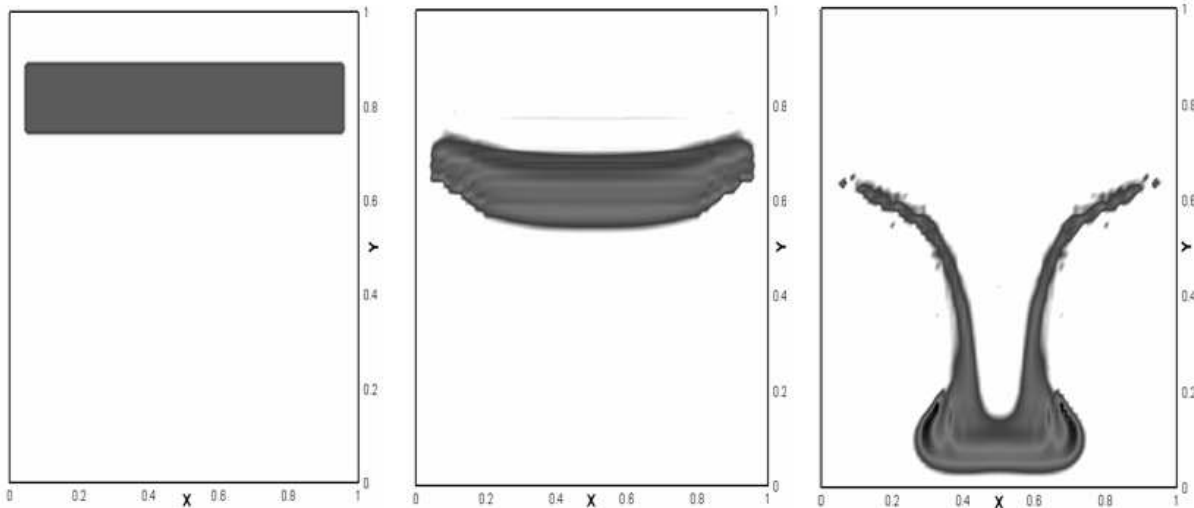


Рис. 8. Эволюция поля концентрации примеси при $A = 600$ и $c_0 = 0.05$. Слева изображена концентрация частиц в момент времени $t = 0$, в центре - концентрация в момент времени $t = 0.6$, справа - в момент времени $t = 1.25$.

Раздел 4.5 посвящен анализу эффектов, связанных с учетом конечной объемной доли дисперсной фазы в задачах гравитационной конвекции суспензий в замкнутых двумерных областях. В рамках модели (4) проводятся параметрические численные расчеты некоторых задач, рассмотренных в предыдущем разделе.

При учете конечной объемной доли частиц возникают новые механизмы, обусловленные расширением модели. Наиболее существенным является возможность изменения концентрации примеси вдоль траектории частицы. Дивергенция поля скорости теперь не равна нулю, а значит возможно как накопление частиц, так и их разрежение. При этом, при возрастании концентрации примеси (накоплении частиц) возрастает вязкость суспензии и уменьшается скорость вертикального проскальзывания частиц. Таким образом, локальные зоны повышенной концентрации частиц являются условными аттракторами - частицам, попавшим в зону повышенной концентрации, сложно ее покинуть. Это обстоятельство приводит к появлению нового механизма возникновения горизонтальных расслоений в примеси, обусловленного изменением концентрации частиц вдоль лагранжевых траекторий (см. рис. 8).

Несколько отличается и диапазон углов наклона сосуда, при котором проявляется эффект Бойкотта. В отличие от разреженных суспензий, при слишком больших углах наклона сосуда рост неоднородностей в концентрации приводит не к уменьшению, а к увеличению времени оседания. "Оптимальные" углы наклона, при которых осаждение происходит наиболее эффективно, смещаются до $7,5^\circ - 37,5^\circ$ (см. Рис. 9) по сравнению с $30^\circ - 42,5^\circ$ для разреженных суспензий.

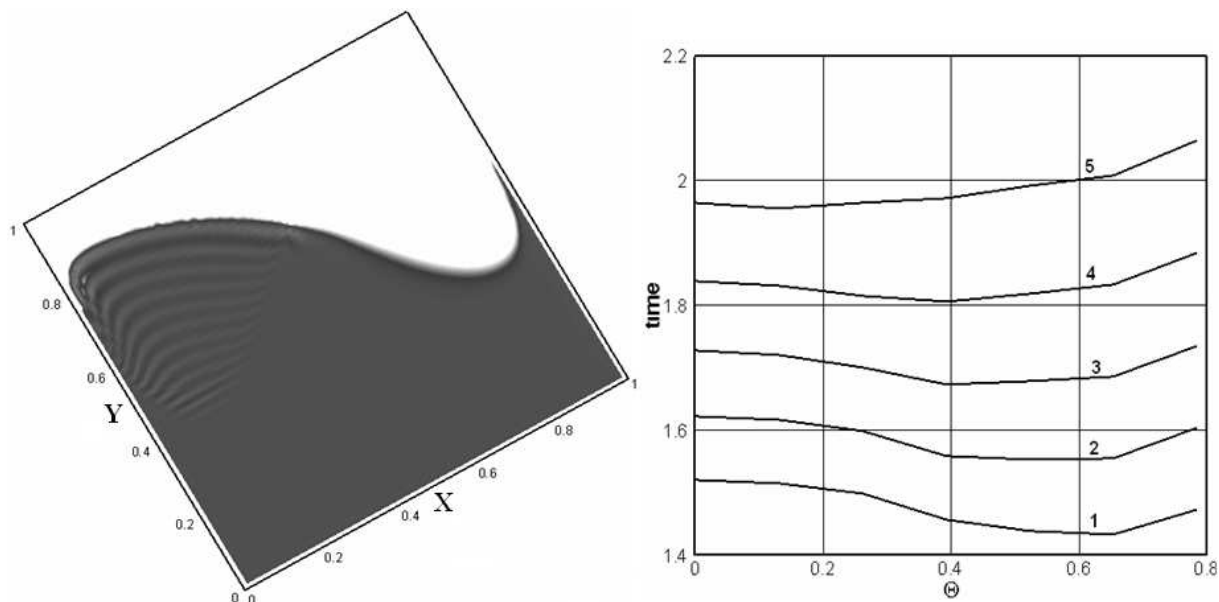


Рис. 9. Слева изображено поле концентрации примеси при $A = 6000$ и $c_0 = 0.05$ в момент времени $t = 0.93$. Справа приведены графики зависимости времени, необходимого для достижения массой взвешенных частиц 10-30% от угла наклона сосуда Θ . Кривая 1 соответствует $M(t)/M(0) = 0.3$, $M(t)/M(0) = 0.25$ - кривая 2, $M(t)/M(0) = 0.2$ - кривая 3, $M(t)/M(0) = 0.15$ - кривая 4, $M(t)/M(0) = 0.1$ - кривая 5.

В **Заключении** к диссертации подведены итоги работы и сформулированы основные результаты и выводы.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Построена общая двухконтинуальная гидродинамическая модель гравитационной конвекции дисперсной смеси, учитывающая нестационарные и наследственные силы при описании межфазного обмена импульсом, конечность объема, занимаемого дисперсной фазой, и "сжимаемость" суспензии за счет перераспределения примеси. Определен полный набор параметров подобия, управляющих процессом конвекции.

В рамках обоснования корректности модели для ряда одномерных задач проведено исследование влияния нестационарных и "наследственных" сил в межфазном взаимодействии на движение одиночных тяжелых (легких) сферических частиц в заданном нестационарном потоке. Рассмотрены различные механизмы возникновения рассогласования скоростей фаз (наличие внешней массовой силы, нестационарность поля скорости несущей фазы, совокупность обоих факторов). Развита алгоритмы вычисления наследственной силы Бассэ, основанные как на прямом численном решении интегродифференциального уравнения движения частицы, так и на замене этого уравнения системой дифференциальных уравнений более высокого порядка. Определен диапазон параметров, в котором описание оседающей (всплывающей) примеси в суспензии невозможно без учета нестационарных и "наследственных" сил. Показано, что при отсутствии внешних массовых

сил пренебрежение нестационарными и наследственными силами в межфазном взаимодействии является обоснованным для частиц, превосходящих по плотности несущую фазу. При наличии массовых сил, даже в случае покоящейся несущей фазы, учет силы Бассэ увеличивает на порядок время скоростной релаксации и выхода на стационарный режим оседания. В общем случае определен диапазон отношения плотностей фаз, в котором на длинах скоростной релаксации вклад силы Бассэ является существенным.

Для построенной общей двухконтинуальной модели гравитационной конвекции дисперсных систем рассмотрен ряд асимптотических (по значениям безразмерных параметров) случаев, соответствующих типичным реальным ситуациям, в которых описание конвекции существенно упрощается.

В случае стационарной гравитационной конвекции суспензии с малоинерционными частицами в эффективно невязкой суспензии получены критерии существования первого интеграла уравнений баланса импульса. Показано, что найденный интеграл не аналогичен интегралу Бернулли, он может выполняться во всей области течения для неоднородной концентрации частиц и вихревых полей скорости обеих фаз. Приведены примеры точных решений, удовлетворяющих данному интегралу.

Проведены параметрические численные расчеты медленной гравитационной конвекции суспензии в больших (по сравнению с длиной скоростной релаксации фаз) замкнутых двумерных областях. Исследовано возникновение крупномасштабных вихревых течений, а также эффектов горизонтального расслоения дисперсной примеси и ускоренного осаждения частиц в сосуде с наклонными стенками (эффект Бойкотта). Получено качественное соответствие между результатами расчета и известными экспериментальными данными. Эффект Бойкотта сильно зависит от величины аналога числа Грасгофа (коэффициента плавучести) и возрастает с увеличением этого параметра. Показано, что эффект горизонтального расслоения дисперсной примеси в процессе гравитационной конвекции в наклонном сосуде вызван образованием вихревых структур на боковой границе области, занятой дисперсной фазой. Проведено численное моделирование процесса потери устойчивости и формирования "пальцев" на нижней границе оседающего конечного объема частиц.

На основании численных расчетов показано, что для заметного ускорения процесса осаждения дисперсной фазы в сосудах с вертикальными стенками необходимо создавать неоднородную в горизонтальном направлении концентрацию засыпки дисперсной фазы либо оставлять конечные зазоры между областью дисперсной фазы и боковыми стенками сосуда.

Исследована конфигурация осадка дисперсной примеси на нижней стенке сосуда. Показано, что поток массы дисперсной фазы вблизи границы объема слабо зависит от координаты вдоль границы и от угла наклона со-

суда.

Проведено сравнение процессов гравитационной конвекции в суспензии с пренебрежимо малой и конечной объемной долей примеси. Показано, что учет объема частиц может приводить к новым эффектам, связанным с изменением концентрации дисперсной фазы вдоль лагранжевой траектории частиц и зависимостью вязкости и скорости проскальзывания от локальной концентрации дисперсной фазы. Помимо расслоения дисперсной фазы, возникающего за счет приграничных вихревых структур, существует механизм расслоения, обусловленный формированием локальных неоднородностей концентрации примеси. Зависимость скорости проскальзывания фаз от локальной концентрации частиц приводит к изменению оптимальных для скорейшего осаждения примеси углов наклона сосуда. При нулевой объемной доле примеси оптимальные углы наклона квадратного двумерного сосуда варьируются в диапазоне $\pi/6 \div \pi/4$, а при конечной объемной доле - в диапазоне $\pi/24 \div 5\pi/24$.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Невский Ю.А., Центрифугирование частиц во вращающемся сферическом объеме вязкой самогравитирующей жидкости // Сб. докл. конф.-конкурса молодых ученых, 12-14 октября, Институт механики, МГУ. 2004. С. 174–180.
2. Невский Ю.А., Осипцов А.Н., Инерционное разделение фаз во вращающемся объеме самогравитирующей среды // Сб. тез. конф. "Ломоносовские чтения", 18-25 апреля, МГУ, Москва. 2005. С.156
3. Невский Ю.А. О роли нестационарных и наследственных сил в задачах гравитационного оседания и флотации суспензий // Сб. докл. конф.-конкурса молодых ученых, 12-14 октября, Институт механики, МГУ. 2006. С. 193–201.
4. Невский Ю.А. О формировании плотностных неоднородностей дисперсной фазы во вращающихся объемах вязкой жидкости // Тез. IX Всеросс. съезда по теор. прикл. мех., Нижний Новгород, 22-28 августа 2006 г. С. 187.
5. Невский Ю.А. Гравитационная конвекция суспензий и аэрозолей в наклонном сосуде // Труды Института механики УНЦ РАН, Изд-во "Гилем", Уфа. 2007. No. 5. С. 282–288.
6. Невский Ю.А. Моделирование гравитационной конвекции суспензий // Тез. докл. XV школы-семинара "Современные проблемы аэрогидродинамики", 5-15 сентября, Буревестник МГУ, Сочи. 2007. С. 82.

7. Невский Ю.А. Гравитационная конвекция суспензий в замкнутом наклонном сосуде // Сб. докл. конф.-конк. молодых ученых, 12-14 октября, Институт механики МГУ. 2007. С. 204–208.
8. Невский Ю.А. Моделирование гравитационной конвекции суспензий в замкнутом двумерном сосуде // Тез. докл. Всероссийской конференции "Современные проблемы механики сплошной среды", Москва, МИАН, 12-14 ноября 2007. С. 130–132.
9. Невский Ю.А., Осипцов А.Н. Моделирование осаждения суспензии в наклонном резервуаре // Сб. тез. конф. "Ломоносовские чтения", 18-25 апреля, МГУ, Москва. 2008. С. 136–137.
10. **Невский Ю.А., Осипцов А.Н. О роли нестационарных и наследственных сил в задачах гравитационной конвекции суспензий // Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Мат., Мех. 2008. N 4 С. 37–40.**
11. **Невский Ю.А., Осипцов А.Н., Моделирование гравитационной конвекции суспензий // Письма в ЖТФ. Т. 35. Вып. 7. 2009. С. 98–106.**
12. Невский Ю.А., Осипцов А.Н. Гравитационная конвекция суспензий с умеренной объемной долей включений // Сб. тез. конф. "Ломоносовские чтения", 18-25 апреля 2009, МГУ, Москва. 2009. С. 123–123.
13. Невский Ю.А., Модели самосогласующейся гравитационной миграции частиц в ньютоновских средах // Сб. докл. междунар. конф. "Современные проблемы математики, механики и их приложений", Москва. 2009. С. 290–291.
14. Невский Ю.А. Гравитационная конвекция суспензий с малоинерционными частицами // Сб. докл. XVI междунар. конф. ВМСПСС, Алушта 2009. С. 549–552.
15. Невский Ю.А., Осипцов А.Н. Моделирование гравитационной конвекции суспензий в случае малоинерционных частиц // Сб. инновац. проектов мех-мат. ф-та и Инст. механики МГУ, Москва. 2009. С. 55–57.
16. Nevskii Yu. A., Osiptsov A.N. Modeling of Gravitational Convection in Suspension with Low-Inertia particles // Abstr. Intern. Conf. "Fluxes and Structures in Fluids: Physics of Geospheres", Moscow 2009. V. 1. P. 172–175.