Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи
УДК 511.23, 512.772, 519.111, 519.172.2

Дремов Владимир Александрович

Алгебраическая теория пар Белого

Специальность:
01.01.06 - математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва – 2010

Работа выполнена на кафедре высшей алгебры Механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова.

Научные руководители:
доктор физико-математических наук,
профессор Шабат Георгий Борисович;
доктор физико-математических наук,
профессор Латышев Виктор Николаевич.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Артамкин Игорь Вадимович;
кандидат физико-математических наук,
доцент Главацкий Сергей Тимофеевич.

Ведущая организация:
Санкт-Петербургское отделение Математического института имени В. А. Стеклова РАН

Защита диссертации состоится 4 июня 2010 года в 16 часов 45 минут на заседании диссертационного совета Д.501.001.84 при Московском государственном университете имени М. В. Ломоносова по адресу: Российская Федерация, 119991, Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1, МГУ, Механико-математический факультет, аудитория 14-08.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова (Главное здание, 14 этаж).

Автореферат разослан 4 мая 2010 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
Д.501.001.84 при МГУ
доктор физико-математических наук,
профессор А. О. Иванов.

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Диссертация относится к теории пар Белого и посвящена задаче выбора параметров и системы уравнений для нахождения пар Белого, удовлетворяющих фиксированным комбинаторным ограничениям на детский рисунок, а также исследованию решений таких систем. Основное внимание при этом уделяется решениям, соответствующим парам Белого.

В 1979г. Г. В. Белым[1] сформулирован критерий определённости кривой над $\overline{\mathbb{Q}}$ в терминах накрытий $\mathbb{P}^1$, разветвлённых над не более чем 3 точками. Таким разветвлённым накрытиям отвечают функции с не более чем 3 критическими значениями, которые сейчас принято называть функциями Белого. Пара Белого состоит из кривой и функции Белого на ней. Функции Белого тесно связаны с детскими рисунками Гротендика, план исследований которых был сформулирован в 1984 году и опубликован в 1997 году[2].

Теория пар Белого — развивающаяся область науки, использующая методы алгебраической геометрии и топологии. Одной из важных задач этой теории является построение уравнений алгебраической кривой и рациональной функции Белого на ней по заданному детскому рисунку. С вычислительной точки зрения эта задача до сих пор далека от полного разрешения. С ней связана задача выбора таких координат, для которых коэффициенты уравнений кривой и многочленов, задающих рациональную функцию, находятся однозначно и лежат в минимальном возможном поле. Поле определения пары Белого, которое соответствует её стабилизатору под действием группы Галуа, является нижней оценкой поля, порождённого коэффициентами. В статье Филимоненкова и Шабата[3] найден пример, в котором эта оценка не достигается.

Цель работы — построение и исследование систем уравнений для вычисления пар Белого и создание элементов теории кратностей для таких систем. Вычисление пар Белого (как отдельных, так и бесконечных семейств) в терминах аффинных и проективных систем уравнений, задающих алгебраическую кривую, и отношения многочленов, задающего рациональную функцию на этой кривой.

Научная новизна. Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Для обобщённой антивандермондовой системы уравнений на пары Бе-

[1] Белый Г.В. *О расширениях Галуа максимального кругового поля,* Изв. АН СССР. Сер. матем., 1979, 43:2, 267-276

[2] Grothendieck A. *Esquisse d'un programme,* London Math.Soc. Lecture Notes Series, Cambridge, 1997, vol.243, 3-43

[3] Филимоненков В.О., Шабат Г.Б. *Поля определения рациональных функций одного переменного с тремя критическими значениями* Фундаментальная и прикладная математика, 1995, том 1, выпуск 3, 781-799

лого построена учитывающая паразитические решения теория кратностей.

2. Приведены несколько систем и подходов к вычислению для пар Белого малых родов.

3. Обоснован способ построения систем для рисунков с заданными наборами валентностей (в частности, кривых сколь угодно большого рода).

4. Описаны множества детских рисунков и пар Белого для некоторых наборов валентностей. В общей сложности, в работе получены пары Белого для 29 рисунков и 2 серий рисунков.

Основные методы исследования. В работе используются методы комбинаторной топологии и теории алгебраических кривых, а также разработанная автором техника вычисления пар Белого с помощью дифференциала Муласе-Пенкавы[4].

Теоретическая ценность. Диссертация имеет теоретический характер. Полученные в работе результаты могут быть использованы в задачах теории детских рисунков Гротендика, а также в её приложениях к теории алгебраических кривых и к теории Галуа. Методы, рассмотренные в диссертации, были успешно применены для подсчёта многих пар Белого, вошедших в каталог[5].

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на семинаре "Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями" (Москва, 2007 и 2008) и на "Научно-исследовательском семинаре по алгебре" кафедры высшей алгебры механико-математического факультета МГУ им. Ломоносова (Москва, 2008), на "Международной алгебраической конференции, посвященной 250-летию МГУ им. М.В. Ломоносова и 75-летию кафедры высшей алгебры" (Москва, 2004), на "Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения А.Г. Куроша" (Москва, 2008) и на международной конференции "The Grothendieck-Teichmüller Theory of Dessins d'Enfants" (Edinburgh, 2008).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах автора, список которых приведён в конце автореферата [1–5].

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа изложена на 81 странице и состоит из введения и трёх глав. Библиография включает 22 наименования.

[4] M.Mulase, M.Penkava *Ribbon Graphs, Quadratic Differentials on Riemann Surfaces and Algenraic Curves Defined over* $\overline{\mathbb{Q}}$ Asian journal of mathematics, 1998, vol.2, number 4, 875-920

[5] Н. М. Адрианов, Н. Я. Амбург, В. А. Дрёмов, Ю. Ю. Кочетков, Е. М. Крейнес, Ю. А. Левицкая, В. Ф. Насретдинова, Г. Б. Шабат *Каталог функций Белого детских рисунков с не более чем четырьмя рёбрами,* Фундаментальная и прикладная математика, 2007, том 13, выпуск 6, 35-112

Диссертация включает в себя введение и 3 главы, разбитые на разделы и подразделы.

Краткое содержание введения.

Во введении обсуждаются предварительные сведения и стандартные определения из теории пар Белого и детских рисунков Гротендика, в том числе определение пары Белого:

Определение 1. *Пара Белого* – это пара, состоящая из полной неприводимой гладкой комплексной алгебраической кривой и рациональной функции на этой кривой, имеющей не более чем три критических значения (*функции Белого*).

Также во введении обосновывается актуальность темы диссертации и дан краткий обзор полученных в диссертации результатов.

Краткое содержание главы 1.

В главе 1 вводятся основные определения и ставятся основные вопросы, обсуждению которых посвящена диссертация.

Определение 3. *Детским рисунком* называется двукрашенный двудольный граф, вложенный в поверхность так, чтобы грани (компоненты связности дополнения) были гомеоморфны двумерному диску.

Цвета вершин обозначаются цифрами 0 и 1.

Определение. *Валентность* вершины детского рисунка — это количество выходящих из неё рёбер.

Определение. *Валентность* грани детского рисунка — это половина количества рёбер, образующих многоугольник её границы.

Определение. 0-*валентности* — валентности вершин цвета 0;
1-*валентности* — валентности вершин цвета 1;
2-*валентности* — валентности граней.

Буквой α мы обозначаем количество вершин рисунка цвета 0, буквой n — количество вершин цвета 1, а буквой γ — количество граней. Мы не используем β, так как этой буквой обычно обозначаются функции Белого.

Далее мы даём определения и обозначения для комбинаторных типов:

Определение. *Комбинаторным типом* называется множество классов эквивалентности, соответствующих данному набору валентностей.

Набор валентностей мы будем обозначать выражением вида
$< v_{0,1}, v_{0,2}, \ldots, v_{0,\alpha} \mid v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,n} \mid v_{2,1}, v_{2,2}, \ldots, v_{2,\gamma} >$;
комбинаторный тип детских рисунков следующим образом:
$DS < v_{0,1}, v_{0,2}, \ldots, v_{0,\alpha} \mid v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,n} \mid v_{2,1}, v_{2,2}, \ldots, v_{2,\gamma} >$,

комбинаторный тип пар Белого следующим образом:
$BP < v_{0,1}, v_{0,2}, \ldots, v_{0,\alpha} \mid v_{1,1}, v_{1,2}, \ldots, v_{1,n} \mid v_{2,1}, v_{2,2}, \ldots, v_{2,\gamma} >$,

Степень комбинаторного типа обозначается буквой d и определяется формулой:

$$d := \sum_{i=1}^{\alpha} v_{0,i} = \sum_{i=1}^{n} v_{1,i} = \sum_{i=1}^{\gamma} v_{2,i} \qquad (1.1)$$

Род комбинаторного типа обозначается буквой g и определяется соотношением $2 - 2g = \alpha + n + \gamma - d$.

Известно[6], что детский рисунок может быть задан парой перестановок. В работе приводится алгоритм построения всех детских рисунков с заданными наборами 0-валентностей и 1-валентностей в терминах таких пар:

Утверждение 1. *Описанный ниже алгоритм порождает хотя бы по одному представителю, но не более чем по d представителей из каждого класса сопряженности пар перестановок $\rho_0, \rho_1 \in S_d$ с заданными цикленными типами.*

а) *Применим сопряжение, чтобы упорядочить циклы ρ_0 по возрастанию длины и представить каждый из них в виде $(a, a+1, a+2, \ldots, a+s-1)$, где число a – минимальный элемент цикла, а число s – длина цикла.*

б) *Зададим последовательно циклы ρ_1 и множество использованных элементов $X \subset \{1, 2, \ldots, d\}$ следующей индуктивной процедурой:*

б.1) *На первом шаге у нас $X = \emptyset$, а циклы ρ_1 не заданы. Мы выбираем начальное число 1. Далее мы выбираем одну из длин циклов перестановки ρ_1 и задаём цикл этой длины, начинающийся в 1, по нижеследующей процедуре Proc;*

б.и) *На каждом шаге мы выбираем наименьшее число, лежащее в множестве $<\rho_0>X \setminus X$. Далее мы выбираем одну из неиспользованных длин циклов перестановки ρ_1 и задаём цикл этой длины с началом в выбранном числе по нижеследующей процедуре Proc;*

Proc *Сначала мы добавляем к множеству X начало цикла. Далее мы определяем образ начала цикла и добавляем его в множество X, потом проделываем ту же операцию с образом образа начала, и так далее пока не будет достигнута искомая длина цикла. При этом каждый*

[6] S.K.Lando, A.K.Zvonkin, *Graphs on Surfaces and their Applications* Springer, 2004

образ, за исключением образа, равного начальному элементу строящегося ρ_1-цикла, удовлетворяет одному из двух условий (old or new ρ_0-cycle):

old *образ принадлежит $< \rho_0 > X \setminus X$*

new *образ является для некоторого числа l минимальным элементом среди всех циклов ρ_0 данной длины l, не содержащих элементов множества X.*

Рассмотрим набор валентностей $\varkappa := < a_1, a_2, \ldots, a_p \mid c_1, c_2, \ldots, c_q \mid d >$, удовлетворяющий условиям $p+q = d+1$, $\sum_{j=1}^{p} a_j = d$, $\sum_{j=1}^{q} c_j = d$; $p, q > 0$.

Введём обозначение $MP(\varkappa)$ для многообразия, заданного однородной системой уравнений $\prod(z - A_i)^{a_i} = \prod(z - C_i)^{c_i}$, записанной как покоэффициентное равенство многочленов от z, и однородным соотношением $\sum a_i A_i = 0$ в проективном пространстве с координатами $A_1, A_2 \ldots A_p$, $C_1, C_2 \ldots C_q$.

В работе описаны все $\varkappa$, для которых $MP(\varkappa)$ конечно. Для начала рассматривается случай пустого множества:

Утверждение 2. *$MP(\varkappa)$ пусто тогда и только тогда, когда* $\varkappa \in \{< 1, 1, \ldots, 1 \mid N \mid N >, < N \mid 1, 1, \ldots, 1 \mid N >\}$.

Далее доказан критерий, позволяющий выразить размерность $MP(\varkappa)$ в комбинаторных терминах:

Утверждение 3. *Следующие условия эквивалентны:*
1)размерность $t = \dim MP(\varkappa) \geqslant t_0$
2)существуют разбиения $\{1, 2 \ldots p\} = \bigsqcup_{j=1}^{t_0+2} U_j$, $\{1, 2 \ldots q\} = \bigsqcup_{j=1}^{t_0+2} V_j$ на непустые попарно непересекающиеся множества такие, что $\sum_{i \in U_j} a_i = \sum_{i \in V_j} c_i$ для всех j от 1 до $t_0 + 2$.
3)существуют вложенные цепочки собственных поднаборов 0- и 1-валентностей, задаваемые цепочками вложенных множеств индексов $\emptyset \subset U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_{t_0+1} \subset \{1, 2, \ldots, p\}$ и $\emptyset \subset V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{t_0+1} \subset \{1, 2, \ldots, q\}$ (все вложения строгие) такие, что $\sum_{i \in U_j} a_i = \sum_{i \in V_j} c_i$ для всех j от 1 до $t_0 + 1$.

Из этого критерия следует неравенство

$$\dim MP(\varkappa) \leqslant \min(p, q) - 2 \tag{1.2}$$

Из неравенства следует, что $MP(\varkappa)$ конечно при $\min(p, q) \leqslant 2$. Все наборы $\varkappa$ с $\min(p, q) = 3$ и конечным $MP(\varkappa)$ найдены при доказательсте утверждения 6, а для $\min(p, q) \geqslant 4$ доказано, что $MP(\varkappa)$ бесконечно:

Утверждение 7. *Если $\min(p, q) \geqslant 4$, то $\dim MP(\varkappa) \geqslant 1$.*

В диссертации также доказано, что для каждой размерности есть лишь конечное число таких $\varkappa$, для которых неравенство (1.2) является строгим. Точнее, имеет место

Утверждение 4. *Для каждого целого неотрицательного числа t существует не более чем конечное число наборов валентностей $\varkappa$, для которых $\dim MP(\varkappa) = t < \min(p,q) - 2$. Более того, для каждого набора валентностей, удовлетворяющего строгому неравенству, количество рёбер не больше, чем $\max(8t+13, 11t+12, \frac{3}{2}(t+3)(t+2))$.*

Краткое содержание главы 2.

В главе 2 рассматриваются различные подходы к построению систем уравнений для вычисления пар Белого.

В разделе 2.1 рассматривается комбинаторный тип $\varkappa := DS < a_1, a_2, \ldots, a_p \mid c_1, c_2, \ldots, c_q \mid d >$ плоского дерева и соответствующая ему система уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sum a_i A_i & = & 0 \\ \sum c_i C_i & = & 0 \\ S_k(A) & = & S_k(C), \text{при } k = 2,3,4,\ldots,d-1 \end{array}\right. \tag{2.1}$$

где $S_k(A)$ — коэффициент при z^{d-k} в многочлене $\prod(z-A_i)^{a_i}$, а $S_k(C)$ — коэффициент при z^{d-k} в многочлене $\prod(z-C_i)^{c_i}$.

Обозначаем $MA(\varkappa)$ проективное многообразие решений системы (2.1) в проективном пространстве с координатами $A_1, A_2 \ldots A_p$, $C_1, C_2 \ldots C_q$.

Утверждение 8. *Набор $(A_i, C_i) \in MA(\varkappa)$, задаёт функцию Белого некоторого рисунка по формуле $P(z) = t\prod(z-A_i)^{a_i} = 1 + t\prod(z-C_i)^{c_i}$ в том и только в том случае, когда $\prod(z-A_i)^{a_i} \not\equiv \prod(z-C_i)^{c_i}$. Если это неравенство выполняется, то соответствующий прообраз отрезка $[0,1]$ лежит в $DS < a_1, a_2, \ldots, a_p \mid c_1, c_2, \ldots, c_q \mid d >$. И наоборот, каждое двукрашенное дерево получается из решения системы (2.1), построенной для его набора валентностей. При этом количество решений, соответствующих данному двукрашенному дереву, может быть найдено как частное количества перестановок его вершин, сохраняющих цвет и валентность и порядка группы симметрий рисунка (которая является циклической группой).*

В разделе 2.2 в качестве основного поля выбирается произвольное поле $\mathbb{K}$ и рассматривается следующее обобщение антивандермондовой системы:

Определение 4. *ОАВ (обобщенной антивандермондовой системой)* называется система однородных полиномиальных уравнений на точку $(x_0 :$

$x_1 : \ldots : x_N)$ проективного пространства $\mathbb{P}^N(\mathbb{K})$, имеющая вид

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_N & = 0 \\ k_0x_0 + k_1x_1 + k_2x_2 + \ldots + k_Nx_N & = 0 \\ a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_Nx_N & = 0 \\ a_0x_0^2 + a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \ldots + a_Nx_N^2 & = 0 \\ a_0x_0^3 + a_1x_1^3 + a_2x_2^3 + \ldots + a_Nx_N^3 & = 0 \\ \ldots & \\ a_0x_0^{N-1} + a_1x_1^{N-1} + a_2x_2^{N-1} + \ldots + a_Nx_N^{N-1} & = 0. \end{cases}$$

Здесь a_j – ненулевые элементы поля $\mathbb{K}$;
k_j, x_j – элементы поля $\mathbb{K}$; $\sum_{j=0}^{N} k_j \neq 0$.

Далее в диссертации мы приводим ряд определений связанных с этой системой и доказываем основной результат:

Определение 5. Назовём решение ОАВ *непаразитическим*, если все x_i различны. Все остальные решения ОАВ назовём *паразитическими.*

Теорема 1. *Если точка* $(x_0 : x_1 : \ldots : x_N) \in \mathbb{P}^N(\mathbb{K})$ *является непаразитическим решением ОАВ и* $char\mathbb{K} \geqslant N$, *то в этой точке* $N-1$*-мерные гиперповерхности, заданные уравнениями системы, пересекаются трансверсально.*

Теорема 3. *Если все решения ОАВ являются непаразитическими, то их количество равно* $(N-1)!$ *(здесь* $char\mathbb{K} = 0$, $\mathbb{K}$ *алгебраически замкнуто).*

Теорема 4. *Множество значений параметров* a_i, *при которых ОАВ имеет хотя бы одно паразитическое решение, имеет коразмерность* 1 *в пространстве допустимых параметров* $\mathbb{P}^N(a_j) \cap \sum_{j=0}^{N} a_j = 0$ *и содержится в объединении не более чем* 2^N *гиперплоскостей.*

Следствие 2. *В случае, если* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *а числа* $a_j \in \mathbb{R}$, *существуют сколько угодно близкие к ним в* $\mathbb{P}^N(a_j)$ *целочисленные* a_j, *для которых все решения ОАВ является непаразитическими.*

Кроме того, построено соответствие между псевдодеревьями и непаразитическими решениями ОАВ:

Следствие 4. Пусть D – детский рисунок, который является прообразом $\beta^{-1\circ}([-\infty, 0])$, где $\beta = \prod_{j=0}^{N}(x - x_j)^{a_j}$ – функция Белого, соответствующая непаразитическому решению ОАВ, $a_j \in \mathbf{Z}$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Тогда D является псевдодеревом.

В разделе 2.3 обсуждается связь понятий функции Белого и якобиана кривой. В частном случае, для функции Белого степени d на кривой рода 0, это означает, что функция Белого задаёт прямую в пространстве однородных форм от 2 переменных, которая пересекает дискриминантную поверхность в 3 точках.

Раздел 2.4 в основном посвящён обзору статьи[7] об инвариантах, различающих кривые рода 2 (все эти кривые гиперэллиптические).

В разделе 2.5 вводится семейство квартик, для которых существует пара касательных в точках перегиба, пересекающаяся на квартике и приводятся два примера таких квартик:

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x - y^3x - y - 3y^3 + 3y^2 + y^4 = 0$$

и

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x + yx + y^4 = 0.$$

В разделе 2.6 вводится метод написания системы уравнений на пары Белого, подходящий для сколь угодно больших родов. При этом кривая реализуется как плоская проективная кривая с не более чем простыми особенностями. В этом разделе основное поле — это поле $\mathbb{C}$.

Определение Особая точка плоской алгебраической кривой называется *простейшей*, если ей соответствуют только линейные ветви и касательные к разным ветвям различны.

Определение 9. Пару (X, β), состоящую из плоской проективной кривой $X : \{(x : y : z) \mid f(x, y, z) = 0\}$ и функции $\beta = \frac{P(x,y,z)}{Q(x,y,z)}$ назовём *хорошей*, если

a) f, P, Q – однородные формы от x, y, z, $\deg P = \deg Q$, P и Q взаимно просты.

b) кривая X либо гладкая, либо все её особенности простейшие с не более чем двумя ветвями в каждой.

c) все особенности плоской кривой X лежат в аффинной карте $z = 1$, и все точки перечесения X с прямой $z = 0$ однократны.

d) в каждой особой точке плоской кривой X функция Белого принимает два различных значения на двух пересекающихся ветвях кривой.

Утверждение 10. *Любая пара Белого степени n рода g изоморфна хотя бы одной хорошей с* $\deg f = 2g + 3$, $\deg P = \deg Q \leqslant (2g + 3)(n + 2g^2 + 2g + 1)$ *и критическими значениями, лежащими в множестве* $\{0, 1, \infty\}$.

Далее доказаны различные свойства такого представления, в частности:

Утверждение 11. *Для хорошей пары Белого с* $\deg f = N$, $\deg \beta = n$, $\deg P = \deg Q = M$ *можно записать результанты* $Re_z(P - Q, f) = RW_1$,

[7]Jun-ichi Igusa, *Arithmetic variety of moduli for genus two,* Ann.Math. Vol. 72, No. 3, Nov. 1960

$Re_z(P,f) = RW_0$, $Re_z(Q,f) = RW_\infty$, *где* $\deg R = MN - n$, $\deg W_0 = \deg W_1 = \deg W_\infty = n$.

Утверждение 12. *Кривая* $f = 0$ *удовлетворяет условиям b,c определения хорошей пары в том и только в том случае, когда не существует ни таких*
$(x, y) \in \mathbb{A}^2$, *что*

$$f(x,y,1) = 0$$

$$(\frac{d}{dx}f)(x,y,1) = (\frac{d}{dy})f(x,y,1) = 0$$

$$(\frac{d^2}{dx^2}f)(x,y,1)(\frac{d^2}{dy^2}f)(x,y,1) = ((\frac{d^2}{dxdy}f)(x,y,1))^2$$

ни таких $(x : y) \in \mathbb{P}^1$, *что*

$$f(x,y,0) = 0$$

$$(\frac{d}{dx}f)(x,y,0) = (\frac{d}{dy}f)(x,y,0) = (\frac{d}{dz}f)(x,y,0) = 0$$

Краткое содержание главы 3.

В главе 3 приводятся и иллюстрируются на конкретных примерах различные техники вычисления пар Белого. Всего получено 29 различных рисунков и 2 приведённых ниже бесконечных семейства.

Первое из них — это семейство пар Белого рода 0, комбинаторные типы которых имеют вид $BP < 2k, 2l \mid 2, 2 \dots 2 \mid k + l, 2, 1, 1, \dots, 1 >$.

Второе семейство — это следующее семейство пар Белого рода 3:

Утверждение 18. *Для несократимой дроби вида* $k = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \{0, 1, -1\}$ *пара* (X, β) *является парой Белого рода* 3, *если:*
кривая X *задана уравнением*
$216\,k^3x^4 + (216\,k^3 + 108\,k^2)x^3y + (18\,k - 216\,k^2)x^2y^2 + (1 - 216\,k^3)xy^3 + 216\,k^2y^4 - 648\,k^3x^3 - 216\,k^2x^2y - 18\,kxy^2 + 648\,k^3x^2 + 108\,k^2xy - 216\,k^3x = 0$;
функция β *задана равенством*

$$\beta := y^{(2p^2 - 2q^2)}(y - x)^{(-p^2 - pq)}(y + x)^{(pq - p^2)}(y - kx)^{(2q^2)}$$

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своим научным руководителям: д.ф.-м.н., профессору Шабату Георгию Борисовичу за постановку задач, постоянное внимание и помощь в работе; д.ф.-м.н., профессору Латышеву Виктору Николаевичу за доброжелательное руководство. Автор выражает благодарность профессорам Юргену Вольфарту

и Гарету Джонсу, за их превосходный курс на летней школе в университете г. Ювяскюля (2006). Наконец, хочется поблагодарить весь коллектив семинара "Графы на поверхностях и кривые над числовыми полями" за поддержку и содержательные обсуждения.

Публикации по теме диссертации.

[1] В. А. Дремов, *Вычисление двух пар Белого степени 8,* Успехи математических наук - 2009, том 64, выпуск 3(387), с. 183-184.

[2] Н. М. Адрианов, Н. Я. Амбург, В. А. Дремов, Ю. Ю. Кочетков, Е. М. Крейнес, Ю. А. Левицкая, В. Ф. Насретдинова, Г. Б. Шабат, *Каталог функций Белого детских рисунков с не более чем четырьмя рёбрами,* Фундаментальная и прикладная математика - 2007, т.13, вып.6, с. 35-112.

В этой работе Дремову В. А. принадлежит раздел 2, а также существенная часть разделов 4-7, а именно: вычисление пар Белого для несимметричных 4-рёберных рисунков рода 1 с двумя гранями (в том числе, 51-60, 64-65, 67-68, 82-85, 100), дублирующее вычисление для 4-рёберных рисунков рода 0, отдельные вычисления для других групп рисунков. Кроме того, Дремов В. А. проводил завершающее упрощение формул и сведение их к единому виду.

[3] Б. С. Бычков, В. А. Дремов, Е. М. Епифанов, *Вычисление пар Белого шестирёберных рисунков рода 3 с группами автоморфизмов порядков 12 и 3,* Фундаментальная и прикладная математика - 2007, т.13, вып.6, с. 137-148.

В этой работе Дремову В. А. принадлежит раздел 3, содержащий утверждение 3.1 про факторизацию по группе автоморфизмов в категории детских рисунков.

[4] В. А. Дремов, *Вычисление двух пар Белого,* Депонировано в ВИНИТИ 29.04.09 N 267В2009, МГУ. - М., 2009.

[5] В. А. Дремов, *Об одном семействе обобщенных многочленов Чебышева,* конференция "Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения": Тезисы докладов. - Тула, 2003, с. 98-99.