Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Механико-математический факультет

На правах рукописи

УДК 519.21

Хихол Семён Александрович

ОБОБЩЕННЫЙ ПРОЦЕСС ПЛОТНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СЕМИМАРТИНГАЛОВ С НЕЗАВИСИМЫМИ ПРИРАЩЕНИЯМИ: ВЫЧИСЛЕНИЕ И ПРИМЕНЕНИЯ

01.01.05 – теория вероятностей и математическая статистика

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Москва 2010

Работа выполнена на кафедре теории вероятностей механико-математического факультета Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова

Научный руководитель: доктор физико-математических наук
Гущин Александр Александрович

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук,
профессор Богачев Владимир Игоревич,

доктор физико-математических наук,
профессор Павлов Игорь Викторович

Ведущая организация: Центральный экономико-математический институт РАН

Защита диссертации состоится 21 мая 2010 года в 16 часов 40 минут на заседании диссертационного совета Д 501.001.85 при Московском государственном университете имени М.В. Ломоносова по адресу: 119991, ГСП-1, Москва, Ленинские горы, МГУ, Главное здание, механико-математический факультет, аудитория 16-24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке механико-математического факультета МГУ (Главное здание МГУ, 14 этаж).

Автореферат разослан 19 апреля 2010 года

Ученый секретарь диссертационного совета
Д 501.001.85 при МГУ,
доктор физико-математических наук,
профессор И.Н. Сергеев

Актуальность работы.

Вопросы эквивалентности, абсолютной непрерывности и сингулярности распределений случайных процессов, а также вид их плотности являются классическими и находят применение в различных областях приложения теории случайных процессов, в частности, в статистике случайных процессов, анализе, теории информации, финансовой математике.

Одним из хорошо исследованных и широко встречающихся в приложениях классом случайных процессов являются процессы с независимыми приращениями. Первые результаты о плотностях распределений непрерывных процессов с независимыми приращениями были получены Р. Камероном и В. Мартином[1,2] в связи с изучением вопроса о замене переменных в интеграле по винеровской мере. Необходимые и достаточные условия абсолютной непрерывности распределений стохастически непрерывных процессов с независимыми приращениями и формула для их плотности были получены А. В. Скороходом[3,4] (см. также статью И. И. Гихмана, А. В. Скорохода[5]).

Необходимые и достаточные условия абсолютной непрерывности распределений произвольных семимартингалов с независимыми приращениями и выражение для их процесса плотности были получены Ю. М. Кабановым, Р. Ш. Липцером, А. Н. Ширяевым[6] и Ж. Жакодом[7] как след-

---

[1] *Cameron R. H., Martin W. T.* Transformation of Wiener integral under translation. // Ann. Math. 1944. Vol. 45. P. 386–396.

[2] *Cameron R. H., Martin W. T.* Transformations of Wiener integrals under a general class transformation. // Trans. Amer. Math. Soc. 1945. Vol. 58. P. 184–219.

[3] *Скороход А.В.* О дифференцируемости мер, соответствующих случайным процессам. // Теория вероятн. и ее примен. 1957. Т. 2 № 4. С. 417–443.

[4] *Скороход А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. М.: Наука, 1964.

[5] *Гихман И. И., Скороход А. В.* О плотностях вероятностных мер в функциональных пространствах. // Успехи матем. наук. 1966. Т. 21, № 6. С. 83—152.

[6] *Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Абсолютная непрерывность и сингулярность локально абсолютно непрерывных вероятностных распределений II. // Матем. сб. 1979. Т. 108(150), № 1. С. 32—61.

[7] *Jacod J.* Calcul stochastique et problèmes de martingales. Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1979. (Lect. Notes Math. Vol. 714)

ствие общей теории, детальное изложение которой можно найти в монографии Ж. Жакода, А. Н. Ширяева[8].

Выражение для плотности абсолютно непрерывной компоненты одного распределения относительно другого без предположения об абсолютной непрерывности в случае процессов Леви было получено К. Сато[9]. Упомянем также работы Ч. Ньюмена[10,11] и Ж. Мемена, А. Н. Ширяева[12], прилегающие к этому кругу вопросов.

Понятие большей информативности статистических экспериментов было введено Х. Боненбластом, Л. Шепли, С. Шерманом в 1949 году в неопубликованной работе и развито в статьях Д. Блекуэлла[13,14]. Дальнейшее развитие теория получила, в первую очередь, в работах Л. Ле Кама и Э. Торгерсена, см. монографии[15,16]. "Очень часто" эксперименты несравнимы между собой (что привело к введению Л. Ле Камом понятия дефекта одного эксперимента относительно другого[17]), и даже если они сравнимы, то доказать это бывает непросто. Большинство из известных результатов о сравнимости конкретных экспериментов относятся к случаю гауссовских экспериментов или экспериментов с параметром сдви-

---

[8] *Jacod J., Shiryaev A. N.* Limit theorems for stochastic processes. Second edition. Berlin: Springer-Verlag, 2003.

[9] *Sato K.* Density transformation in Lévy processes. Lecture notes for "Concentrated advanced course on Lévy processes". // MaPhySto, Centre for Mathematical Physics and Stochastics, Department of Mathematical Sciences, University of Aarhus, 2000.

[10] *Newman C.* The inner product of path space measures corresponding to random processes with independent increments. // Bull. Amer. Math. Soc. 1972. Vol. 78 P. 268–271.

[11] *Newman C.* On the orthogonality of independent increment processes. // Topics in probability theory. Courant Inst. Math. Sci., New York, 1973. P. 93–111.

[12] *Memin J., Shiryayev A. N.* Distance de Hellinger-Kakutani des lois correspondant à deux processus à accroissements indépendants. // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. 1985. Vol. 70, № 1, P. 67–89.

[13] *Blackwell D.* Comparison of experiments. // Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950 — University of California Press, Berkeley and Los Angeles, 1951. P. 93–102.

[14] *Blackwell D.* Equivalent comparisons of experiments. // Ann. Math. Statistics. 1953 Vol. 24. P. 265–272.

[15] *Le Cam L.* Asymptotic methods in statistical decision theory. New York: Springer-Verlag, 1986.

[16] *Torgersen E.* Comparison of statistical experiments. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

[17] *Le Cam L.* Sufficiency and approximate sufficiency. // Ann. Math. Statist. 1964. Vol. 35, P. 1419–1455.

га, а в качестве стандартного приема при доказательстве использовался рандомизационный критерий Ле Кама.

В последние годы в финансовой математике стали появляться задачи, в которых требуется максимизировать или минимизировать f-дивергенцию по некоторому множеству пар вероятностных мер, причем нередко это требуется сделать одновременно для всех выпуклых функций f. Последнее эквивалентно нахождению наиболее или наименее информативного в некотором множестве бинарных экспериментов.

Так, задача, двойственная задаче максимизации полезности, состоит в минимизации f-дивергенции между "физической" мерой и абсолютно непрерывными локально мартингальными мерами (см., например,[18,19]). Как правило, если локально мартингальная мера неединственна (т.е. рынок является неполным), мера, на которой достигается минимум f-дивергенций, зависит от функции f.

Весьма распространенное предположение о модели финансового рынка состоит в том, что процесс цен есть экспонента от процесса Леви относительно "физической" меры. Для некоторых специальных f было доказано, что относительно локально мартингальной меры, доставляющей минимум в указанной выше задаче минимизации f-дивергенции, процесс цен также является экспонентой от процесса Леви (см., в частности, работы[20,21,22,23,24]), однако нет оснований предполагать, что это справед-

---

[18] *Kramkov D., Schachermayer W.* The asymptotic elasticity of utility functions and optimal investment in incomplete markets. // Ann. Appl. Probab. 1999. Vol. 9, № 3. P. 904–950.

[19] *Schachermayer W.* Optimal investment in incomplete markets when wealth may become negative. // Ann. Appl. Probab. 2001 Vol. 11, № 3. P. 694–734.

[20] *Chan T.* Pricing contingent claims on stocks driven by Lévy processes. // Ann. Appl. Probab. 1999. Vol. 9, № 2. P. 504–528.

[21] *Esche F., Schweizer M.* Minimal entropy preserves the Lévy property: how and why. // Stoch. Proc. Appl. 2005. Vol. 115. P. 299–327.

[22] *Fujiwara T., Miyahara Y.* The minimal entropy martingale measures for geometric Lévy processes. // Finance Stoch. 2003. Vol. 7, № 4. P. 509–531.

[23] *Hurd T. R.* A note on log-optimal portfolios in exponential Lévy markets. // Statististics and Decisions. 2004. Vol. 22, № 3. P. 225–233.

[24] *Jeanblanc M., Klöppel S. and Miyahara Y.* Minimal f^q-martingale Measures for Exponential Lévy Processes. // Ann. Appl. Probab. 2007. Vol. 17, № 5/6, P. 1615–1638.

ливо для всех выпуклых f.

В работе А. А. Гущина и Э. Мордецки[25] рассматривалась задача нахождения верхней и нижней цен выпуклых опционов европейского типа. Был предложен подход к решению этой задачи, основанный на нахождении наиболее и наименее информативных экспериментов в некотором множестве бинарных экспериментов. Для реализации этого подхода в конкретных моделях ими была доказана так называемая лемма о сравнении, дающая достаточные условия сравнимости бинарных экспериментов, отвечающих наблюдениям за случайными процессами с непрерывным временем, т.е. в ситуации, когда применение рандомизационного критерия затруднено и, может быть, даже невозможно. Однако, даже в случае наблюдения за процессами Леви условия леммы о сравнении являются только достаточными, но, вообще говоря, не необходимыми.

Упомянем еще работу А. Шида[26], в которой была полностью решена задача максимизации робастной полезности на полном рынке в предположении, что существует субъективная мера, на которой достигается минимум f-дивергенции между субъективными мерами и единственной локально мартингальной мерой одновременно для всех выпуклых функций f. Иными словами, во множестве соответствующих бинарных экспериментов существует наименее информативный.

В работе Д. Крамкова и М. Сирбу[27] доказано, что существование так называемого риск-толерантного процесса капитала (что означает важные качественные свойства цен платежных обязательств, основанных на принципе максимизации полезности) для всех функций полезности эквивалентно существованию эквивалентной супермартингальной меры, максимизирующей f-дивергенцию между всеми эквивалентными супермартингальными мерами и “физической” мерой одновременно для всех

[25] *Гущин А. А., Мордецки Э.* Границы цен опционов для семимартингальных моделей рынка. // Тр. МИАН. Т. 237. Стохастическая финансовая математика. М.: Наука, 2002. С. 80–122.

[26] *Schied A.* Optimal investments for robust utility functionals in complete market models. // Math. Oper. Res. 2005 Vol. 30, № 3. P. 750–764.

[27] *Kramkov D., Sîrbu M.* Sensitivity analysis of utility-based prices and risk-tolerance wealth processes. // Ann. Appl. Probab. 2006. Vol. 16, № 4. P. 2140–2194.

выпуклых функций f. Другими словами, речь идет о существовании наиболее информативного в соответствующем множестве бинарных экспериментов.

Круг вопросов, рассматриваемых в настоящей диссертации, во многом мотивирован перечисленными выше задачами из финансовой математики. В частности, решается следующая задача. Берется произвольный семимартингал с независимыми приращениями. Усредняя его локальные характеристики по времени, мы преобразуем его в процесс Леви. Показано, что этот процесс Леви "ближе" к любому процессу Леви, чем исходный процесс, где "большая близость" процессов понимается как большая близость всех f-дивергенций между их распределениями, что эквивалентно сравнимости бинарных экспериментов, составленных из распределений соответствующих процессов.

Из этого результата вытекает следующий факт. Предположим, что на некотором пространстве с фильтрацией на конечном временном интервале задан процесс Леви. Пусть также есть мера, абсолютно непрерывная (эквивалентная) относительно исходной, по которой рассматриваемый процесс является процессом с независимыми приращениями. Тогда найдется третья мера, абсолютно непрерывная (эквивалентная) относительно исходной, по которой рассматриваемый процесс есть процесс Леви, и которая "ближе" (в прежнем смысле) к исходной мере, чем вторая. При этом, если процесс был мартингалом по второй мере, то он им останется и по третьей. Этот факт может быть полезен при решении задач минимизации f-дивергенции, рассмотренных выше.

В решении задачи, касающейся усреднения локальных характеристик семимартингала с независимыми приращениями, используется доказанный в диссертации критерий эквивалентности бинарных экспериментов, составленных из распределения семимартингала с независимыми приращениями и распределения процесса Леви, и имеющий самостоятельный интерес для теории сравнения бинарных экспериментов, поскольку он позволяет строить вспомогательные эксперименты, эквивалентные исходным, но более удобные для сравнения.

Как для решения задачи об усреднении локальных характеристик семимартингала с независимыми приращениями, так и для доказательства критерия эквивалентности экспериментов требуется уметь вычислять обобщенный процесс плотности распределения произвольного семимартингала с независимыми приращениями относительно распределения процесса Леви без предположения о локальной абсолютной непрерывности этих распределений.

В диссертации решается более общая задача: установлен вид обобщенного процесса плотности распределений двух произвольных семимартингалов с независимыми приращениями. Таким образом, обобщаются упомянутые выше результаты, относящиеся к локально абсолютно непрерывному случаю и случаю процессов Леви.

Цель работы.

Диссертация преследует следующие цели.

- Получить представление для обобщенного процесса плотности распределений двух семимартингалов с независимыми приращениями без предположения об их локальной абсолютной непрерывности.

- Показать, что процесс Леви, полученный из семимартингала с независимыми приращениями усреднением локальных характеристик по времени, "ближе" к любому процессу Леви, чем исходный процесс, в смысле большей близости всех f-дивергенций между их распределениями.

- Получить критерий эквивалентности бинарных экспериментов, составленных из распределения семимартингала с независимыми приращениями и распределения процесса Леви.

Научная новизна.

Основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

- Получены два представления для обобщенного процесса плотности распределений двух семимартингалов с независимыми приращениями без предположения об их локальной абсолютной непрерывности.

- Показано, что усреднение локальных характеристик по времени преобразует семимартингал с независимыми приращениями в процесс Леви, который "ближе" к любому процессу Леви, чем исходный процесс. "Большая близость" процессов понимается как большая близость всех f-дивергенций между их распределениями.

- Доказан критерий эквивалентности бинарных экспериментов, составленных из распределения семимартингала с независимыми приращениями и распределения процесса Леви.

Методы исследования.

В работе применяются методы стохастического исчисления и теории статистических экспериментов.

Теоретическая и практическая ценность.

Работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть полезны в теории вероятностей, теории случайных процессов, а также в различных областях приложения теории случайных процессов, в частности, в статистике случайных процессов, анализе, теории информации, а также в задачах финансовой математики.

Апробация диссертации.

Результаты, относящиеся к диссертации, излагались на следующих семинарах и конференциях:

1. Семинар "Стохастический анализ: теория и приложения", проводимый в Математическом институте им. В. А. Стеклова под руководством члена-корреспондента РАН, профессора А. Н. Ширяева и доктора физико-математических наук А. А. Гущина, г. Москва, март 2009 г.

2. Международная конференции студентов, аспирантов и молодых учёных “Ломоносов–2009”, г. Москва, апрель 2009 г.

3. Большой семинар кафедры теории вероятностей (МГУ, механико-математический факультет) под руководством члена-корреспондента РАН, профессора А. Н. Ширяева, г. Москва, март 2010 г.

Публикации.

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 работах [1-5] (полный список приведен в конце автореферата), в том числе 3 из них [1-3] в журналах, внесенных в список ВАК. Работ, опубликованных в соавторстве, нет.

Структура и объем работы.

Работа состоит из введения, трех глав и списка литературы из 41 наименований. Общий объем диссертации составляет 85 страниц.

Диссертация построена следующим образом. **В первой главе** приводятся некоторые определения и известные факты из стохастического анализа, теории статистических экспериментов и теории f-дивергенций, используемые в последующих доказательствах. Также в первой главе приведены некоторые вспомогательные результаты.

Во второй главе доказывается формула для процесса плотности распределений двух семимартингалов с независимыми приращениями, обобщающая хорошо известный результат, относящийся к случаю локально абсолютно непрерывных распределений (см., напр., теорему III.5.35 из монографии[8]), а также результат К. Сато (формулу (3.32) из работы[9]) для процессов Леви без требования локальной абсолютной непрерывности.

В третьей главе с помощью полученной во второй главе формулы для процесса плотности доказано несколько важных результатов о сравнении и эквивалентности некоторых бинарных статистических экспериментов, отвечающих наблюдениям за процессами с независимыми приращениями. В частности, показано, что усреднение локальных характеристик по времени преобразует семимартингал с независимыми приращениями в процесс Леви. Показано, что этот процесс Леви "ближе" к любому процессу Леви, чем исходный процесс, где "большая близость" процессов понимается как большая близость всех f-дивергенций между их распределениями, что также допускает эквивалентную формулировку в терминах сравнения соответствующих бинарных статистических экспериментов. Кроме того, доказан критерий эквивалентности бинарных экспериментов, составленных из распределения семимартингала с независимыми приращениями и распределения процесса Леви, имеющий самостоятельный интерес для теории сравнения статистических экспериментов.

Цитируемые утверждения носят название "предложение". Собственные результаты автора названы "теоремами" (вспомогательные утверждения называются "леммами").

Нумерация утверждений — сплошная внутри каждой главы. При этом используется двойная система нумерации, так что ссылка на теорему 3.1 указывает на первую теорему в третьей главе. То же самое относится и к нумерации формул.

Краткое содержание диссертации.

Диссертация состоит из трех глав. **В первой главе** собраны основные определения и некоторые вспомогательные результаты, которые используются в последующих главах.

Во второй главе получена формула для обобщенного процесса плотности распределений двух произвольных семимартингалов с независимыми приращениями без требования локальной абсолютной непрерывности их распределений.

Далее мы формально опишем постановку задачи и введем некоторые вспомогательные объекты, необходимые для приведения здесь двух полученных нами представлений для обобщенного процесса плотности распределений двух произвольных семимартингалов с независимыми приращениями в терминах триплетов локальных характеристик канонического процесса относительно заданных мер.

Рассмотрим на пространстве $\Omega = \mathbb{D}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{D}(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^d)$ всех непрерывных справа, имеющих пределы слева функций $\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d$ канонический процесс X, задаваемый соотношением $X_t(\omega) = \omega(t)$. Обозначим μ меру скачков процесса X. Пусть фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ порождена X, т.е. $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}^0_{t+\varepsilon}$, $\mathcal{F}^0_t = \sigma\{X_s, s \le t\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}^0_\infty$.

Рассмотрим на $(\Omega, \mathcal{F})$ две вероятностные меры P и P', по которым процесс X является семимартингалом с независимыми приращениями (в отличие от монографии[8] мы не предполагаем, что $X_0 = 0$). Сужения P и P' на σ-алгебру $\sigma\{X_0\}$ обозначим P_H и P'_H соответственно.

Фиксируем произвольную функцию усечения $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$. Детерминированные версии триплетов X относительно P и P' обозначим соответственно

$$(B_t, C_t, \nu(dt, dx)), (B'_t, C'_t, \nu'(dt, dx)). \tag{1}$$

Свяжем с этими триплетами несколько детерминированных объектов. Пусть λ — мера на $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d$ такая, что $(|x|^2 \wedge 1) * \lambda_t < \infty$ для всех $t < \infty$ и $\nu \ll \lambda$, $\nu' \ll \lambda$. Положим $U = d\nu/d\lambda$, $U' = d\nu'/d\lambda$.

Существует единственное разложение $\nu' = \nu'_1 + \nu'_2$, где $\nu'_1 \ll \nu$ и $\nu'_2 \perp \nu$, причем $\nu'_1 = 1_{\mathsf{A}} \cdot \nu'$ и $\nu'_2 = 1_{\mathsf{A}^c} \cdot \nu'$ для некоторого множества $\mathsf{A} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d)$. Обозначим Y — вариант плотности ν'_1 относительно $\nu : \nu'_1 = Y \cdot \nu$. Обозначим также

$$a_t = \nu(\{t\} \times \mathbb{R}^d), a'_t = \nu'(\{t\} \times \mathbb{R}^d), a'_{i,t} = \nu'_i(\{t\} \times \mathbb{R}^d),\ i = 1, 2.$$

Из критерия сингулярности распределений семимартингалов с независимыми приращениями несложно показать существование такого детерминированного момента $\sigma \in [0, +\infty]$, что $\sigma = \min\{t : \mathsf{P}_t \perp \mathsf{P}'_t\}$, где P_t и P'_t есть сужения мер P и P' соответственно на $\mathcal{F}_t$; более того, σ явно выражается через триплеты (1).

Из того же критерия вытекает существование такой измеримой функции $\beta : [0, \sigma) \to \mathbb{R}^d$, что

$$B' = B + h(x)\,(U' - U) * \lambda + (c\beta) \cdot A \qquad \text{на } [0, \sigma).$$

Здесь A_t — непрерывная возрастающая функция, а c_t — функция со значениями в множестве симметрических неотрицательно определенных матриц размера $d \times d$ такие, что $C = c \cdot A$.

Под *обобщенным процессом плотности* меры P' относительно P будем понимать такой (единственный с точностью до P-неразличимости) согласованный P-п.н. непрерывный справа и имеющий пределы слева случайный процесс $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ со значениями в $\mathbb{R}_+$, что для любого $t \in \mathbb{R}_+$ случайная величина Z_t есть плотность абсолютно непрерывной компоненты P'_t относительно P_t.

Основным результатом второй главы являются два представления для обобщенного процесса плотности Z меры P' относительно P.

Теорема 1 *Обобщенный процесс плотности Z меры P' относительно P имеет следующий вид P-п.н.:*

$$Z = \frac{d\mathsf{P}'_H}{d\mathsf{P}_H}\,\mathcal{E}(N)\;D\;1_{[\![0,\sigma[\![} = \frac{d\mathsf{P}'_H}{d\mathsf{P}_H}\,\mathcal{E}(N - \Psi)\;1_{[\![0,\sigma[\![}, \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
N_t &= \beta \cdot X^c_t + \left(Y - 1 + \frac{a'_1 - a}{1 - a} 1_{\{a<1\}} \right) * (\mu - \nu)_t, \\
D_t &= \exp(-k_t) \prod_{\substack{s \leqslant t \\ a_s < 1 \\ \Delta X_s = 0 \\ a'_{1,s} < 1}} \frac{1 - a'_s}{1 - a'_{1,s}} \prod_{\substack{s \leqslant t \\ a_s = 1 \\ a'_{1,s} < 1 \text{ или } Y(s, \Delta X_s) > 0}} \frac{Y(s, \Delta X_s)}{1 + Y(s, \Delta X_s) - a'_{1,s}}, \\
\Psi_t &= k_t + \sum_{\substack{s \leqslant t \\ a_s < 1 \\ \Delta X_s = 0}} \frac{a'_{2,s}}{1 - a_s} + \sum_{\substack{s \leqslant t \\ a_s = 1}} (1 - a'_{1,s}), \\
k_t &= \nu'_2 \left(\{ s \leqslant t : a_s = a'_s = 0 \} \times \mathbb{R}^d \right)
\end{aligned}$$

и X^c — непрерывная мартингальная составляющая канонического процесса X по мере P.

В случае $\mathsf{P}' \overset{\text{loc}}{\ll} \mathsf{P}$, согласно критерию абсолютной непрерывности имеем $\sigma = \infty$, $\nu' \ll \nu$ и $a'_t = 1$ если $a_t = 1$, поэтому $D \equiv 1, \Psi \equiv 0$ и формула (2) сводится к известной формуле III.5.21[8] для процесса плотности.

В случае, когда P и P' — распределения процессов Леви, известно, что $\sigma = 0$ или $\sigma = \infty$. Поскольку для процессов Леви $a_t \equiv a'_t \equiv 0$, в случае $\sigma = \infty$ представление (2) приобретает вид

$$Z = \mathcal{E}(\beta \cdot X^c + (Y-1) * (\mu - \nu) - k),$$

причем β не зависит от t, а Y зависит только от x. Это представление для Z совпадает с несколько более сложным представлением (3.32)[9] у К. Сато.

В разделе 2.1 формулируется основной результат второй главы, **в разделе 2.2** приведено его доказательство: **в подразделе 2.2.1** осуществляется сведение к случаю несинулярных распределений, **в подразделе 2.2.2** строится мера, доминирующая исходные распределения, **в подразделе 2.2.3** приведены вспомогательные вычисления, результаты которых используются **в подразделе 2.2.4** для явного выражения обобщенного процесса плотности меры P' относительно P через их триплеты (1).

В третьей главе рассматриваются приложения полученной во второй главе формулы для процесса плотности к сравнению некоторых бинарных статистических экспериментов.

На протяжении всей третьей главы рассматриваются распределения семимартингалов с независимыми приращениями, заданных на отрезке [0,1]. Обозначим $\Omega = \mathbb{D}(\mathbb{R}^d) = \mathbb{D}([0,1];\mathbb{R}^d)$ пространство всех непрерывных справа, имеющих пределы слева функций $\omega : [0,1] \to \mathbb{R}^d$. Также, как и во второй главе, X — канонический процесс, задаваемый соотношением $X_t(\omega) = \omega(t)$, μ мера скачков процесса X и фильтрация $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}$ порождена X, т.е. $\mathcal{F}_t = \bigcap\limits_{\varepsilon>0} \mathcal{F}^0_{t+\varepsilon}$, $\mathcal{F}^0_t = \sigma\{X_s, s \le t\}$, $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1$.

Определим $\mathcal{P}_I$ ($\mathcal{P}_L$, $\mathcal{P}_{L,0}$) как класс всех вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F})$, по которым процесс X является семимартингалом с независимыми приращениями (соотв. однородным процессом с независимыми приращениями, соотв. процессом Леви).

Обозначим $\mathcal{C}$ класс всех выпуклых функций, определенных на $(0;\infty)$. Для $f \in \mathcal{C}$ доопределим по непрерывности

$$f(0) = \lim_{x\downarrow 0} f(x), \quad \frac{f(\infty)}{\infty} = \lim_{x\uparrow\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Благодаря выпуклости оба предела существуют и принадлежат $(-\infty, +\infty]$. Будем использовать соглашение $0f(\frac{a}{0}) = a\frac{f(\infty)}{\infty}$.

В следующем определении предполагается, что λ — σ-конечная мера, доминирующая P_0 и P_1; z_0 и z_1 — плотности мер P_0 и P_1 относительно λ.

Определение 2 (И. Чисар) [28] Пусть $f \in \mathcal{C}$. f-дивергенцией двух мер P_1 и P_0 называется величина

$$J_f(\mathsf{P}_1, \mathsf{P}_0) = \int z_0 f(\frac{z_1}{z_0}) d\lambda = \mathsf{E}_0 f(Z) + \frac{f(\infty)}{\infty}\mathsf{P}_1\{Z = \infty\}.$$

Основным результатом третьей главы является следующая теорема.

Теорема 3 *Пусть* $\mathsf{P}' \in \mathcal{P}_I$, *тогда найдется такая мера* $\overline{\mathsf{P}} \in \mathcal{P}_L$, *что для любой* $\mathsf{P} \in \mathcal{P}_{L,0}$ *бинарный статистический эксперимент* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathsf{P}, \overline{\mathsf{P}}))$ *является менее информативным, чем* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathsf{P}, \mathsf{P}'))$.

Иными словами, для любой $\mathsf{P} \in \mathcal{P}_{L,0}$ *и для любой выпуклой функции* $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ *имеет место следующее неравенство для* f*-дивергенций:*

$$\mathcal{J}_f(\overline{\mathsf{P}}, \mathsf{P}) \leqslant \mathcal{J}_f(\mathsf{P}', \mathsf{P}).$$

Более того, мера $\overline{\mathsf{P}}$ строится явно по мере P' по сути дела усреднением по времени локальных характеристик процесса X следующим образом. Пусть $(B'_t, C'_t, \nu'(dt, dx))$ — детерминированная версия триплета характеристик процесса X относительно меры P', тогда, например, в

[28] *Csiszár I.* Eine Informationstheoretische Ungleichung und ihre Anwendung auf den Beweis der Ergodizität von Markoffschen Ketten. // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutatö Int. Közl. 1963. Vol. 8. P. 85–108.

качестве $\overline{\mathsf{P}}$ можно взять меру из $\mathcal{P}_{L,0}$ с триплетом $(B_1't, C_1't, dt\overline{F}(dx))$, где $\overline{F}(A) = \nu'((0,1] \times A)$, для $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Для доказательства теоремы 3 строится вспомогательный эксперимент $(\mathsf{Q}, \mathsf{Q}')$, эквивалентный $(\mathsf{P}, \mathsf{P}')$ и более информативный, чем $(\mathsf{P}, \overline{\mathsf{P}})$. Оказывается, что меры Q и Q' можно выбрать из классов $\mathcal{P}_{L,0}$ и $\mathcal{P}_L$ соответственно на пространстве $\mathbb{D}(\mathbb{R})$.

Большая информативность эксперимента $(\mathsf{Q}, \mathsf{Q}')$ по сравнению с $(\mathsf{P}, \overline{\mathsf{P}})$ доказывается с помощью так называемой леммы о сравнении (см. раздел 5.4 статьи[25]) и второго представления для обобщенного процесса плотности из (2). При этом следует отметить, что лемма о сравнении не всегда применима непосредственно к экспериментам $(\mathsf{P}, \mathsf{P}')$ и $(\mathsf{P}, \overline{\mathsf{P}})$.

Для доказательства эквивалентности экспериментов $(\mathsf{P}, \mathsf{P}')$ и $(\mathsf{Q}, \mathsf{Q}')$ используется результат, доказываемый в разделе 3.2 и имеющий самостоятельный интерес, а именно приводятся необходимые и достаточные условия эквивалентности экспериментов $(\mathsf{P}, \mathsf{P}')$ и $(\mathsf{Q}, \mathsf{Q}')$, где меры $\mathsf{P} \in \mathcal{P}_{L,0}$, $\mathsf{P}' \in \mathcal{P}_I$ заданы на $\mathbb{D}(\mathbb{R}^d)$, а меры $\mathsf{Q} \in \mathcal{P}_{L,0}$, $\mathsf{Q}' \in \mathcal{P}_I$ заданы на $\mathbb{D}(\mathbb{R}^{d'})$.

Предполагается, что меры P и P', а также Q и Q' не сингулярны. Обозначим детерминированные версии триплетов канонических процессов по мерам $\mathsf{P}, \mathsf{P}', \mathsf{Q}, \mathsf{Q}'$ соответственно

$$(bt, ct, dtF(dx)),\ (B_t', ct, \nu'(dt, dx)),$$
$$(b_{\mathsf{Q}}t, c_{\mathsf{Q}}t, dtG(dx)),\ (B_{\mathsf{Q},t}', c_{\mathsf{Q}}t, \nu_{\mathsf{Q}}'(dt, dx)).$$

Обозначим также $\nu(dt, dx) = dtF(dx), \nu_{\mathsf{Q}}(dt, dx) = dtG(dx)$. Для произвольной меры R обозначим $\mathsf{R}_0 = \mathsf{R}(X_0 = 0)$. Введем для экспериментов $(\mathsf{P}, \mathsf{P}')$, $(\mathsf{Q}, \mathsf{Q}')$ вспомогательные объекты β, Y, ν_2', a', β^{Q}, Y^{Q}, $\nu_{\mathsf{Q},2}'$, a_{Q}', которые понадобятся для формулировки критерия эквивалентности экспериментов, по аналогии со введенными выше при описании результатов второй главы.

Теорема 4 (Критерий эквивалентности) *Введенные выше эксперименты* $(\mathsf{P}, \mathsf{P}')$ *и* $(\mathsf{Q}, \mathsf{Q}')$ *эквивалентны тогда и только тогда, когда вы-*

полняется условие

$$\left\{\begin{array}{c} \int\limits_0^1 \beta_s^\top c\beta_s ds = \int\limits_0^1 (\beta_s^{\mathsf{Q}})^\top c_{\mathsf{Q}}\beta_s^{\mathsf{Q}} ds, \\ \nu(Y\in B) = \nu^{\mathsf{Q}}(Y^{\mathsf{Q}}\in B), B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+\setminus\{1\}), \\ \dfrac{\mathsf{P}_0'\prod\limits_{0<s\leqslant 1}(1-a_s')}{\exp(\nu_2'\{(s,x):0<s\leqslant 1, a_s'=0\})} = \dfrac{\mathsf{Q}_0'\prod\limits_{0<s\leqslant 1}(1-a_{\mathsf{Q},s}')}{\exp\left(\nu_{\mathsf{Q},2}'\left\{(s,x):0<s\leqslant 1, a_{\mathsf{Q},s}'=0\right\}\right)}. \end{array}\right. \tag{E}$$

Следствие 5 *Для экспериментов, составленных из распределений процессов Леви, необходимые и достаточные условия эквивалентности принимают следующий вид:*

$$\left\{\begin{array}{c} \beta^\top c\beta = (\beta^{\mathsf{Q}})^\top c_{\mathsf{Q}}\beta^{\mathsf{Q}}, \\ \nu(Y\in B) = \nu^{\mathsf{Q}}(Y^{\mathsf{Q}}\in B), B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+\setminus\{1\}), \\ \nu_2'\left\{[0,1]\times\mathbb{R}^d\right\} = \nu_{\mathsf{Q},2}'\left\{[0,1]\times\mathbb{R}^{d'}\right\}. \end{array}\right. \tag{EL}$$

В заключительном разделе 3.4 приведен следующий результат, который может быть полезен для задач минимизации f-дивергенции, возникающих в финансовой математике.

Теорема 6 *Пусть на прозвольном измеримом пространстве с фильтрацией $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{F})$ на интервале $[0,1]$ заданы d-мерный процесс L с непрерывными справа и имеющими пределы слева траекториями, мера Q, относительно которой L — процесс Леви, и мера $\mathsf{Q}'\ll\mathsf{Q}$, относительно которой L — мартингал с независимыми приращениями. Тогда на том же пространстве найдется мера $\overline{\mathsf{Q}}$, такая что*

1) $\overline{\mathsf{Q}}\ll\mathsf{Q}$,

2) L — мартингал и процесс Леви относительно меры $\overline{\mathsf{Q}}$,

3) $J_f(\overline{\mathsf{Q}},\mathsf{Q})\leqslant J_f(\mathsf{Q}',\mathsf{Q})$ для всех выпуклых $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$.

Если $\mathsf{Q}'\sim\mathsf{Q}$, то $\overline{\mathsf{Q}}\sim\mathsf{Q}$.

Так же как и выше, характеристики процесса L относительно меры $\overline{\mathsf{Q}}$ получаются усреднением по времени его характеристик относительно меры Q'.

Благодарность.

Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук Александра Александровича Гущина, которому автор выражает искреннюю благодарность за выбор направления исследования, поддержку и постоянное внимание к работе.

Список работ автора по теме диссертации.

1. *Хихол С. А.* Формула для обобщенного процесса плотности распределений семимартингалов с независимыми приращениями. // Теория вероятн. и ее примен. 2009. Т. 54, № 4. С. 716–729.

2. *Хихол С. А.* Усреднение локальных характеристик приближает семимартингал с независимыми приращениями к процессам Леви. // Успехи матем. наук. 2010. Т. 65, № 2. С. 199–200.

3. *Хихол С. А.* Два представления для обобщенного процесса плотности распределений семимартингалов с независимыми приращениями. // Обозрение прикл. и промышл. матем. 2009. Т. 16, № 2. С. 278–279.

4. *Хихол С. А.* Усреднение локальных характеристик сближает семимартингал с независимыми приращениями с процессами Леви. // М.: МГУ имени М.В. Ломоносова, 2010. — 25 с. — Деп. в ВИНИТИ 11.03.2010, № 143–В2010.

5. *Хихол С. А.* Процесс Леви, который ближе, чем заданный процесс с независимыми приращениями, ко всем процессам Леви. // Тезисы докладов Секции «Математика и механика» Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов–2009». — М.: Механико-математический факультет МГУ имени М.В.Ломоносова, 2009. С. 72–73.